Devoir d'entrainement

Durée : 2 heures

Exercice 1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints et calculer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 - e_4$. A quelle condition sur les réels a_1, a_2, a_3, a_4 le plan P est-il inclus dans le noyau de la forme linéaire $f = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$?
2. Déterminer une base du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid \forall v \in P, f(v) = 0\}$. Puis, de façon équivalente, donner des équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3. Considérons maintenant les formes linéaires $\phi_1 = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\phi_2 = e_1^* - e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous espace $E = \{v \in V \mid \phi_1(v) = \phi_2(v) = 0\}$.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres de la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles, donner une base de l'espace propre associé, puis de l'espace caractéristique associé. La matrice A est-elle diagonalisable / trigonalisable ? Si oui, donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale / triangulaire supérieure. Enfin, expliquer comment obtenir ensuite la décomposition de Dunford de A.

Exercice 4. On se donne un entier n et une matrice $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $J^2 = -I_{2n}$, où I_{2n} est la matrice identité. Le but de cet exercice est de montrer que J est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

où tous les coefficients non-représentés sont nuls.

1. Donner un polynome de degré 2 qui annule J. En déduire que les valeurs propres de J vue comme une matrice complexe sont les complexes i et $-i$. La matrice J est-elle diagonalisable/trigonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$?
2. Montrer que J est diagonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $w \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre pour i si et seulement si son conjugué $\overline{w} \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre pour $-i$. En déduire que les espaces propres de $J \in M_{2n}(\mathbb{C})$ sont tous de dimension n.
4. Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de l'espace propre associé à i. Pour $j = 1, \ldots, n$, on note $u_j = \mathrm{Re}(w_j)$ la partie réelle de w_j et $v_j = \mathrm{Im}(w_j)$ sa partie imaginaire. Que vaut Ju_j ? Que vaut Jv_j ?
5. Conclure.