

Examen première session - Corrigé

Exercice 1. 1. Décomposer en somme de carrés de formes linéairement indépendantes les formes quadratiques sur \mathbb{R}^4 suivantes :

$$Q_1(x, y, z, t) = 2x^2 + 7y^2 + t^2 - z^2 + 8xy - 4xt - 2yz - 6yt + 2tz,$$

$$Q_2(x, y, z, t) = y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz.$$

Quelle est leur signature ?

2. Soit ϕ une application bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E , et soit Q sa forme quadratique. Soient ℓ_1, \dots, ℓ_r des formes linéaires indépendantes, telles que Q s'écrive sous la forme

$$\forall x \in E, Q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)^2,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$. On note F le sous-espace du dual E^* engendré par ℓ_1, \dots, ℓ_r .

(a) Rappeler la définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique.

(b) Vérifier que la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Q est donnée par :

$$\forall x, y \in E, \phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y).$$

(c) Justifier que l'orthogonal de F dans E (noté F° dans le cours) est inclus dans le noyau de ϕ . Par un argument de dimension, en déduire que F° est égal au noyau de ϕ .

3. A l'aide de la question précédente, calculer une base du noyau des formes bilinéaires symétriques associées à Q_1 et Q_2 .

Corrigé. 1. On applique l'algorithme de Gauss vu en cours (attention : appliquer une autre méthode peut mener à des formes linéairement dépendantes).

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, z, t) &= 2x^2 + 7y^2 + t^2 - z^2 + 8xy - 4xt - 2yz - 6yt + 2tz \\ &= 2(x^2 + 4xy - 2xt) + 7y^2 + t^2 - z^2 - 2yz - 6yt + 2tz \\ &= 2(x + 2y - t)^2 - 2(2y - t)^2 + 7y^2 + t^2 - z^2 - 2yz - 6yt + 2tz \\ &= 2(x + 2y - t)^2 - y^2 + 2yt - t^2 - z^2 - 2yz + 2tz \\ &= 2(x + 2y - t)^2 - (y + z - t)^2. \end{aligned}$$

Les formes obtenues sont bien indépendantes et on voit donc que Q_1 est de signature $(1, 1)$ et de rang 2.

$$\begin{aligned} Q_2(x, y, z, t) &= y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz \\ &= y^2 + 2yz + z^2 - 4xz - 4xt \\ &= (y + z)^2 - 4x(z + t) \\ &= (y + z)^2 - (x + z + t)^2 + (x - z - t)^2. \end{aligned}$$

Les formes obtenues sont bien linéairement indépendantes et Q_2 est donc de signature $(2, 1)$ et de rang 3.

2. (a) Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique ϕ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que pour tout vecteur $y \in E$, on ait $\phi(x, y) = 0$.

- (b) Il est immédiat que ϕ ainsi définie est bilinéaire symétrique. Comme, $\phi(x, x) = Q(x)$ pour tout x , ϕ est bien l'unique forme associée à Q .
- (c) Soit $x \in F^\circ$ et $y \in E$. Alors pour tout $i = 1, \dots, r$, $\ell_i(x) = 0$ donc $\phi(x, y) = 0$ et on a prouvé l'inclusion demandée. Par ailleurs, le théorème du rang pour les applications bilinéaires symétriques implique que le noyau de ϕ a pour codimension le rang de ϕ , c'est à dire r . Nous avons également vu en cours que F° a pour codimension la dimension de F , c'est à dire r . Nous avons donc en plus d'une inclusion, égalité des dimensions et les deux espaces considérés sont donc égaux.
3. Pour obtenir une base du noyau de Q_1 nous devons donc, d'après la question 1, trouver une base de $\text{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ où $\ell_1(x, y, z, t) = x + 2y - t$ et $\ell_2(x, y, z, t) = y + z - t$. On cherche donc une base de l'ensemble des vecteurs colonnes \mathbb{R}^4 tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

c'est à dire tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

On cherche donc une base du noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour cela on applique la méthode du pivot de Gauss, que nous ne rappellerons pas ici. On trouve par exemple les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour calculer une base du noyau de Q_2 , on cherche une base de $\text{Vect}(\ell_1, \ell_2, \ell_3)^\circ$ où $\ell_1(x, y, z, t) = y + z$ et $\ell_2(x, y, z, t) = x - z - t$, $\ell_3(x, y, z, t) = x + z + t$. On peut raisonner de la même manière que pour Q_1 , mais on peut aller un peu plus vite en remarquant que l'espace recherché est de dimension 1 et que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau des trois formes linéaires. Ce vecteur engendre donc le noyau de Q_2 .

Exercice 2. On considère la matrice de $M_4(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -i\pi & 0 & 2\pi & 2i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 2i\pi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'image par A des vecteurs $(0, 0, 0, 1)$, $(2i, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A , donner ses valeurs propres et leur multiplicité algébrique.
3. Pour chaque valeur propre donner une base de l'espace propre associé et de l'espace caractéristique associé. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$, est-elle trigonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$? Justifier, bien sûr.

4. Donner une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = PTP^{-1}$.
5. Donner une matrice nilpotente N et une matrice diagonalisable D telle que $A = D + N$ et $DN = ND$.
6. Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice. Expliquer comment la décomposition obtenue à la question précédente peut être utilisée pour calculer l'exponentielle de A . Enfin, faire le calcul explicitement.

Corrigé. 1. On trouve

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique de A est le déterminant

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -i\pi - X & 0 & 2\pi & 2i \\ -i & -X & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 2i\pi - X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix}.$$

On le calcule par exemple en développant successivement par rapport à la 4ème ligne puis la deuxième colonne, ce qui donne :

$$P_A(X) = X^2 \begin{vmatrix} -i\pi - X & 2\pi & 2i \\ \pi & 2i\pi - X & \end{vmatrix} = X^3(X - i\pi).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et $i\pi$ qui ont pour multiplicités algébriques respectives 3 et 1.

3. Pour calculer les espaces propres on cherche des bases des noyaux des matrices A et $A - i\pi I_4$, ce qui peut se faire par la méthode du pivot de Gauss. Après un calcul que nous omettons ici, nous obtenons que les deux espaces propres sont de dimension 1. L'espace

propre de $i\pi$ est engendré par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$. L'espace propre de 0 est engendré

par $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme la multiplicité algébrique de $i\pi$ est égale à sa multiplicité géométrique, l'espace caractéristique et l'espace propre coïncident. L'espace caractéristique de 0 doit avoir pour dimension la multiplicité algébrique de 0, c'est à dire 3. De plus, on sait d'après la ques-

tion 1 que les trois vecteurs $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y appartiennent.

Comme ils sont linéairement indépendants, on en déduit qu'ils forment une base de l'espace caractéristique

La multiplicité géométrique de 0 diffère de sa multiplicité algébrique. La matrice n'est donc pas diagonalisable. En revanche, comme son polynôme caractéristique est scindé, elle est trigonalisable.

4. On cherche ici à trigonaliser A . On va utiliser la base de vecteurs propres/caractéristiques obtenue à la question précédente. On peut remarquer que $Av_4 = v_3$ et $Av_3 = v_2$. Par conséquent, si l'on note P la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3, v_4 dans cet ordre, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien trigonalisé A .

5. Il s'agit bien sûr de la décomposition de Dunford. Les matrices

$$D = P \begin{pmatrix} i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ et } N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

conviennent

6. D'après les propriétés de l'exponentielle de matrice vues en cours, et en utilisant en particulier le fait que les matrices D et N commutent, nous avons :

$$\exp(A) = \exp D \exp N = P \exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On explicite chacun des facteurs. Pour commencer,

$$\exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

car $\exp(i\pi) = -1$. Ensuite, si on note

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et N'^3 est la matrice nulle. On peut donc écrire $\exp N' = I_4 + N' + \frac{1}{2}N'^2$ et donc

$$\exp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4i & 2i \\ -i & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2i & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Montrer que la matrice suivante est orthogonale

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Identifier l'application linéaire de \mathbb{R}^3 représentée par cette matrice dans la base canonique.

Corrigé. Notons A la matrice considérée et C_1, C_2, C_3 ses colonnes. En calculant les différents produits scalaires, on vérifie directement que les colonnes forment une base orthonormée, et donc que A est orthogonale.

Pour savoir s'il s'agit d'une isométrie directe ou indirecte, on peut calculer son déterminant, mais il est plus rapide de vérifier si le produit vectoriel de C_1 et C_2 est égale à plus ou moins C_3 . Ce signe peut être vérifié sur un seul coefficient. Par exemple, le dernier coefficient de $C_1 \wedge C_2$ est $\frac{1}{9^2}(8 \cdot 4 - (-4) \cdot 1) = \frac{4}{9}$ et est donc égal au dernier coefficient de C_3 . On a donc nécessairement $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et notre matrice représente une isométrie directe.

D'après le cours, il s'agit donc d'une rotation.

Son axe est l'espace propre associée à la valeur propre 1. On cherche donc le noyau de la matrice $A - I_3$, ce qui peut se faire par la méthode du pivot. On trouve que cet espace propre est engendré par le vecteur $u = (-3, 1, 1)$.

Pour déterminer l'angle θ de la rotation, on utilise la formule de la trace :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr}(A) - 1) = \frac{7}{18}.$$

Donc $\theta = \pm \arccos \frac{7}{18}$ modulo 2π .

Il reste enfin à déterminer le signe de θ . Pour cela, on choisit un vecteur x qui n'appartient pas à l'axe, par exemple $(1, 0, 0)$ et on calcule le signe du déterminant de (x, Ax, u) dans la base canonique. Le calcul donne

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{8}{9} & -3 \\ 0 & -\frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

Ce qui nous donne $\theta = -\arccos \frac{7}{18}$.

Conclusion : l'application linéaire considérée est la rotation d'axe orienté dirigé par $(-3, 1, 1)$ et d'angle $-\arccos \frac{7}{18}$.

Exercice 4. 1. Soit P le plan de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, -1, 2)$. Donner une base orthonormée de P . Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du vecteur $x_0 = (1, 1, 1)$ sur le plan P .

2. Soient F un sous-espace d'un espace euclidien E . La distance d'un vecteur x au sous-espace F est par définition le réel :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

On note π_F la projection orthogonale sur F . A l'aide du théorème de Pythagore, montrer que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a l'inégalité suivante entre normes euclidiennes :

$$\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|.$$

En déduire l'égalité

$$d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|.$$

3. Calculer la distance du vecteur x_0 au plan P de la question 1.

Corrigé. 1. Pour trouver une base orthonormée de P , on peut appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt. Pour cela, on commence par normaliser le premier vecteur, en posant

$$u = \frac{1}{\|(1, 0, 1)\|} (1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1).$$

On calcule ensuite le projeté du deuxième vecteur sur l'orthogonal à u , c'est à dire

$$(1, -1, 2) - ((1, -1, 2)|u)u = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}),$$

que l'on normalise ensuite pour obtenir

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}} (-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}).$$

La famille (u, v) est une base orthonormée de P .

Le projeté orthogonal de $x_0 = (1, 1, 1)$ s'obtient par la formule : $\pi_P(x_0) = (x_0|u)u + (x_0|v)v$. On obtient

$$\pi_P(x_0) = (1, 0, 1) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(4, 2, 2).$$

2. Soient $x \in E$ et $y \in F$. On sait que $x - \pi_F(x)$ est orthogonal à F , donc en particulier au vecteur $\pi_F(x) - y$. Donc le théorème de Pythagore affirme :

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x) - y\|^2 \leq \|x - \pi_F(x) + \pi_F(x) - y\|^2 = \|x - y\|^2.$$

Cette inégalité signifie que $\|x - \pi_F(x)\|$ est un minorant de l'ensemble $S = \{\|x - y\| \mid y \in F\}$. La borne inférieure étant le plus grand des minorants, on en déduit

$$\|x - \pi_F(x)\| \leq \inf S = d(x, F).$$

Mais par ailleurs, $\|x - \pi_F(x)\| \in S$, donc $\|x - \pi_F(x)\| \geq \inf S = d(x, F)$. On a donc bien

$$\|x - \pi_F(x)\| = d(x, F).$$

3. D'après la question précédente, cette distance est obtenue en calculant la norme suivante :

$$\|x_0 - \pi_P(x_0)\| = \|\frac{1}{3}(-1, 1, 1)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E . Etant donnée une famille de p vecteurs v_1, \dots, v_p , on considère la matrice $M(v_1, \dots, v_p) \in M_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ième ligne et la j -ième colonne est le produit scalaire $(v_i|v_j)$.

1. Que vaut $M(v_1, \dots, v_p)$ si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthonormée ?
2. Démontrer qu'étant donnés deux vecteurs $v_1, v_2 \in E$, on a toujours $\det(M(v_1, v_2)) \geq 0$.
3. (a) Démontrer que si la famille (v_1, \dots, v_p) est liée alors la matrice $M(v_1, \dots, v_p)$ n'est pas inversible.
 (b) On suppose (dans cette question seulement) que $p = n$ et que (v_1, \dots, v_n) est une base. Citer un résultat du cours qui permet d'affirmer que $M(v_1, \dots, v_n)$ est inversible.
 (c) Démontrer que la restriction d'une forme quadratique définie positive à un sous-espace vectoriel est définie positive.
 (d) Démontrer que $M(v_1, \dots, v_p)$ est inversible si et seulement si (v_1, \dots, v_p) est libre.
4. On suppose que (v_1, \dots, v_p) est une base d'un sous-espace F de E . Soit $x \in E$ un vecteur quelconque et $\pi_F(x)$ sa projection orthogonale sur F .

- (a) Justifier que $\det(M(v_1, \dots, v_p, \pi_F(x))) = 0$.
- (b) En utilisant la décomposition $x = \pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x)$ et la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, démontrer l'identité :

$$\det(M(v_1, \dots, v_p, x)) = \det(M(v_1, \dots, v_p, \pi_F(x))) + \|\pi_{F^\perp}(x)\|^2 \det(M(v_1, \dots, v_p)).$$

- (c) A l'aide de la deuxième question de l'exercice 4, en déduire la formule :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(M(v_1, \dots, v_p, x))}{\det(M(v_1, \dots, v_p))}.$$

- (d) Refaire le calcul de la distance de x_0 à P de l'exercice 4 en utilisant la formule précédente.

Corrigé. 1. Dans le cas où les v_i sont formés une famille orthonormée, $(v_i|v_j) = 0$ si $i \neq j$ et $= 1$ sinon. On obtient donc la matrice identité I_p .

2. On peut exprimer le déterminant sous la forme :

$$\det(M(v_1, v_2)) = (v_1|v_1)(v_2|v_2) - (v_1|v_2)(v_2|v_1) = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - (v_1|v_2)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc que $\det(M(v_1, v_2)) \geq 0$.

3. (a) Si la famille des v_i est liée, alors il existe une combinaison linéaire nulle des v_i :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

Alors pour chaque $j = 1, \dots, p$, on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i (v_i|v_j) = 0$ donc si

$$L_i = ((v_i|v_1) \quad \dots \quad (v_i|v_p))$$

désigne la i -ème ligne de $M(v_1, \dots, v_p)$, on voit que l'on a une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_i = 0$. Les lignes de $M(v_1, \dots, v_p)$ sont donc liées et elle n'est pas inversible.

- (b) Si (v_1, \dots, v_n) est une base, alors la matrice $M(v_1, \dots, v_n)$ est la matrice du produit scalaire dans la base (v_1, \dots, v_n) . Comme le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, le cours affirme que sa matrice dans n'importe quelle base est inversible.
- (c) Si F est un sous-espace vectoriel et si Q est définie positive, alors pour tout $x \in F$, $Q|_F(x) = Q(x)$ donc $Q|_F(x) \geq 0$ et $Q|_F(x) = 0$ si et seulement si $Q(x) = 0$ et donc si et seulement si $x = 0$. Cela montre bien que $Q|_F$ est définie positive.
- (d) La question 3.a donne une implication. Pour la réciproque, remarquons que si (v_1, \dots, v_p) est une famille libre, alors c'est une base de $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $M(v_1, \dots, v_p)$ est la matrice de la restriction du produit scalaire à F . Or d'après la question précédente, la restriction du produit scalaire à un sous-espace est un produit scalaire. On en déduit que $M(v_1, \dots, v_p)$ est inversible.
4. (a) Comme $\pi_F(x) \in F$, la famille $(v_1, \dots, v_p, \pi_F(x))$ est liée. La matrice $M(v_1, \dots, v_p, \pi_F(x))$ n'est donc pas inversible et son déterminant est nul.
- (b) La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne implique :

$$\det(M(v_1, \dots, v_p, x)) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_p) & (v_1|x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \dots & (v_p|v_p) & (v_p|x) \\ (x|v_1) & \dots & (x|v_p) & (x|x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_p) & (v_1|\pi_F(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|v_p) & (v_p|\pi_F(x)) \\ (x|v_1) & \cdots & (x|v_p) & (x|\pi_F(x)) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_p) & (v_1|\pi_{F^\perp}(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|v_p) & (v_p|\pi_{F^\perp}(x)) \\ (x|v_1) & \cdots & (x|v_p) & (x|\pi_{F^\perp}(x)) \end{vmatrix}$$

En remplaçant ensuite x par $\pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x)$, qui implique les identités $(x|v_i) = (\pi_F(x)|v_i)$, $(x|\pi_F(x)) = (\pi_F(x)|\pi_F(x))$ et $(x|\pi_{F^\perp}(x)) = (\pi_{F^\perp}(x)|\pi_{F^\perp}(x))$, le résultat ci-dessus peut se réécrire

$$\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_p) & (v_1|\pi_F(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|v_p) & (v_p|\pi_F(x)) \\ (\pi_F(x)|v_1) & \cdots & (\pi_F(x)|v_p) & \|\pi_F(x)\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_p) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|v_p) & 0 \\ (x|v_1) & \cdots & (x|v_p) & \|\pi_{F^\perp}(x)\|^2 \end{vmatrix}.$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient bien l'identité

$$\det(M(v_1, \dots, v_p, x)) = \det(M(v_1, \dots, v_p, \pi_F(x))) + \|\pi_{F^\perp}(x)\|^2 \det(M(v_1, \dots, v_p)).$$

- (c) Le premier terme ci-dessus est nul d'après la question (b). Comme $\pi_{F^\perp}(x) = x - \pi_F(x)$ et $d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|$, on obtient bien l'identité voulue.