Examen première session

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Exercice 1. 1. Décomposer en somme de carrés de formes linéairement indépendantes les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes :

$$Q_1(x,y,z,t) = 2x^2 + 7y^2 + t^2 - z^2 + 8xy - 4xt - 2yz - 6yt + 2tz,$$

$$Q_2(x,y,z,t) = y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz.$$

Quelle est leur signature ?

2. Soit ϕ une application bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie, et soit Q sa forme quadratique. Soient $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes, telles que Q s'écrive sous la forme

$$\forall x \in E, Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \ell_i(x)^2,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$. On note F le sous-espace du dual E^* engendré par $\ell_1, \dots, \ell_r$.

(a) Rappeler la définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique.

(b) Vérifier que la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Q est donnée par :

$$\forall x, y \in E, \phi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \ell_i(x)\ell_i(y).$$

(c) Justifier que l'orthogonal de F dans E (noté F° dans le cours) est inclus dans le noyau de ϕ. Par un argument de dimension, en déduire que F° est égal au noyau de ϕ.

3. A l'aide de la question précédente, calculer une base du noyau des formes bilinéaires symétriques associées à Q_1 et Q_2.

Exercice 2. On considère la matrice de $M_4(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -i\pi & 0 & 2\pi & 2i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 2i\pi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'image par A des vecteurs $(0,0,0,1)$, $(2i,0,-1,0)$ et $(0,1,0,0)$.
2. Calculer le polynome caractéristique de A, donner ses valeurs propres et leur multiplicité algébrique.
3. Pour chaque valeur propre donner une base de l'espace propre associé et de l'espace caractéristique associé. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$, est-elle trigonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$? Justifier, bien sûr.
4. Donner une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = PTP^{-1}$.
5. Donner une matrice nilpotente N et une matrice diagonalisable D telle que $A = D + N$ et $DN = ND$.

6. Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice. Expliquer comment la décomposition obtenue à la question précédente peut être utilisée pour calculer l'exponentielle de A. Enfin, faire le calcul explicitement.

Exercice 3. Montrer que la matrice suivante est orthogonale

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Identifier l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ représentée par cette matrice dans la base canonique.

Exercice 4. 1. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,0,1)$ et $(1,-1,2)$. Donner une base orthonormée de P. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du vecteur $x_0 = (1,1,1)$ sur le plan P.

2. Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. La distance d'un vecteur x au sous-espace F est par définition le réel :
$$d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x-y\|.$$
On note π_F la projection orthogonale sur F. A l'aide du théorème de Pythagore, montrer que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a l'inégalité suivante entre normes euclidiennes :
$$\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x-y\|.$$
En déduire l'égalité
$$d(x,F) = \|x - \pi_F(x)\|.$$

3. Calculer la distance du vecteur x_0 au plan P de la question 1.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E. Etant donnée une famille de p vecteurs $v_1, \ldots, v_p$, on considère la matrice $M(v_1, \ldots, v_p) \in M_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ième ligne et la j-ième colonne est le produit scalaire $(v_i|v_j)$.

1. Que vaut $M(v_1, \ldots, v_p)$ si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille orthonormée ?
2. Démontrer qu'étant donnés deux vecteurs $v_1, v_2 \in E$, on a toujours $\det(M(v_1, v_2)) \geq 0$.
3. (a) Démontrer que si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée alors la matrice $M(v_1, \ldots, v_p)$ n'est pas inversible.
   (b) On suppose (dans cette question seulement) que $p = n$ et que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base. Citer un résultat du cours qui permet d'affirmer que $M(v_1, \ldots, v_n)$ est inversible.
   (c) Démontrer que la restriction d'une forme quadratique définie positive à un sous-espace vectoriel est définie positive. En déduire que la restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel est un produit scalaire.
   (d) Démontrer que $M(v_1, \ldots, v_p)$ est inversible si et seulement si $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.
4. On suppose que $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base d'un sous-espace F de E. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque et $\pi_F(x)$ sa projection orthogonale sur F.
   (a) Justifier que $\det(M(v_1, \ldots, v_p, \pi_F(x))) = 0$.
   (b) En utilisant la décompostion $x = \pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x)$ et la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, démontrer l'identité :
   $$\det(M(v_1, \ldots, v_p, x)) = \det(M(v_1, \ldots, v_p, \pi_F(x))) + \|\pi_{F^\perp}(x)\|^2 \det(M(v_1, \ldots, v_p)).$$
   (c) A l'aide de la deuxième question de l'exercice 4, en déduire la formule :
   $$d(x,F)^2 = \frac{\det(M(v_1, \ldots, v_p, x))}{\det(M(v_1, \ldots, v_p))}.$$
   (d) Refaire le calcul de la distance de x_0 à P de l'exercice 4 en utilisant la formule précédente.