Examen deuxième session - Corrigé

Exercice 1. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = e_1+2e_2-e_3+2e_4$ et $v_2 = 2e_1+3e_2-e_4$. Déterminer une base du sous-espace $P^\perp = \{f \in (\mathbb{R}^4)^* \mid \forall v \in P, f(v) = 0\}$. Puis, de façon équivalente, donner des équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
2. Vérifier que la famille $(2e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + 2e_3, e_1 + 3e_2, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis calculer sa base duale.

Corrigé. 1. D'après le cours, $P^\perp$ est de dimension la codimension de P, c'est à dire 2. Il suffit de trouver donc deux formes linéaires indépendantes dans $P^\perp$. Par exemple, les formes représentées par les matrices lignes $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}8 & -5 & 0 & 1\end{pmatrix}$ conviennent.

2. La matrice de ces vecteurs dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si c'est une base, les éléments de la base duale seront obtenus en prenant les lignes de l'inverse de A. Il suffit donc de calculer l'inverse de A. On trouve :

$$A^{-1} = \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au passage, le fait que la matrice soit inversible montre que la famille considérée est bien une base.

Exercice 2. Pour toute permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ on note P_σ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

1. Représenter la matrice P_σ dans chacun des cas suivants :
   (a) $\sigma = \mathrm{Id}$,
   (b) σ est la transposition $(1, 2)$,
   (c) σ est une transposition quelconque (k, l)
   (d) σ est le cycle $(1, 2, \dots, n)$.
2. Vérifier que si σ_1 et σ_2 sont deux permutations, alors $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$.
3. Que vaut le déterminant de P_σ lorsque σ est une transposition ? En déduire que pour toute permutation, le déterminant de P_σ est égal à la signature de σ.
4. On suppose dans cette question que σ est un cycle de longueur r. Montrer que P_σ annule le polynome $X^r - 1$. En déduire que P_σ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que pour toute permutation σ, la matrice P_σ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. (On pourra utiliser la décomposition en cycles de supports disjoints de σ)

Corrigé. 1.

$$P_{\mathrm{Id}} = I_n,\ P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ P_{(1,\dots,n)} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{(k,l)} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les matrices ci-dessus les coefficients non-représentés sont nuls. Dans $P_{(k,l)}$, bien sûr, les 2 colonnes/lignes qui diffèrent sont la k-ème et la l-ème.

2. Il suffit de vérifier que pour tout vecteur de la base canonique, $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} e_j = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} e_j$. Or, ceci devient évident, si l'on remarque que pour tout perturbation σ, $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.
3. Si σ est une transposition, on passe de P_σ à l'identité en échangeant deux colonnes donc $\det(P_\sigma) = -1$.

   En général on écrit σ comme produit de k transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_k$. On sait alors que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. D'après la question précédente, on a alors
   $$\det(P_\sigma) = \det(P_{\tau_1}) \cdots \det(P_{\tau_k})) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma).$$
4. Si σ est un cycle de longueur r, alors clairement $\sigma^r = \mathrm{Id}$. D'après la question 2, on en déduit que $P_\sigma^r = I_n$ et donc que P_σ annule le polynome $X^r - 1$. Comme ce dernier est scindé à racines simples (ses racines sont les r racines r-ième de l'unité) on en déduit que P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
5. Soit σ une permutation quelconque. On sait qu'elle est décomposable en cycle de supports disjoints. On note $c_1, \ldots, c_m$ ces cycles, $I_1, \ldots, I_m$ leurs supports respectifs. Pour chaque indice i, On note V_i l'espace vectoriel engendré par les e_j, $j \in I_i$. Chaque matrice P_{c_i} agit non trivialement sur V_i, en le préservant (elle fait permuter les vecteurs de sa base), et agit trivialement (c'est à dire comme l'identité) sur tous les autres $V_{i'}$. En particulier, sur chaque V_i, $P_\sigma = P_{c_i}$.

   Pour montrer que P_σ est diagonalisable, il suffit de montrer que la restriction à chaque V_i est diagonalisable, ce qui est le cas d'après la question précédente.

Exercice 3. On appelle *demi-tour* toute rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle π.

1. Soit u un demi-tour. Donner une matrice particulièrement simple qui représente u.
2. Démontrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ est un demi-tour si et seulement si c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
3. Expliquer pourquoi les valeurs propres **réelles** d'une matrice orthogonale sont nécessairement 1 ou -1. Démontrer qu'une isométrie **directe** de $\mathbb{R}^3$ qui est diagonalisable est soit l'identité, soit un demi-tour.
4. On rappelle qu'en dimension 2, toute rotation peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Utiliser ce résultat pour démontrer que toute isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ est la composée de deux demi-tours.
5. Peut-on écrire une isométrie indirecte comme composée de demi-tours ?

Corrigé. 1. D'après le cours, une rotation d'angle π peut être représentée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dans une base orthonormée.

2. D'après ce qui a été vu en cours, les symétries orthogonales par rapport à une droite sont exactement les endomorphismes qui peuvent être représentés dans une base orthogonale par la matrice de la question précédente, et donc exactement les demi-tours.
3. C'est du cours : si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors,

$$X^t X = X^t A^t A X = (AX)^t (AX) = \lambda^2 X^t X.$$

Comme $\|X\| \neq 0$, on en déduit $\lambda^2 = 1$.
Une isométrie diagonalisable est donc semblable à une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont 1 ou -1. S'il s'agit d'une isométrie directe, alors le nombre de -1 est pair donc 0 ou 2. Si c'est 0, il s'agit de l'identité, si c'est 2, on a bien un demi-tour.
4. Soit f une isométrie directe et donc une rotation. Soit D son axe et $P = D^\perp$ son plan de rotation. La restriction de f à P est une rotation donc est le produit de deux symétries r_1 et r_2 dans le plan P. Pour $i = 1, 2$, on note s_i l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ qui fixe D et agit comme r_i dans P. Alors s_i est une symétrie orthogonale par rapport à une droite donc un demi-tour, et on a bien $f = s_1 \circ s_2$.
5. Un demi-tour est une isométrie directe et on sait qu'un produit d'isométries directes est direct. Donc, une isométrie indirecte ne peut pas être écrite comme composée de demi-tours.

Exercice 4. Montrer que la matrice suivante est orthogonale

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner les caractéristiques géométriques de l'application linéaire correspondante.

Corrigé. Pour montrer que la matrice est orthogonale, il suffit de vérifier que $A^t A = I_3$.

Comme le produit vectoriel des deux premières colonnes est l'opposé de la troisième (la vérification sur un seul coeff est suffisante), il s'agit d'une rotation gauche.

On détermine l'axe en cherchant un vecteur propre pour -1. Le vecteur $v = (2, 1, 0)$ convient. Le cosinus de l'angle s'obtient via la formule

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) + 1).$$

Enfin le signe du sinus de l'angle est obtenu en cherchant le signe de $\det(x, Ax, v)$ où $x \notin \mathbb{R}v$. Il est négatif. D'où : $\theta = -\arccos(\frac{2}{3})$, modulo 2π.

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Trouver une base orthonormée du noyau de $A - 9I_3$.

3. Compléter la base obtenue à la question précédente en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
4. Diagonaliser A.

Corrigé. 1. Il s'agit d'une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$, dans une base orthonormée, d'après le cours.

2. On commence par trouver une base de $\ker(A - 9I_3)$. On trouve par exemple les deux vecteurs $(0, 1, 1)$ et $(2, 1, 0)$. On orthonormalise ensuite, via la méthode de Gram-Schmidt. On pose $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, puis

$$v' = (2, 1, 0) - ((2, 1, 0)|u)u = (2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$

et enfin, $v = \frac{v'}{\|v'\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 1, -1)$. La famille (u, v) convient.

3. Pour compléter en une base orthonormée, il suffit d'ajouter le produit vectoriel de u et de v, $w = u \wedge v = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$.
4. On sait que notre matrice est diagonalisable en base orthonormée. Comme u et v sont vecteurs propres (pour la v.p. 9), on en déduit que w aussi, et on a une base de vecteurs propres. La seule chose qu'il reste à déterminer est la valeur propre de w. Pour cela, on évalue notre matrice sur w. On obtient $-9w$ ce qui nous donne -9 pour valeur propre.

Exercice 6. Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, on définit

$$q(z) = |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 6|z_3|^2 + i\bar{z_1}z_2 - iz_1\bar{z_2} + 2i\bar{z_2}z_3 - 2iz_2\bar{z_3}.$$

1. Montrer qu'il existe une forme hermitienne $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}^3$, $f(z, z) = q(z)$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Montrer que f est un produit scalaire hilbertien (On pourra commencer par décomposer q en somme de carrés de modules).

Corrigé. 1. L'application f définie par

$$f(z, w) = z_1\bar{w_1} + 3z_2\bar{w_2} + 6z_3\bar{w_3} + iz_2\bar{w_1} - iz_1\bar{w_2} + 2iz_3\bar{w_2} - 2iz_2\bar{w_3}$$

convient.

2. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est la matrice des $f(e_i, e_j)$, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Il ne reste plus qu'à vérifier que q est définie positive. On commence par décomposer en carrés. On obtient :
$$q(z) = |z_1 + iz_2|^2 + 2|z_2 + iz_3|^2 + 4|z_3|^3.$$
On obtient bien une forme définie positive et f est bien un produit scalaire hilbertien.