Examen deuxième session

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Exercice 1. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = e_1+2e_2-e_3+2e_4$ et $v_2 = 2e_1+3e_2-e_4$. Déterminer une base du sous-espace $P^\perp = \{f \in (\mathbb{R}^4)^* \mid \forall v \in P, f(v) = 0\}$. Puis, de façon équivalente, donner des équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
2. Vérifier que la famille $(2e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + 2e_3, e_1 + 3e_2, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis calculer sa base duale.

Exercice 2. Pour toute permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ on note P_σ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

1. Représenter la matrice P_σ dans chacun des cas suivants :
   (a) $\sigma = \mathrm{Id}$,
   (b) σ est la transposition $(1, 2)$,
   (c) σ est une transposition quelconque (k, l)
   (d) σ est le cycle $(1, 2, \dots, n)$.
2. Vérifier que si σ_1 et σ_2 sont deux permutations, alors $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$.
3. Que vaut le déterminant de P_σ lorsque σ est une transposition ? En déduire que pour toute permutation, le déterminant de P_σ est égal à la signature de σ.
4. On suppose dans cette question que σ est un cycle de longueur r. Montrer que P_σ annule le polynome $X^r - 1$. En déduire que P_σ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que pour toute permutation σ, la matrice P_σ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. (On pourra utiliser la décomposition en cycles de supports disjoints de σ)

Exercice 3. On appelle *demi-tour* toute rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle π.

1. Soit u un demi-tour. Donner une matrice particulièrement simple qui représente u.
2. Démontrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ est un demi-tour si et seulement si c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
3. Expliquer pourquoi les valeurs propres **réelles** d'une matrice orthogonale sont nécessairement 1 ou -1. Démontrer qu'une isométrie **directe** de $\mathbb{R}^3$ qui est diagonalisable est soit l'identité, soit un demi-tour.
4. On rappelle qu'en dimension 2, toute rotation peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Utiliser ce résultat pour démontrer que toute isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ est la composée de deux demi-tours.
5. Peut-on écrire une isométrie indirecte comme composée de demi-tours ?

Exercice 4. Montrer que la matrice suivante est orthogonale

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner les caractéristiques géométriques de l'application linéaire correspondante.

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Trouver une base orthonormée du noyau de $A - 9I_3$.
3. Compléter la base obtenue à la question précédente en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
4. Diagonaliser A.

Exercice 6. Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, on définit

$$q(z) = |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 6|z_3|^2 + i\bar{z}_1 z_2 - iz_1\bar{z}_2 + 2i\bar{z}_2 z_3 - 2iz_2\bar{z}_3.$$

1. Montrer qu'il existe une forme hermitienne $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}^3$, $f(z, z) = q(z)$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Montrer que f est un produit scalaire hilbertien (On pourra commencer par décomposer q en somme de carrés de modules).