

# Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (MM0049)

## Table des matières

<b>1 Dimension un</b>	<b>4</b>
1.1 Représentation graphique, méthode d'Euler . . . . .	4
1.2 Intervalle de vie, solutions maximales, existence et unicité . . . . .	6
1.3 EDO à variables séparables . . . . .	7
1.4 Barrières . . . . .	9
1.5 Explosion des solutions . . . . .	10
<b>2 Equations différentielles linéaires (I) : coefficients constants</b>	<b>12</b>
2.1 Remarques préliminaires . . . . .	12
2.2 Portraits de phase dans le plan . . . . .	13
2.3 Exponentielle de matrice . . . . .	15
2.4 Solutions de $x' = Ax$ . . . . .	17
2.5 Puits et sources . . . . .	19
<b>3 Equations différentielles linéaires (II)</b>	<b>21</b>
3.1 Structure des solutions . . . . .	21
3.2 Résolvante . . . . .	22
3.3 Wronskien . . . . .	23
3.4 Equation différentielle linéaire d'ordre supérieur . . . . .	25
3.5 Variation de la constante . . . . .	25
<b>4 Existence de solutions : le théorème de Cauchy-Peano</b>	<b>27</b>
4.1 Lemme d'extension . . . . .	27
4.2 Méthode des polygones d'Euler (1768) . . . . .	29
4.3 Extraction . . . . .	29
4.4 Majoration de l'erreur . . . . .	30
4.5 Solution . . . . .	30
4.6 Appendice I : le théorème d'Ascoli (1843-1896) . . . . .	31
4.7 Appendice II : module de continuité . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Existence et unicité, le théorème de Cauchy-Lipschitz</b>	<b>33</b>
5.1	Condition de Lipschitz . . . . .	33
5.2	Preuve en utilisant Cauchy-Peano . . . . .	34
5.3	Le lemme de Gronwall . . . . .	35
5.4	Preuve directe du théorème de Cauchy-Lipschitz, convergence de la méthode d'Euler . . . . .	35
5.5	Preuve du lemme de Gronwall . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Temps de vie des solutions, explosion</b>	<b>40</b>
6.1	Solutions maximales . . . . .	40
6.2	Estimation de l'intervalle d'existence (I) : conditions géométriques . .	41
6.3	Estimation de l'intervalle d'existence (II) : conditions analytiques . .	42
<b>7</b>	<b>Dépendance par rapport aux conditions initiales</b>	<b>43</b>
7.1	Continuité . . . . .	43
7.2	Classe $C^1$ . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Flot des champs de vecteurs autonomes</b>	<b>46</b>
8.1	Flot . . . . .	46
8.2	Equivalence de champs de vecteurs . . . . .	47
8.3	Le théorème de redressement . . . . .	48
8.4	Propriétés asymptotiques . . . . .	49
8.5	Conjugaison topologique des puits linéaires . . . . .	49
8.6	EDO sur les variétés . . . . .	50
8.7	Systèmes Dynamiques . . . . .	50
8.8	Linéarisation . . . . .	50
8.9	Flots de gradients . . . . .	50
<b>9</b>	<b>Equations différentielles analytiques</b>	<b>51</b>
9.1	Rappels sur les fonctions analytiques . . . . .	51
9.2	EDO analytiques . . . . .	53
<b>10</b>	<b>Repères chronologiques</b>	<b>55</b>

## Bibliographie

La théorie des EDO repose beaucoup sur le calcul différentiel (en particulier la notion de différentielle ; mais on utilisera aussi l'inégalité des accroissements finis, et le théorème d'inversion locale). Les notions de topologie sont fondamentales (espaces métriques compacts, complets, espaces fonctionnels). L'étude des équations différentielles linéaires repose sur l'algèbre linéaire.

L'étude préliminaire sur les EDO en dimension un est très classique, on peut se reporter au début du livre [HW99], qui contient beaucoup d'exemples, souvent éclairants.

Le début du cours (EDO linéaires, théorie générale) suit essentiellement le livre de Demailly ([Dem06]). Le théorème d'Hartman-Grobman est démontré dans [Rob99]. Il y a aussi des choses dans le livre de préparation à l'agrégation [HQ07], notamment sur le temps de vie des solutions. La partie sur les équations différentielles analytiques suit [Car61], puis le tout début de [IY08] (voir aussi [AE80]). La preuve du lemme de Gronwall est extraite de [HNW93] ; ce livre contient aussi de nombreux commentaires historiques. Je me suis également inspiré d'un poly de Viterbo ([Vit09])<sup>1</sup> Tous ces livres doivent beaucoup au livre d'Arnol'd ([Arn74]), un peu fouilli mais qui regorge d'idées et d'exemples. En particulier, le petit chapitre sur les champs de vecteurs est inspiré de ce livre.

## Références

- [AE80] V.I. Arnold and D. Embarek. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir Moscow, 1980.
- [Arn74] V.I. Arnol'd. *Equations différentielles ordinaires*. Editions Mir, 1974.
- [Car61] H. Cartan. *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'Une ou Plusieurs Variables Complexes*. Hermann, 1961.
- [Dem06] J.P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble sciences. EDP sciences, 2006.
- [HNW93] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations : Nonstiff problems*, volume 1. Springer Verlag, 1993.
- [HQ07] C. Zuily H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.
- [HW99] J.H. Hubbard and B.H. West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques*. Enseignement des mathématiques. Cassini, 1999.
- [IY08] I.U.S. Ilyashenko and S. Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86. Amer Mathematical Society, 2008.
- [Rob99] C. Robinson. *Dynamical systems : stability, symbolic dynamics, and chaos*, volume 28. CRC, 1999.
- [Vit09] C. Viterbo. *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Ecole Polytechnique, 2009.

---

1. Disponible sur sa page web, cf <http://www.math.ens.fr/~viterbo/Enseigt.html/Enseignement-09-X.html>).

# 1 Dimension un

Une *équation différentielle* est une équation

- dont l'inconnue est une fonction  $y$  dépendant d'une variable  $x$  (ou  $t$ ),
- qui fait intervenir  $y$  et certaines de ses dérivées  $y'$ ,  $y''$ , *etc.*, et éventuellement la variable  $x$  (ou  $t$ ).

*Résoudre* l'équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un **intervalle ouvert**, qui satisfont l'équation (on dit aussi *intégrer* l'équation différentielle).

L'équation est dite *d'ordre 1* si elle fait intervenir seulement  $y'$ ,  $y$  et  $x$ . Une *condition initiale* pour une EDO d'ordre 1 est une relation du type  $y(x_0) = y_0$ , qui impose la valeur  $y_0$  de la fonction inconnue en  $x_0$ . Le problème de Cauchy consiste à chercher les solutions satisfaisant à une condition initiale donnée.

Les EDO modélisent souvent l'évolution d'une quantité dépendant du temps; c'est pourquoi la variable est souvent notée  $t$ , on parle de "passé" et de "futur" (avant ou après la condition initiale). Exemples

- $y' = \alpha y$  (décroissance radioactive ou évolution d'une population ou taux d'intérêt);
- $N' = (\alpha - \beta)N - kN^2$  (population avec ressources limitées);
- Refroidissement d'un corps (loi de Newton) :  $T' = \alpha(T - T_{\text{ambiante}})$ ;
- pendule simple :  $\theta'' = k \sin(\theta)$ ;
- ...

## 1.1 Représentation graphique, méthode d'Euler

Comment *dessiner une équation différentielle* ?

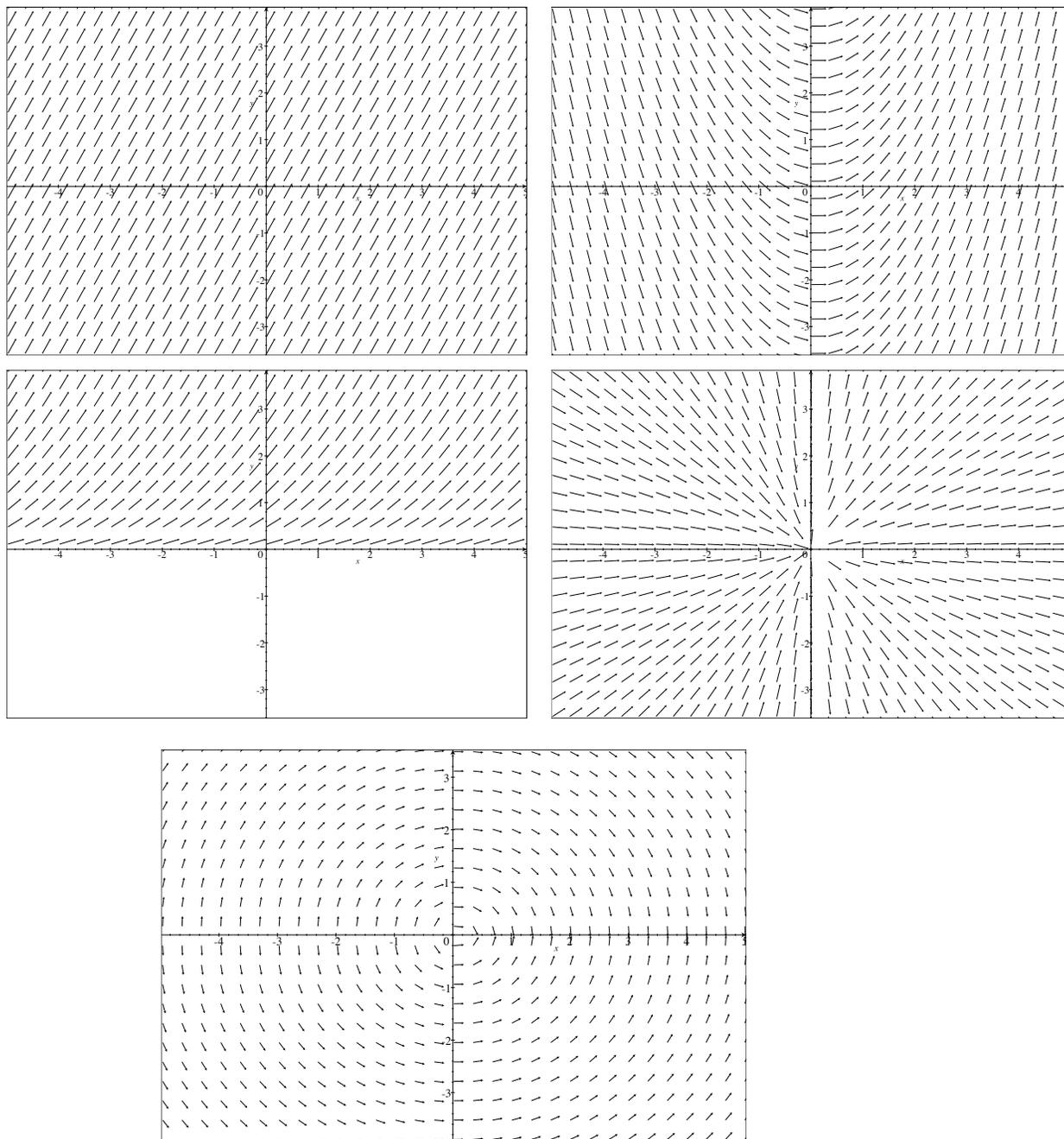
Un *champ de droites* sur l'ouvert  $O = I \times \mathbb{R}$  est la donnée, en chaque point  $(x, y) \in O$ , d'une droite  $\Delta(x, y)$ . Se donner un champ de droites équivaut à se donner, pour chaque  $(x, y)$  de  $O$ , la pente  $\varphi(x, y)$  de la droite  $\Delta_{x,y}$ . Ainsi, la donnée d'une EDO d'ordre 1 équivaut à la donnée d'un champ de droites (non verticales). L'EDO  $y' = \varphi(x, y)$  signifie que le graphe de  $f$  est tangent, en chacun de ses points  $(x, y)$ , à la droite  $\Delta_{x,y}$ ; on dira simplement que le graphe de  $f$  est tangent au champ de droites. Résoudre un problème de Cauchy revient donc à trouver les graphes tangents à un champ de droites données, et passant par un point donné.

---

**Exercice 1.**— 1. Pour chacun des champs de tangentes dessinés sur la page suivante, tracez à la main quelques solutions de l'équation différentielle correspondante.

2. Faites correspondre les cinq équations différentielles suivantes aux champs de tangentes.

---



Faites correspondre les cinq équations différentielles suivantes aux champs de droites dessinés ci-dessus :

$$(1) y' = x \quad (2) y' = \sqrt{y} \quad (3) y' = 2 \quad (4) y' = \frac{y}{x} \quad (5) y' = -\frac{x}{y}.$$

---

**Exercice 2.**—

1. Expliquer pourquoi la recherche de primitive est un exemple particulier d'EDO. Quelles sont les caractéristiques du champ de droites associée à une EDO de ce type ?
  2. Une EDO est dite autonome si elle ne fait pas intervenir la variable  $x$ , autrement dit si elle est du type  $y' = \phi(y)$ . Quelles sont les caractéristiques du champ de droites associée à une EDO autonome ?
- 

**Méthode d'Euler**

Comment l'ordinateur trace-t-il les solutions ? La méthode d'Euler consiste à tracer un graphe affine par morceaux (cad constitué de segments de droites) qui approche une solution. Le segment tracé suit le champ de tangentes de l'équation : le segment tracé à partir d'un point  $(x, y)$  aura pour pente  $\varphi(x, y)$ .

Exemple : tracer une approximation de la solution de l'équation  $y' = y$  vérifiant la condition initiale  $y(0) = 1/2$ .

On se fixe un "pas d'intégration", noté  $\Delta$  (par exemple, prenons  $\Delta = 1$ ). On part du point  $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$  correspondant à la condition initiale. En ce point, la pente du champ de tangentes vaut  $1/2$  : on trace donc un segment de pente  $1/2$  jusqu'à arriver en un point d'abscisse  $x_0 + \Delta_x = 0 + 1 = 1$  : on arrive ainsi au point  $(1, 1)$ . Et on recommence... On obtient ainsi une ligne brisée qui passe successivement par les points  $(0, 1/2), (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 16), \dots$

Que se passe-t-il si on applique la méthode, sur le même exemple et avec le même pas d'intégration, mais dans le passé ?

**1.2 Intervalle de vie, solutions maximales, existence et unicité**

**Exemple.** Lorsqu'on trace la solution de l'équation  $y' = y^2$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$ , on constate que la solution ne semble pas être définie sur  $\mathbb{R}$ , mais seulement sur un intervalle  $] -\infty, b[$  avec  $b \simeq 1$  (la fonction semble tendre vers  $+\infty$  en  $b$ , et on ne peut pas la prolonger).

On se donne une EDO  $y' = \varphi(x, y)$  et une condition initiale  $y(x_0) = y_0$ . Une *solution maximale* pour le problème de Cauchy correspondant est une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$  appelé *intervalle de vie*, telle que

- $f$  est solution de l'EDO et vérifie la condition initiale ;
- il n'existe pas de solution  $g$  de la même équation, vérifiant la même condition initiale, et définie sur un intervalle  $J$  contenant  $I$  et plus grand que  $I$ .

---

**Exercice 3.**— Montrer que la formule  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  définit une solution maximale au problème de Cauchy ci-dessus. Quel est l'intervalle de vie de cette solution ?

---

## Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère une EDO du type  $y' = \varphi(x, y)$ . On suppose que la fonction  $\varphi$  est définie pour tout  $x$  dans un intervalle  $I$  et tout  $y$  dans un intervalle  $J$ , et qu'elle est de classe  $C^1$ .

**Théorème 1.1** (existence et unicité des solutions). *Pour toute condition initiale  $y(x_0) = y_0$  avec  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in J$ , il existe une unique solution maximale de l'EDO vérifiant cette condition initiale.*

On peut aussi écrire l'unicité sans la notion de solution maximale : *Soient  $f_1, f_2$  deux solutions de la même ED sur un intervalle  $I$ . Si il existe un point  $x_0$  tel que  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , alors  $f_1 = f_2$  sur  $I$ .*

D'un point de vue pratique, cet énoncé nous aidera à faire des dessins, en garantissant que les graphes de deux solutions distinctes, définies sur un même intervalle, ne se rencontrent pas. Voici un exemple.

---

### Exercice 4.—

1. Montrer que les solutions de l'équation  $y' = y^2 \cos(y)$  sont de signe constant.

2. (**Prolongement de solution**) Soit  $f$  la solution maximale de l'équation différentielle  $y' = -xy$  vérifiant  $f(0) = 1$ , on note  $]a, b[$  son intervalle de vie. **a.** Donner (sans résoudre l'équation !) le tableau de variation de  $f$ . **b.** En déduire que l'intervalle de vie est  $\mathbb{R}$ .

---

---

**Exercice 5.—** Décrire toutes les fonctions  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ , définie sur un ouvert  $O$  quelconque de  $\mathbb{R}$ , et vérifiant  $f' = f$ . Pourquoi demande-t-on à une solution d'une EDO d'être définie sur un intervalle ?

---

## 1.3 EDO à variables séparables

Il s'agit des équations où on peut "séparer ce qui concerne  $y, y', \dots$  d'un côté de l'équation et ce qui concerne  $x$  de l'autre".

### Exemples

1.  $y'y = 1$  (dans cette équation, les variables sont déjà séparées...);
2.  $y'y^2 = x$ ;
3.  $y' = y^2$  (on "sépare les variables" en écrivant  $\frac{y'}{y^2} = 1$ );
4.  $y' = y - y^2$  (équation de population...), qu'on écrit  $\frac{y'}{y-y^2} = 1$ .

Contre-exemple :  $y' = \sin(xy)$ ; on peut essayer de prendre l'arcsin...

## Méthode générale de résolution

De façon générale, l'équation s'écrit

$$y'g(y) = f(x)$$

(avec  $f$  et  $g$  deux fonctions d'une variable. Si on connaît une primitive  $G$  de  $g$ , et une primitive  $F$  de  $f$ , alors l'équation équivaut à

$$G(y) = F(x) + C,$$

autrement dit, une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$ , est solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $x \in I$ , on a  $G(f(x)) = F(x) + C$ .

**Attention**, il ne suffit pas de mettre les ' $y$ ' à gauche et les ' $x$ ' à droite, il faut que la partie gauche soit vraiment sous forme  $y'g(y)$ . Par exemple, l'équation 3 pourrait s'écrire  $y' - y = 0$ , on a bien les ' $y$ ' à gauche, mais ça n'est pas sous la bonne forme, on ne sait pas résoudre ainsi (il n'y a pas de formule générale pour une primitive de  $y' - y$ ).

---

**Exercice 6.**— Résoudre les quatre exemples.

---

## Pièges

Il y a un certain nombre de difficultés :

1. les solutions ne sont pas toujours définies sur  $\mathbb{R}$  (cf exemples 1, 3, 4) ;
2. il faut parfois faire des hypothèses sur  $y$  pour pouvoir continuer les calculs (exemples 3 et 4), ce qui revient à "oublier" certaines solutions ;
3. il faut savoir calculer les primitives  $F$  et  $G$  ;
4. on n'obtient pas directement  $y$  comme fonction de  $x$ , mais comme fonction *implicite* de  $x$ , et il n'est pas toujours facile d'en déduire une formule explicite pour les solutions : il faut savoir inverser la fonction  $G$ .

## Résolution des exemples

Solutions :

1. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = \sqrt{x + c_1}$  et  $f(x) = -\sqrt{x + c_2}$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.
2. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = (\frac{3}{2}x^2 + c_3)^{\frac{1}{3}}$  où  $c_3$  est une constante ;
3. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = \frac{-1}{x+c_4}$  où  $c_4$  est une constante ;
4. ...

## 1.4 Barrières

La première rencontre avec les EDO peut donner l'impression qu'on sait tout résoudre. Rien n'est plus faux, cf

$$x' = x^2 - x, \quad x' = \sin(tx), \quad x' = e^{tx}$$

ou même

$$x' = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad x' = \frac{\sin(t)}{t}.$$

*Que faire quand on ne peut pas résoudre ?*

On considère une EDO  $y' = \Phi(x, y)$  (où  $\Phi$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ). On appellera *sur-solution* toute fonction dérivable  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) > \Phi(x, g(x))$ . Le graphe d'une sur-solution est appelé *barrière descendante*. Graphiquement, en terme de champ de droites, en tout point d'une barrière descendante, la pente de la tangente est supérieure à la pente du champ : le champ coupe la barrière "vers le bas" (DESSIN).

L'intérêt des barrières, c'est 1) qu'il est beaucoup plus facile de trouver des barrières que des solutions (il y en a plus!), et 2) qu'une bonne barrière peut donner des indications sur le comportement des solutions, à l'aide du théorème suivant.

**Théorème.** *Soit  $g$  une barrière descendante, et  $f$  une solution. Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x_0) \geq f(x_0)$ .*

*Alors pour tout  $x \geq x_0$ , on a  $g(x) > f(x)$ .*

**Remarque** Soit  $g$  une barrière descendante et  $f$  une solution. Supposons que les deux graphes se croisent :  $f(x_1) = g(x_1)$  pour un certain  $x_1$ . Alors :

1. si  $x < x_1$  et  $x$  assez proche de  $x_1$ , on a  $g(x) < f(x)$ .
2. si  $x > x_1$  et  $x$  assez proche de  $x_1$ , on a  $g(x) > f(x)$ .

---

**Exercice 7.**—

1. Formaliser et démontrer la remarque.
  2. Démontrer le théorème.
  3. Définir la notion de sous-solution (barrière montante), énoncer le théorème analogue, et déduire le théorème des sous-solutions du théorème des sur-solutions.
- 

*Preuve du théorème* — On commence par le cas où  $g(x_0) > f(x_0)$ .

On raisonne par l'absurde : si la conclusion du théorème n'est pas vérifiée, le graphe de  $f$  passe au-dessus du graphe de  $g$ , alors il doit le croiser ; soit  $x_1$  le PREMIER moment après  $x_0$  où le graphe de  $g$  rencontre celui de  $f$ . On a donc :

1.  $g(x_1) = f(x_1)$ ,
2. pour tout nombre  $x$  tel que  $x_0 \leq x < x_1$ ,  $g(x) > f(x)$ .

On utilise maintenant que  $g$  est une barrière descendante et  $f$  une solution : pour  $x$  assez proche de  $x_1$  et plus petit que  $x_1$ , on a  $g(x_1) < f(x_1)$  (d'après la remarque). Ceci contredit le point 2.

Il reste le cas où  $g(x_0) = f(x_0)$ . Mais alors la remarque nous dit que  $g(x'_0) > f(x'_0)$  pour  $x'_0 > x_0$  et assez proche de  $x_0$ . On est ramené au cas précédent en remplaçant  $x_0$  par  $x'_0$ .  $\square$

## 1.5 Explosion des solutions

On considère maintenant une équation différentielle

$$y' = \phi(x, y)$$

avec  $\phi$  définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

**Théorème.** *Soit  $f$  une solution maximale définie sur un intervalle de vie  $I = ]a, b[$ . Si  $b$  est un nombre réel (c'est-à-dire  $b \neq +\infty$ ), alors  $f$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $b^-$  : autrement dit, le graphe de  $f$  admet une asymptote verticale d'équation  $y = b$ .*

On utilise souvent le théorème sous forme contrapposée : si les solutions ne peuvent pas “exploser”, alors  $b = +\infty$ .

---

**Exercice 8.**— (préliminaire à la preuve)

1. Rappeler la définition de valeur d'adhérence d'une fonction  $f$ , définie sur  $]a, b[$ , au point  $b$ .
  2. On suppose de plus  $f$  de classe  $C^1$ , et que  $f$  a au moins deux valeurs d'adhérence au point  $b$ . Montrer que  $f'$  n'est pas bornée au voisinage de  $b$ . (On peut même montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $f'$  est  $\mathbb{R}$ .)
- 

**Exercice 9.**— **Démonstration du théorème**

On raisonne par contraposition. On suppose que la solution  $f$  a pour intervalle de vie  $]a, b[$  avec  $b < +\infty$  et que  $f$  n'a pas d'asymptote verticale en  $b$ . Le point clé-consiste à montrer que  $f$  admet alors une limite finie au point  $b$ . L'idée est que dans le cas contraire, la fonction doit beaucoup osciller au voisinage de  $b$ , en particulier sa dérivée n'est pas bornée ; mais l'équation différentielle nous indique que  $f'(x) = \phi(x, f(x))$ , or  $\phi$  étant continue est bornée sur tout compact du plan.

1. Traduire “ $f$  n'a pas d'asymptote verticale en  $b$ ” en terme de valeurs d'adhérence. Soit  $y_0$  une valeur d'adhérence de  $f$  en  $b$ . On veut montrer que  $\lim_b f = y_0$ .
2. On suppose d'abord, pour simplifier, que la fonction  $\phi$  est définie et bornée sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $y_0$  est valeur d'adhérence, on trouve un  $x_0$  “très proche de  $b$ ” (à préciser) tel que  $f(x_0) \in ]y_0 - \varepsilon/2, y_0 + \varepsilon/2[$ . Montrer qu'on peut choisir ce “très proche” de façon à ce que pour tout  $x \in [x_0, b[$ , on ait  $f(x) \in ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ .

Dans le cas général, le “très proche” de la question précédente doit être choisi en fonction de  $\phi(b, y_0)$ . Plus précisément, après avoir fixé  $\varepsilon > 0$ , il nous faut trouver un voisinage  $V = ]b - \eta, b + \eta[ \times ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$  de  $(b, y_0)$  tel que  $\phi$  est bornée sur  $V$  par  $\varepsilon/2\eta$ .

3. Expliquer comment on peut trouver un tel voisinage.
4. Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$ ,

- définie sur  $]b - \eta, b[$ ,
- dont le graphe rencontre  $]b - \eta, b[ \times ]y_0 - \varepsilon/2, y_0 + \varepsilon/2[$ ,
- et qui n'est pas contenu dans  $]b - \eta, b[ \times ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ .

Montrer que l'une des tangentes au graphe de  $g$  a une pente supérieure à  $\varepsilon/(2\eta)$  (en valeur absolue).

5. Rédiger la preuve complète.

---

En fait, ce principe marche encore lorsque l'équation  $y' = \Phi(x, y)$  n'est pas définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Voici deux énoncés dans ce sens : le premier lorsque l'équation n'est pas définie pour toutes les valeurs de  $x$  : il servira dans l'exercice 6.3 ; le second lorsqu'elle n'est pas définie pour toutes les valeurs de  $y$  : il servira dans l'exercice 6.8. On verra plus loin un énoncé plus général englobant ces deux-ci.

**Théorème.** *Supposons que  $\Phi(x, y)$  soit définie lorsque  $x \in ]a', b'[$  et  $y \in \mathbb{R}$  (et de classe  $C^1$  sur  $]a', b'[ \times \mathbb{R}$ ). Soit  $f$  une solution maximale définie sur un intervalle de vie  $I = ]a, b[$ . Si  $b < b'$  alors  $f$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $b^-$ .*

**Théorème.** *Supposons que  $\Phi(x, y)$  soit définie lorsque  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ]c, d[$  (et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times ]c, d[$ ). Soit  $f$  une solution maximale définie sur un intervalle de vie  $I = ]a, b[$ . Si  $b < +\infty$  alors  $f$  tend vers  $c$  ou  $d$  lorsque  $x$  tend vers  $b^-$ .*

## 2 Equations différentielles linéaires (I) : coefficients constants

(Sources : Demailly, Robinson, Arnold, Hubbard-West.)

On s'intéresse ici aux équations à coefficients constants (= autonomes) sans second membres. En coordonnées, on a un système de  $m$  équations différentielles couplées, dont les inconnues sont  $m$  fonctions  $x_1, \dots, x_m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On l'écrit de façon plus synthétique à l'aide de la matrice du système

$$x' = Ax$$

où  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . L'inconnue est alors une unique fonction  $x$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  ; on dit aussi que  $x$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^m$ , et  $x'(t)$  est le vecteur vitesse de la courbe au temps  $t$ . Une solution est donc une fonction  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , définie sur un intervalle  $I$ , dérivable, et vérifiant pour tout  $t$ ,  $\alpha'(t) = A\alpha(t)$ .

---

**Exercice 10.**— Donner une définition de la dérivée d'une courbe  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow E$  où  $E$  est un espace vectoriel normé. Que vaut la dérivée de la courbe  $\beta = \Phi \circ \alpha$  si  $\Phi$  est une application différentiable ? linéaire continue ? Comment s'exprime  $\alpha'(t)$  en coordonnées ?

---

Remarquons que l'exercice précédent permet de donner un sens à une équation différentielle dans un espace vectoriel réel quelconque ; un peu plus loin, nous aurons besoin d'équations différentielles dans  $\mathbb{C}^m$  et dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ .

**Questions :** 1) Comment résoudre ? Existence et unicité, mieux, formule explicite : exponentielle de matrice. 2) Comment se comportent les solutions ?

### 2.1 Remarques préliminaires

• La fonction nulle est solution. Si la matrice  $A$  est inversible, c'est la seule solution constante.

---

**Exercice 11.**— 1. Résoudre le problème en dimension 1 ( $m = 1$ ,  $A$  est une "matrice  $1 \times 1$ ").  
2. Résoudre le problème en dimension 2 avec une matrice  $A$  diagonale.

---

- Si  $A$  est diagonale, on a  $m$  équations indépendantes, on est ramené en dimension un.
- Comportement par changement de base

---

**Exercice 12.**— Soit  $\alpha$  une solution de l'EDO  $x' = Ax$ ,  $P$  une matrice inversible,  $\beta$  est la courbe  $\beta = P\alpha$ , trouver une EDO linéaire dont  $\beta$  est solution.

---

On va donc pouvoir utiliser la réduction matricielle. En particulier, si  $A$  est diagonalisable, on peut se ramener à un système diagonal.

---

**Exercice 13.**— Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= -6y \\ y' &= x + 5y. \end{cases}$$

---

## 2.2 Portraits de phase dans le plan

(Sources : Robinson, p102. Queffelec-Zuily, Demailly).

### Classification dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

**Lemme.** *Toute matrice réelle de taille 2 est semblable à l'un des modèles suivants :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 14.**— **1.** Démontrer le lemme (donner si possible une preuve élémentaire, n'utilisant pas les théorèmes de diagonalisation/trigonalisation). **2.** Caractériser les différentes classes de conjugaison à l'aide du déterminant et de la trace.

---

*Démonstration.* Si le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes, on est dans le premier cas. S'il a une racine double (nécessairement réelle), alors on est dans le premier cas si le sous-espace propre est de dimension 2, dans le deuxième cas si il n'est que de dimension 1. Il reste le cas où les deux racines sont complexes conjuguées (et non réelles). On diagonalise sur  $\mathbb{C}^2$  dans une base  $(v_1, \bar{v}_1)$ ; on vérifie que la base réelle  $(e_1 = \operatorname{Re}(v_1), e_2 = \operatorname{Im}(v_1))$  convient.

Le discriminant du polynôme caractéristique s'écrit  $\Delta(A) = \operatorname{Tr}(A)^2 - 4\operatorname{Det}A$ ; les trois cas correspondent à  $\Delta(A)$  strictement positif, nul ou strictement négatif.  $\square$

### Résolution

Le premier cas ne pose pas de problème.

Le second cas fait appel à la variation de la constante : la deuxième équation est découplée, elle a pour solution  $y(t) = y_0 e^{\lambda_1 t}$ ; en reportant dans la première équation on se retrouve avec une équation linéaire avec second membre, on cherche une solution sous la forme  $x(t) = c(t)e^{\lambda_1 t}$ .

Pour le dernier cas, en posant  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , l'équation devient  $z' = \lambda z$ , avec  $\lambda = a + ib$ . D'où  $z(t) = z_0 e^{\lambda t} = z_0 e^{at} e^{ibt}$ .

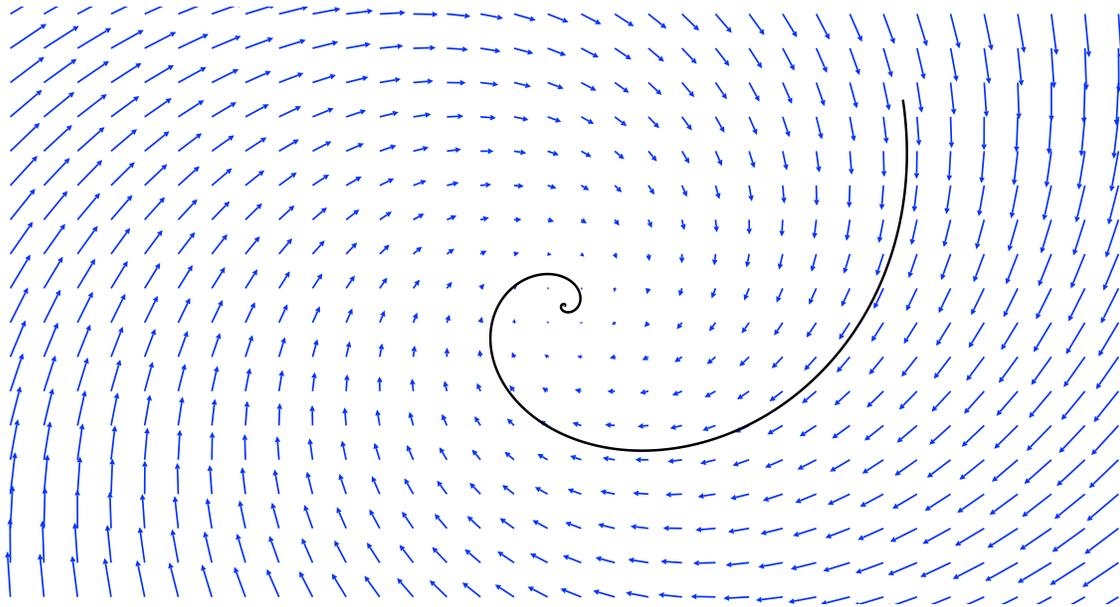
---

**Exercice 15.**— **1.** Déterminer, dans chacun des cas, la limite de  $\|(x(t), y(t))\|$  lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . **2.** Lorsque  $(x(t), y(t))$  tend vers  $(0, 0)$ , déterminer la limite de la coordonnée polaire  $\theta(t)$ .

---

### Dessins

*Préliminaire : dessiner une EDO.* L'application  $x \mapsto Ax$  est appelée *champ de vecteurs (linéaire)* sur  $\mathbb{R}^m$ . On dessine le champ de vecteurs en représentant, en chaque point  $x$  du plan (en pratique, en un nombre suffisant de points), le vecteur  $Ax$  d'origine  $x$  (et donc, d'extrémité  $x + Ax$ !).



L'équation différentielle  $x'(t) = Ax(t)$  signifie qu'en tout point de la courbe  $t \mapsto x(t)$ , le vecteur vitesse  $x'(t)$  est égal à  $Ax(t)$  : la vitesse de la courbe en chacun de ses points est donnée par le champ de vecteur en ce même point.

---

**Exercice 16.**— Esquisser, à la main, le dessin du champ de vecteur linéaire  $x \mapsto Ax$  pour les matrices simples suivantes :

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(on remarquera que la dernière matrice est un multiple d'une matrice de rotation).

---

Le portrait de phase d'une EDO est l'ensemble de ses solutions. En pratique, on dessine suffisamment de solutions pour donner l'idée du comportement de toutes.

On déduit du calcul fait plus haut les différents portraits de phase dans le plan (on ne traite que les cas où  $A$  est inversible) :

1. diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ 
  - a) vp de même signe (égales (exo) ou distinctes) : noeud stable ou instable (puit ou source).
  - b) vp de signes opposées : selle ou col.
2. vp réelles, non diagonalisable : noeud "exceptionnel" (variation de la constante). Exercice : dessiner le portrait de phase dans ce cas.
3. vp complexes. foyer stable ou instable si partie réelle non nulle, centre sinon.

Dans le cas général, le portrait de phase est l'image du portrait de phase de la matrice réduite, par l'application de changement de base.

---

**Exercice 17.**— Dessiner le portrait de phase de l'EDO  $x' = Ax$  où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 18.**— Discuter du comportement du ressort amorti, donné par l'EDO

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

selon les valeurs des constantes physiques  $m$  (masse),  $\alpha$  (coefficient de frottement),  $k$  (raideur). On transformera cette EDO d'ordre 2 en une EDO d'ordre 1 en dimension deux, en posant

$$X = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}.$$

---

## 2.3 Exponentielle de matrice

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit l'exponentielle de  $A$  par la formule :

$$\exp(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n.$$

---

**Exercice 19.**— Rappeler ce que signifie la formule précédente, en particulier pourquoi la série converge : se souvenir de l'espace vectoriel normé  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et de la propriété  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

---

---

**Exercice 20.**— Que vaut l'exponentielle de la matrice nulle ? L'exponentielle de l'identité ? D'une matrice diagonale ?

---

### Proposition.

1. *Invariance par conjugaison* :  $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$ .
2.  $e^A e^B = e^{A+B}$  lorsque  $A$  et  $B$  commutent.
3. La courbe  $t \mapsto e^{tA}$ , définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans l'espace vectoriel des matrices inversibles, est dérivable, et sa dérivée est  $t \mapsto Ae^{tA}$ .

---

**Exercice 21.**—

1. A l'aide de la deuxième propriété, montrer que l'exponentielle d'une matrice  $A$  quelconque est inversible, et donner son inverse.
  2. Montrer que si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $B$  commute avec l'exponentielle de  $A$ .
-

*Démonstration.*

1. Vient de ce que le conjugué de la puissance est égal à la puissance du conjugué.

2. Cette relation vient du théorème très général sur les séries produit, qui marche dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  comme dans  $\mathbb{C}$ . Comme il s'agit d'un résultat essentiel (même dans  $\mathbb{C}$ !), on en rappelle l'énoncé et la preuve.

**Théorème.** Soient  $(a_n), (b_n)$  deux suites dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  telle que les séries réelles positive

$$\sum \|a_n\|, \quad \sum \|b_n\|$$

convergent. Posons, pour chaque  $n$ ,

$$c_n = \sum_{p+q=n, p \geq 0, q \geq 0} a_p b_q.$$

Alors

1. la série  $\sum \|c_n\|$  converge, et donc  $\sum c_n$  converge aussi,

2. et on a

$$\left( \sum a_n \right) \left( \sum b_n \right) = \sum c_n.$$

*Démonstration.* On utilise une norme d'algèbre, ie vérifiant  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ . Pour le premier point, on a

$$\|c_n\| \leq \sum_{p+q=n} \|a_p\| \|b_q\|.$$

D'où

$$\sum_0^N \|c_n\| \leq \sum \|a_p\| \|b_q\| \leq \left( \sum_0^N \|a_n\| \right) \left( \sum_0^N \|b_n\| \right)$$

où la somme centrale porte sur les couples  $(p, q)$  appartenant au triangle  $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq N$ , tandis que le terme de droite est égal à une somme sur les couples appartenant au carré  $0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N$ . La convergence des deux séries de droites entraîne alors celle de gauche.

Pour le second point, appelons

$$C_n = \sum_{p+q=n, p \geq 0, q \geq 0} \|a_p\| \|b_q\| ;$$

d'après le premier point appliqué aux séries  $\sum \|a_n\|, \sum \|b_n\|$ , la série (à termes positifs) des  $C_n$  est convergente. On évalue alors

$$\left\| \sum_0^N c_n - \left( \sum_0^N a_n \right) \left( \sum_0^N b_n \right) \right\| = \left\| \sum a_p b_q \right\| \leq \sum \|a_p\| \|b_q\| \leq \sum_{N+1}^{2N} C_n \leq \sum_{N+1}^{+\infty} C_n$$

où les sommes centrales portent sur le triangle  $0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N, p + q > N$ . La dernière somme est le reste d'une série convergente. Tout ceci tend donc vers 0 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , ce qu'on voulait.  $\square$

3. La définition de l'exponentielle donne

$$e^{tA} = \text{Id} + tA + o(\|A\|)$$

d'où, en regardant la limite du taux d'accroissement, la valeur de la dérivée de  $e^{tA}$  en  $t = 0$ . On en déduit la valeur en  $t_0$  en écrivant

$$e^{(t_0+h)A} = e^{hA} e^{t_0A}.$$

$\square$

---

**Exercice 22.**— Donner un contreexemple à la formule  $e^A e^B = e^{A+B}$  lorsque  $A$  et  $B$  ne commutent pas.

---

## 2.4 Solutions de $x' = Ax$

**Théorème 2.1.** *Etant donné  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ , il existe une unique solution  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  à l'équation différentielle  $\dot{x} = Ax$  vérifiant la condition initiale  $x(0) = x_0$ . Cette solution est donnée par  $x(t) = e^{tA}x_0$ .*

Noter que, dans le contexte de ce chapitre, il n'y a pas d'explosion : toute solution maximale est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

---

**Exercice 23.**— Montrer que l'unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  est donnée par  $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ .

---

*Démonstration.* L'existence est donnée par les propriétés de l'exponentielle ; pour l'unicité, si  $x(t)$  est solution, on montre en dérivant que  $y(t) = e^{-At}x(t)$  est constante. Cette dérivation utilise l'exercice suivant. □

---

**Exercice 24.**— Soit  $t \mapsto M(t)$  et  $t \mapsto x(t)$  deux applications arrivant respectivement dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  et dans  $\mathbb{R}^m$ , que l'on suppose dérivables. Montrer que  $t \mapsto M(t)x(t)$  est dérivable, de dérivée  $t \mapsto M'(t)x(t) + M(t)x'(t)$  (indication : faire un DL à l'ordre 1).

---

---

**Exercice 25.**— 1. Montrer que la courbe  $t \mapsto e^{\lambda t}V$  est solution si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre et  $V$  vecteur propre associé.

2. Expliquer comment on retrouve les solutions dans le cas diagonal.

---

Nous allons maintenant voir comment calculer les exponentielles de matrice  $e^{tA}$  qui donnent les solutions de l'EDO  $x' = Ax$ .

### Réduction des matrices complexes (I)

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , toute matrice est trigonalisable. On peut être plus précis : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par bloc, chaque bloc  $B_i$  s'écrivant  $\lambda_i \text{Id} + N_i$  où  $N_i$  est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale. Voici une conséquence de ce résultat.

**Théorème.** *Toute matrice complexe  $A$  s'écrit  $P(D + N)P^{-1}$ , avec  $D$  diagonale,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$ .*

On en déduit une façon de calculer  $\exp(A)$ .

**Corollaire 2.2** (Forme des solutions). Soit  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une solution,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ . Chaque fonction  $\gamma_i$  est une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$t^k e^{at} \cos(bt), t^k e^{at} \sin(bt)$$

où  $a + ib$  est une valeur propre de  $A$ .

*Démonstration.* Chaque case de  $\exp(tN)$  est un polynôme en  $t$  (de degré  $\leq n$ ). Chaque case de  $\exp(tD + tN)$  s'obtient donc en multipliant un polynôme en  $t$  par  $e^{t(a+ib)}$  pour une certaine valeur propre  $\alpha + i\beta$ . En multipliant à droite et à gauche par les matrices constantes  $P$  et  $P^{-1}$ , on prend des combinaisons linéaires de telles fonctions : chaque case de  $\exp(tA)$  est donc une combinaison linéaire (à coefficients complexes) de fonctions du type  $t^k e^{t(a+ib)}$ .

D'autre part nous savons que  $\exp(tA)$  est une matrice réelle. Chaque case est égale à sa partie réelle, donc du type

$$\operatorname{Re} \left( \sum_j (x_j + iy_j) t^{k_j} e^{t(a_j + ib_j)} \right) = \sum_j t^{k_j} e^{ta_j} \operatorname{Re}((x_j + iy_j)(\cos(tb_j) + i \sin(tb_j)))$$

et

$$\operatorname{Re}((x_j + iy_j)(\cos(tb_j) + i \sin(tb_j))) = x_j \cos(tb_j) - y_j \sin(tb_j)$$

est du type voulu. Enfin, toute solution  $\gamma$  s'écrit  $t \mapsto \exp(tA)\gamma(0)$ , dont chaque coordonnée est une combinaison linéaire de case de  $\exp(tA)$ .  $\square$

## (2) Réduction des matrices complexes (II)

Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ . Soit  $\lambda_i$  une valeur propre, et  $m_i$  sa multiplicité (en tant que racine du polynôme caractéristique). On définit le sous-espace caractéristique (dont les éléments sont appelés vecteurs propres généralisés)

$$E_i = \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}.$$

**Théorème.** Chaque sous-espace caractéristique  $E_i$  est de dimension  $m_i$ . D'autre part, les sous-espace caractéristiques sont en somme directes. Autrement dit, il existe une base de vecteurs propres généralisés.

---

**Exercice 26.**— **1.** Montrer directement (sans utiliser l'exponentielle de matrice) que si  $v$  est un vecteur propre généralisé pour la valeur propre  $\lambda$ , alors la solution vérifiant  $x(0) = v$  est donnée par

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} t^j (A - \lambda \operatorname{Id})^j v.$$

(Aide : calculer  $x'(t)$  fait apparaître  $\lambda x(t) + (A - \lambda \operatorname{Id})(x(t) - \dots) = Ax(t)$ .)

**2.** En déduire une autre preuve du corollaire.

---

## 2.5 Puits et sources

On dira que la solution constante 0 est un *puits* si les parties réelles des valeurs propres sont  $< 0$ . Dans ce cas, le théorème sur la forme des solutions implique immédiatement que toute solution tend vers 0 (ce critère est connu sous le nom de *critère de Routh*). Le théorème suivant fait mieux.

**Théorème 2.3** (des puits linéaires). *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. toutes les vp de  $A$  ont une partie réelle  $< 0$  ;
2. pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^m$ , il existe deux constantes  $a > 0$  et  $C \geq 1$  telles que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  et  $t > 0$ ,

$$\|e^{tA}x_0\| \leq Ce^{-ta} \|x_0\| ;$$

3. il existe une norme euclidienne  $N_*$ , dite norme adaptée, et une constante  $a > 0$  telles que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  et  $t > 0$ ,

$$N_*(e^{tA}x_0) \leq e^{-ta} N_*(x_0).$$

En particulier, pour tout voisinage  $U$  de 0, il existe un voisinage  $V$  tel que pour toute condition initiale dans  $V$ , la solution correspondante reste dans  $U$  et tend vers 0 : on dit que l'origine est un point d'équilibre *asymptotiquement stable* (Liapunov 1892). On définit de façon analogue les *sources*, lorsque les parties réelles des valeurs propres sont toutes strictement positives, et on peut bien sûr énoncer un théorème symétrique pour les sources. (Une matrice  $A$  définit un puit si et seulement si  $-A$  définit une source, ce qui permet de déduire formellement les propriétés des sources des propriétés des puits).

---

**Exercice 27.**— **1.** Montrer le théorème dans le cas où  $A$  est diagonale. **2.** Montrer le théorème dans le cas où  $A$  est diagonalisable. **3.** (\*) Donner un exemple montrant que, lorsque les trois affirmations équivalentes du théorème sont satisfaites, la norme euclidienne canonique n'est pas toujours une norme adaptée.

---

*Démonstration.* S'il y a une valeur propre de partie réelle  $\alpha \geq 0$ , on a une solution complexe  $z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$ , sa partie réelle est une solution réelle qui ne tend pas vers 0. Ceci montre que (2) ou (3) implique (1).

Supposons maintenant (1) que toutes les valeurs propres ont des parties réelles  $< 0$ , elles sont donc toutes  $< -a$  où  $a$  est un réel  $> 0$ . D'après la section sur le calcul de  $e^{tA}$ , tous les coefficients de  $M(t) = e^{tA}$  tendent vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  : la norme "max des coefficients" tend donc vers 0. Par équivalence des normes sur  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ , la norme d'opérateur de

$$\|M(t)\| := \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|M(t)x_0\|}{\|x_0\|}$$

tend aussi vers 0. En particulier, cette norme est bornée par une constante  $C$ . Ceci donne (2).

Supposons maintenant que (2) est vérifiée. On considère une norme euclidienne  $\|\cdot\|$ , et  $a$  et  $C$  les constantes associées. Soit  $0 < a' < a$ . Posons maintenant

$$N_*(x) := \sqrt{\int_0^\infty e^{2a's} \|e^{sA}x\|^2 ds}.$$

Grâce à (2), l'intégrale converge. Cette formule définit alors une autre norme euclidienne (vérifier en exhibant la forme bilinéaire symétrique définie positive associée). On évalue la quantité  $\|e^{tA}x_0\|_*$  à l'aide du changement de variable  $s' = s + t$ , et on obtient

$$N_*(e^{tA}x_0) \leq e^{-at}N_*(x_0)$$

comme voulu. □

Alternativement, on peut construire la norme adaptée à l'aide de la forme de Jordan de la matrice  $A$ , en généralisant l'argument donné dans le cas diagonalisable.

---

**Exercice 28.**— (cf TD) Donner un critère sur la matrice  $A$  pour que toutes les solutions soient des fonctions bornées. On pourra commencer par le cas où 0 est la seule valeur propre (matrice nilpotente).

---

### 3 Equations différentielles linéaires (II)

On considère ici l'équation différentielle linéaire générale

$$(1) \quad x' = A(t)x + B(t),$$

où les applications  $A$  et  $B$  sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^m$  respectivement. On cherche des solutions, c'est-à-dire des applications  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dérivables et satisfaisant l'équation. Tout ce qu'on va dire est donc valable en particulier dans le contexte du chapitre précédent, qui correspondait au cas où l'application  $A$  est constante et l'application  $B$  est nulle.

**Dimension un** Exemple de l'épargne : si l'unité de temps est l'année,  $x' = ax$  représente l'évolution d'une somme d'argent placé à un taux  $e^a$ ;  $x' = a(t)x$  représente un taux variable,  $x' = a(t)x + b(t)$  représente un compte avec taux variable et dépôts et retraits d'argents.

Les solutions de l'EDO  $x' = a(t)x$  sont données par

$$t \mapsto x_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

En utilisant la variation de la constante (voir plus bas), on en déduit une formule pour les solutions de l'EDO  $x' = a(t)x + b(t)$ . Cette démarche se généralise mal, en général on ne sait pas ramener cette équation à un calcul d'intégrale.

#### 3.1 Structure des solutions

**Théorème 3.1.** (*Cauchy-Lipschitz linéaire*) *On suppose que  $A$  et  $B$  sont des applications continues sur l'intervalle  $I$ . Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , il existe une unique solution  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  et satisfaisant à la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ .*

Par rapport au théorème général, le point important, dû à la linéarité, est l'existence d'une solution définie sur l'intervalle  $I$  tout entier.

*Démonstration.* Plus tard, ceci sera une conséquence du théorème général d'existence et d'unicité, de l'existence de solution maximales, et du théorème de non-explosion pour voir que les solutions maximales sont définies sur  $I$  tout entier. On peut aussi faire une preuve qui fournit directement une solution définie sur  $I$ , avec la méthode de Picard (voir TD).  $\square$

En supprimant le terme  $B(t)$  dans l'équation  $x' = A(t)x + B(t)$ , on obtient l'équation sans second membre (ou homogène) associée :

$$(0) \quad x' = A(t)x.$$

**Corollaire 3.2.** (*Principe de superposition*) Fixons  $t_0 \in I$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène (0) forme un espace vectoriel de dimension  $m$ , et l'application  $\text{Eval}_{t_0} : x \mapsto x(t_0)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathbb{R}^m$ .

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (1) forme un espace affine de dimension  $m$ ,

$$\mathcal{S} = \{\bar{x} + x \mid x \in \mathcal{S}_0\}$$

pour toute solution (dite "solution particulière")  $\bar{x}$  de l'équation (1).

*Démonstration.* Facile. □

**Exercice 29.**— Décrire  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}$  pour l'équation  $x' = x + e^t$  (que l'on a déjà rencontrée au chapitre précédent, dans le cadre des matrices  $2 \times 2$  triangulaires).

## 3.2 Résolvante

On étudie ici l'équation homogène (0)  $x' = A(t)x$ . On considère un réel  $t_0$  fixé. D'après ce qui précède, l'ensemble des solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$  de dimension  $m$  dans l'espace des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^m$ , et l'application  $\text{Eval}_{t_0} : f \mapsto f(t_0)$  est un isomorphisme entre ce sous-espace et  $\mathbb{R}^m$ . Notons  $(e_i)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , et pour chaque  $i = 1, \dots, m$ , considérons la solution  $a_i$  de l'EDO vérifiant la condition initiale  $a_i(t_0) = e_i$ ; autrement dit,  $(a_i)_{i=1, \dots, m}$  est l'image de la base  $(e_i)$  par l'isomorphisme  $\text{Eval}_{t_0}^{-1}$ , c'est donc une base de  $\mathcal{S}_0$ . Pour n'importe quelle condition initiale  $x_0 = \sum_i x_{0,i} e_i$ , la solution correspondante est obtenue par combinaison linéaire des  $a_i$ , plus précisément elle est donnée par la formule

$$x(t) = \sum_i x_{0,i} a_i(t) = R_{t_0}(t) x_0$$

où  $R_{t_0}(t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$  est la matrice dont les colonnes sont les  $a_i(t)$ . Cette matrice, qui dépend de  $t_0$  et de  $t$ , est appelée *résolvante* de l'équation linéaire homogène (0).

**Exercice 30.**— — Que vaut  $R_{t_0}(t)$  dans le cas d'une équation autonome (à coefficients constants)  $x' = Ax$  ?

– Exprimer  $R_{t_0}(t)$  (dans le cas général) à l'aide des isomorphes dévaluation  $\text{Eval}_{t_0}$ . (Aide :  $R_{t_0}(t)$  est la matrice de l'application linéaire qui à une condition initiale  $x_0$  associe la valeur de la solution au temps  $t$ ).

Résumons les propriétés de la résolvante.

**Proposition 3.3.** (*Propriétés de la résolvante*)

- (0)  $R_{t_0}(t)$  est une application linéaire inversible.
- (1)  $R_{t_0}(t_0) = ? \dots$
- (2) *Composition* :  $R_{t_1}(t_2) R_{t_0}(t_1) = \dots ?$
- (3) L'application  $M : t \mapsto R(t, t_0)$  est la solution de l'équation différentielle linéaire homogène suivante, dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  :

$$M'(t) = A(t)M(t)$$

avec la condition initiale  $M(t_0) = Id$ .

(4) La solution de l'équation (0) vérifiant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  est donnée par  $t \mapsto R(t, t_0)x_0$ . Ses colonnes forment une base de l'espace des solutions.

---

**Exercice 31.**— Compléter les trous de l'énoncé, puis démontrer les propriétés. Pour la seconde, utiliser l'écriture de la résolvante à l'aide des isomorphismes dévaluation.

---

---

**Exercice 32.**— 1. Montrer que si  $x_1, \dots, x_m$  sont  $m$  solutions, et  $t_0, t_1$  deux réels quelconque, alors  $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$  sont linéairement indépendants si et seulement si  $x_1(t_1), \dots, x_m(t_1)$  le sont.

---

---

**Exercice 33.**— (cf le livre de Demailly). On suppose que les matrices  $A(t)$  commutent deux à deux. Montrer que la résolvante est alors donnée par la formule

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right).$$

Ceci généralise la formule en dimension un.

---

La résolvante peut être obtenue comme une série normalement convergente, ce qui permet de montrer le théorème d'existence, et la dépendance continue (et même lisse) par rapport aux paramètres. Cette série est celle qui apparaît dans la preuve par le théorème de Picard.

### 3.3 Wronskien

(Wronski 1810). En général, il n'y a pas de formule fermée permettant de calculer la résolvante. Cependant, son déterminant vérifie une équation différentielle linéaire en dimension 1, et par conséquent il est toujours donné par une formule intégrale.

**Proposition 3.4.** (Théorème de Liouville) Le déterminant  $\Delta(t) = \text{Det}(R(t, t_0))$  vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\Delta'(t) = \text{Tr}(A(t))\Delta(t).$$

**Lemme 3.5.** Le déterminant est une application polynomiale de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{R}$ , en particulier il est de classe  $C^\infty$ . Sa différentielle en l'identité est l'application  $A \mapsto \text{Tr}(A)$ . En particulier, pour tout  $A$ , on a le développement limité

$$\text{Det}(Id + hA) = 1 + h\text{Tr}(A) + o(h).$$

*Démonstration du lemme.* Comme l'application déterminant est de classe  $C^\infty$ , on sait qu'elle est différentiable en tout point de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . Pour trouver sa différentielle  $L$  en l'identité, il suffit alors de calculer ses dérivées partielles dans une base de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . Prenons la base canonique constituée des  $m^2$  matrices  $e_{ij}$  contenant des zéros partout sauf un "1" en case  $(i, j)$ . on calcule facilement  $\text{Det}(Id + he_{ij})$  et on en déduit  $L(e_{ij})$ . On constate ensuite que  $L(e_{ij}) = \text{Tr}(e_{ij})$  pour tout  $(i, j)$ , d'où  $L = \text{Tr}$  par linéarité.  $\square$

---

**Exercice 34.**— Montrer directement le développement limité  $\text{Det}(\text{Id} + hA) = 1 + h\text{Tr}(A) + o(h)$ . Pour cela, dans la formule générale du déterminant (somme portant sur toutes les permutations de  $\{1, \dots, n\}$ ...) donnant  $\text{Det}(\text{Id} + hA)$ , isoler le terme correspondant à la permutation identité. Le terme restant est multiple de  $h^2$ , parce que toute permutation non identique bouge au moins deux indices.

---

**Exercice 35.**— (Preuve de la proposition.)

1. A l'aide du lemme, donner un DL à l'ordre 1 de  $\Delta(t_0 + h)$ , en déduire  $\Delta'(t_0)$ .
  2. En utilisant la propriété  $R(t, t_0) = R(t, t_1)R(t_1, t_0)$ , en déduire  $\Delta'(t_1)$  pour  $t_1$  quelconque.
- 

On définit le *wronskien* d'un système de  $m$  solutions  $x_1, \dots, x_m$  comme l'application  $w : t \mapsto \text{Det}(x_1(t), \dots, x_m(t))$ . Par définition de la résolvante et multiplicativité du déterminant, on a, pour tout  $t$ ,

$$w(t) = \text{Det}(R(t, t_0))\text{Det}((x_1(t_0), \dots, x_m(t_0))) = \Delta(t)\text{Det}((x_1(t_0), \dots, x_m(t_0))).$$

Le calcul du déterminant de la résolvante fournit donc la valeur du wronskien de n'importe quel système de solutions. Rappelons que le déterminant des  $m$  vecteurs  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  s'interprète comme le volume  $m$ -dimensionnel du parallélépipède

$$\left\{ \sum a_i x_i(t) \mid a_i \in [0, 1] \right\}.$$

La fonction  $w(t)$  représente donc l'évolution de ce volume au cours du temps.

### Remarques

- Dans le cas  $A$  constant, en un temps  $t$ , ce volume est multiplié par  $e^{t\text{Tr}(A)}$ .
- Lorsque la trace de  $A(t)$  est nulle pour tout  $t$ , le déterminant  $\Delta(t)$  est constant, on dit que “le flot préserve le volume”. La préservation du volume a des conséquences intéressantes. Par exemple, si on a un point fixe asymptotiquement stable au sens de Lyapounov, alors le volume est contracté :

---

**Exercice 36.**—(Arnold, p195)

1. Dans l'EDO  $x' = A(t)x$ , supposons que la solution constante 0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov : pour tout voisinage  $U$  de 0, il existe un voisinage  $V$  tel que pour toute condition initiale dans  $V$ , la solution correspondante reste dans  $U$  et tend vers 0. Montrer que le wronskien de tout système de  $m$  solutions tend vers 0.
  2. On considère l'équation de la balançoire,  $x'' - f(t)x = 0$ . Mettre l'équation sous la forme d'un système linéaire d'ordre 1, et montrer que le wronskien de ce système est constant. En déduire que la position d'équilibre 0 n'est pas asymptotiquement stable, quelle que soit la fonction  $f$ .
-

### 3.4 Equation différentielle linéaire d'ordre supérieur

Toute équation différentielle d'ordre  $m$  peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1. Lorsque l'équation initiale est linéaire, l'EDO d'ordre 1 obtenue l'est aussi. Explicitons ceci dans le cas de l'EDO linéaire d'ordre  $m$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$(*) \quad y^{(m)}(t) + a_m(t)y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y(t) + a_0(t) = 0.$$

Les  $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont donc des fonctions données définies sur un intervalle ouvert  $I$ , et l'inconnue  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $m$  fois dérivable définie sur un intervalle ouvert  $J$  inclus dans  $I$ .

---

**Exercice 37.**—

1. Soit  $y$  une solution de (\*). Expliciter  $A(t), B(t)$  de façon à ce que l'application

$$x : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

soit une solution de l'EDO (\*\*)  $x' = Ax + B$ , qui est une EDO du premier ordre dans  $\mathbb{R}^m$ .

2. Réciproquement, expliquer comment passer d'une solution  $x$  de (\*\*) à une solution  $y$  de (\*).

3. En déduire un théorème d'existence et d'unicité pour les EDO du type (\*).

---

### 3.5 Variation de la constante

(Lagrange 1775, dans le cadre des équations d'ordre  $n$ .) L'un des intérêts de la résolvante, c'est qu'elle permet une écriture concise du principe de variation de la constante.

On revient à l'équation (1)  $x' = A(t)x + B(t)$ . Le principe consiste à chercher les solutions de l'équation sous la forme  $t \mapsto R_{t_0}(t)y(t)$  (la variable est  $t$ , le réel  $t_0$  étant fixé,  $y$  est une nouvelle fonction inconnue); des termes se simplifient, ce qui conduit à une simple recherche de primitive (en supposant connue la résolvante). Autrement dit, de façon plus concrète, cela revient à **chercher les solutions de (1) comme des combinaisons linéaires à coefficients variables (c'est-à-dire dépendant de  $t$ ) d'une base de solutions de l'équation homogène (0)**.

---

**Exercice 38.**—

1. Par cette méthode, écrire la formule intégrale obtenue pour les solutions de l'EDO (1).

2. Expliciter le cas particulier où  $A(t)$  est constante.

3. Expliciter le cas de la dimension un (cf début de la section).

4. Expliciter la méthode de la variation de la constante pour une équation d'ordre  $m$ ,  $x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x(t) + a_0(t) = 0$ .

---

Exercice supplémentaire : théorie élémentaire des perturbations, Viterbo p75.

## Le monde non-linéaire (D'après Hubbard-West)

On peut diviser le monde des équations différentielles (EDO) en deux : le monde familier, qui correspond en gros aux équations linéaires, et le monde étrange.

### Le monde linéaire

La plus simple :  $x' = ax$ . Plus généralement,  $x' = a(t)x + b(t)$ , ou bien  $x' = Ax$  en dimension supérieure. La caractéristique principale : on sait exprimer les solutions avec des formules.

### Le monde étrange

Exemple 1. Newton (Principes mathématiques de la philosophie naturelle, 1687) : loi de la dynamique et loi de la gravitation. Ceci permet de modéliser le système solaire par une EDO. Cette EDO est non linéaire : on peut résoudre le problème des deux corps (ce qu'a fait Newton), mais pas au-delà. Exemples de solutions complexes (animation). Hors de portée de ce cours...

Exemple 2 : requins et sardines (Volterra 192.) En l'absence d'interactions  $x' = ax$  et  $y' = -by$  ; le nombre de rencontres est proportionnelle à  $xy$ , on obtient

$$\begin{aligned}x' &= ax - cxy \\y' &= -by + dxy\end{aligned}$$

On ne peut pas résoudre, mais on sait néanmoins décrire le comportement qualitatif des solutions (cf TD). Et déjà, dire qu'elles existent !

Exemple 3 : petites oscillations du pendule. On ne sait pas résoudre l'équation  $y'' = \sin(y)$ . On peut linéariser, et espérer que l'équation linéarisée décrit le comportement des petites oscillations, mais comment le justifier ?

Vocabulaire : EDO/EDP. autonome ou pas, ordre un ou supérieur. Passage non-autonome/autonome ; passage ordre supérieur à ordre 1 (cf TD). Conclusion : on s'intéresse principalement aux équations autonomes d'ordre un.

## 4 Existence de solutions : le théorème de Cauchy-Peano

Nous quittons maintenant le monde linéaire pour passer à la théorie générale des EDO. Nous allons montrer des théorèmes d'existence et d'unicité locales, et de dépendance par rapport à un paramètre. Nous suivons principalement le livre de Demailly.

Le problème : on considère  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application **continue**. On considère l'EDO

$$(1) \quad x' = X(t, x).$$

Définition d'une solution : c'est une fonction  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  (une courbe) définie sur un certain intervalle  $I$ , dérivable sur  $I$ , telle que pour tout  $t \in I$

$$(t, \gamma(t)) \in U \text{ et } \gamma'(t) = X(\gamma(t), t).$$

NB : l'application  $X$  est considérée comme un champ de vecteurs dépendant du temps; autrement dit, ce qui a du sens, c'est le vecteur  $X(x, t)$  d'origine  $x$  : il indique la vitesse d'une courbe solution passant au point  $x$  au temps  $t$ .

---

**Exercice 39.**— Montrer que si  $X$  est de classe  $C^k$ , toute solution est de classe  $C^{k+1}$ .

---

On suppose à partir de maintenant que  $X$  est continue, et on fixe  $(t_0, x_0) \in U$ . On va montrer que le problème de Cauchy a toujours une solution :

**Théorème 4.1** (Peano 1890, Arzela 1895). *Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $t_0$  et une solution  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui vérifie la condition initiale  $\gamma(t_0) = x_0$ .*

On va utiliser la version intégrale du problème. Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant  $t_0$ , et  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  une courbe.

**Lemme 4.2.** *La courbe  $\gamma$  est solution du problème (1) avec condition initiale  $\gamma(t_0) = x_0$  si et seulement si, pour tout  $t$  dans  $I$ ,*

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, \gamma(s)) ds.$$

---

**Exercice 40.**— Vérifier le lemme.

---

### 4.1 Lemme d'extension

Essentiellement, le lemme suivant dit que toute fonction continue définie sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  s'étend en une application continue à support compact.

**Lemme** (Lemme d'extension). *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $K, K'$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  inclus dans  $U$ , avec  $K \subset \text{Int}(K')$ . Alors il existe une application continue  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

1.  $\bar{f}|_K = f|_K$ ,
2.  $\bar{f}|_{\mathbb{R}^n \setminus K'} = 0$ .

De plus, si  $f$  est de classe  $C^r$  pour un entier  $r$ , alors  $\bar{f}$  peut être choisie de classe  $C^r$ .

Voici comment nous allons utiliser ce lemme pour démontrer le théorème d'existence de Cauchy-Peano. On considère le champ de vecteurs  $X$  intervenant dans l'EDO, et une condition initiale  $(t_0, x_0) \in U$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que la boule de centre  $(t_0, x_0)$  et de rayon  $\varepsilon$  soit dans  $U$ , et posons

$$K = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{3}}((t_0, x_0))}, \quad K' = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}((t_0, x_0))}.$$

En appliquant le lemme à l'application  $X$ , on obtient une application continue  $\bar{X}$ , définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , à support compact, et qui coïncide avec  $X$  en restriction à  $K$ .

Supposons maintenant qu'on ait démontré l'existence d'une solution  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  pour l'EDO modifiée  $x' = \bar{X}(t, x)$  vérifiant la condition initiale  $\gamma(t_0) = x_0$ . La condition initiale est dans l'intérieur de  $K$ . Par continuité de  $\gamma$ , on en déduit qu'il existe un intervalle ouvert  $I' \subset I$ , contenant  $t_0$ , tel que

$$\forall t \in I', \quad (t, \gamma(t)) \in K.$$

Puisque  $\bar{X}$  et  $X$  coïncident sur  $K$ , on en déduit que la restriction  $\gamma|_{I'}$  vérifie l'EDO  $x' = X(t, x)$ . La conclusion de ce paragraphe est la suivante : *pour démontrer le théorème de Cauchy-Peano, il suffit de se restreindre au cas où le champs de vecteurs  $X$  est défini sur  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et à support compact*. Dans toute la suite, nous nous plaçons sous cette hypothèse supplémentaire.

*Preuve du lemme d'extension.* Il suffit de construire une fonction  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , qui vaut 1 sur  $K$  et 0 en dehors de  $K'$ . En effet, on obtiendra alors  $\bar{f}$  en posant  $\bar{f}(x) = f(x)\Phi(x)$  pour tout  $x$  dans  $K'$ , et 0 pour tout  $x$  hors de  $K'$ .

Voici une première construction si on veut seulement avoir  $\Phi$  continue. On note  $d$  une distance sur  $\mathbb{R}^n$  définissant la bonne topologie (par exemple la distance euclidienne). On remarque que, pour toute partie  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'application

$$d_E : x \mapsto d(x, E) := \inf\{d(x, y) \mid y \in E\}$$

est continue sur  $\mathbb{R}^n$  (vérifier!). On bricole alors la fonction  $\Phi$  à l'aide de  $\Phi_1 = d_{\mathbb{R}^2 \setminus K'}$  et  $\Phi_2 = d_K$ , par exemple en posant

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}.$$

Cette fonction est définie partout, car  $K$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus K'$  étant disjoints, le dénominateur ne s'annule jamais. Elle vaut 1 sur  $K$  et  $-1$  hors de  $K'$ . On obtient la fonction  $\Phi$  recherchée en lui ajoutant 1 et en divisant par deux.

Voici une deuxième construction pour obtenir une fonction  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  : en gros, nous allons partir de la fonction caractéristique de  $K$ , qui vaut bien 1 sur  $K$  et 0 hors de  $K'$ , mais qui n'est pas lisse (même pas continue!), et nous allons la "lisser" par convolution ; si la convolution se fait avec une assez bonne approximation de l'unité, la fonction obtenue aura toutes les propriétés voulues. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \notin K'\}.$$

C'est un réel strictement positif (pourquoi?). Soit  $K_\varepsilon$  l' $\varepsilon$ -voisinage de  $K$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  dont la distance à  $K$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$  (ou encore la réunion des boules fermées de rayons  $\varepsilon$  centrées en un point de  $K$ ). C'est un ensemble compact qui contient  $K$ ; il est inclus dans  $K'$ , mieux : tout point en dehors de  $K'$  est à distance au moins  $\varepsilon$  de  $K_\varepsilon$  (vérifier ceci).

Soit maintenant  $\phi_\varepsilon$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , à support dans la boule  $B(0, \varepsilon)$  de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ , et d'intégrale 1 (une "approximation de l'unité"). Une telle application peut être construite à l'aide de fonctions du type  $t \mapsto e^{-\frac{1}{t}}$  dont toutes les dérivées successives s'annulent en 0. On obtient alors  $\Phi$  en posant

$$\Phi(x) = \mathbf{1}_{K_\varepsilon} \star \phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_\varepsilon}(x-t)\phi_\varepsilon(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_\varepsilon}(t)\phi_\varepsilon(x-t)dt$$

où  $\mathbf{1}_{K_\varepsilon}$  désigne la fonction caractéristique de  $K_\varepsilon$ . L'intégrale est bien définie, puisque la fonction à intégrer est lisse et à support compact. On vérifie facilement que  $\Phi$  vaut 1 sur  $K$  et 0 hors de  $K'$  (utiliser les propriétés de  $K_\varepsilon$ ). Il est classique que  $\Phi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  : dans la dernière forme intégrale ci-dessus, la fonction à intégrer dépend de façon lisse du paramètre  $x$ , et on applique les théorèmes standard sur les intégrales à paramètres (voir le cours d'intégration).  $\square$

## 4.2 Méthode des polygones d'Euler (1768)

A partir de maintenant, on considère donc un champ de vecteurs  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est continu et à support compact. On se donne  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ . On va construire une courbe  $\gamma$  définie sur l'intervalle  $\bar{I} = [t_0 - 1, t_0 + 1]$  qui est solution de l'EDO sur l'intervalle  $I = ]t_0 - 1, t_0 + 1[$ . Puisque  $X$  est à support compact, le nombre  $M = \sup \|X\|$  est bien défini ( $\|\cdot\|$  désigne ici la norme définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  par  $\|(t, x)\| = |t| + \|x\|_e$  où  $\|x\|_e$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^m$ ).

L'idée : en utilisant la méthode d'Euler, on va construire des courbes  $\gamma_N$  qu'on voit comme des "solutions approchées" de l'équation. Le théorème d'Ascoli permettra d'extraire de la suite  $(\gamma_N)$  une sous-suite convergeant uniformément vers une courbe  $\gamma$ . Cette courbe sera une solution de l'équation.

On se fixe un entier  $N > 0$ , et on applique la méthode d'Euler de pas  $1/N$ . La méthode d'Euler consiste à construire une "solution approchée" qui est affine par morceaux : au temps  $t_0$ , on part du point  $x_0$ , on se déplace à vitesse constante égale au vecteur  $X(t_0, x_0)$  pendant un (petit) intervalle de temps  $1/N$ ; on arrive ainsi au temps  $t_1$  à un nouveau point  $x_1$ , à ce moment on modifie la trajectoire pour adopter la vitesse donnée par  $X(t_1, x_1)$  pendant un intervalle de temps  $1/N$ , et ainsi de suite jusqu'au temps  $t_0 + 1$  ( $N$  coups, donc). On obtient ainsi une courbe continue et affine par morceaux. Noter que, pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ , on a  $\gamma'_N(t) = X(t_i, \gamma_N(t_i))$ . On applique la même méthode dans le passé pour obtenir finalement une courbe  $\gamma_N : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

---

**Exercice 41.**— Ecrire la construction précise.

---

## 4.3 Extraction

**Lemme 4.3.** *Toutes les courbes  $\gamma_N$  sont  $M$ -lipschitziennes.*

---

**Exercice 42.**— Démontrer le lemme. On montrera l'inégalité  $\|\gamma_N(t) - \gamma_N(t')\| \leq M|t - t'|$  d'abord lorsque  $t$  et  $t'$  font partie du même intervalle de la subdivision utilisée pour définir  $\gamma_N$ , puis on en déduira le cas général.

---

On fait maintenant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , ce qui veut dire qu'on applique la méthode d'Euler avec des pas qui tendent vers 0. Le lemme permet d'appliquer le théorème d'Ascoli (section 4.6) : il existe une application continue  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est la limite uniforme d'une suite extraite  $(\gamma_{N_k})$ . Nous allons maintenant démontrer que  $\gamma$  est solution de l'EDO.

---

**Exercice 43.**— Expliquer précisément comment on applique le théorème d'Ascoli (théorème 4.6 ci-dessous).

---

## 4.4 Majoration de l'erreur

Le champ  $X$ , étant continu et à support compact, est uniformément continu : soit  $w_X$  un module de continuité qui est une fonction croissante (voir la section 4.7) : on a

- $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_X(\delta) = 0$ , et
- pour tout  $t, t', x, x'$ ,

$$\|X(t, x) - X(t', x')\| \leq w_X(|t - t'| + \|x - x'\|).$$

**Lemme 4.4.** *Pour tout entier  $N > 0$  et tout  $t \in I$ ,*

$$\|\gamma'_N(t) - X(t, \gamma_N(t))\| < w_X\left(\frac{M+1}{N}\right).$$

On exprime cette inégalité en disant que  $\gamma_N$  est une solution  $\varepsilon$ -approchée avec  $\varepsilon = w_X\left(\frac{M+1}{N}\right)$ .

---

**Exercice 44.**— Démontrer le lemme. On utilisera le fait que la vitesse  $\gamma'_N(t)$  de la solution approchée d'Euler est, d'après la méthode d'Euler, égale à la valeur du champ en un certain point.

---

## 4.5 Solution

**Lemme 4.5.** *La courbe  $\gamma$  est solution de l'équation.*

*Démonstration.* D'après la version intégrale du problème (lemme 4.2), le problème revient à montrer qu'on a, pour tout  $t \in I$ ,

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, \gamma(s)) ds.$$

Pour ceci, on va faire tendre  $k$  vers  $+\infty$  à partir de l'égalité, valable pour  $t$  fixé et pour tout  $k$  (toujours d'après le lemme 4.2),

$$\gamma_{N_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \gamma'_{N_k}(s) ds$$

Lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  le membre de gauche tend vers  $\gamma(t)$ , il reste à voir la convergence du membre de droite. On compare  $\gamma'_{N_k}(s)$  à  $X(s, \gamma_{N_k}(s))$  en utilisant la majoration de l'erreur (section précédente), et ce dernier terme à  $X(s, \gamma(s))$  en utilisant la convergence uniforme de  $(\gamma_{N_k})$  vers  $\gamma$  (utiliser le module de continuité). On en déduit la convergence, et l'égalité intégrale recherchée.  $\square$

---

**Exercice 45.**— Rédiger les détails.

---

## 4.6 Appendice I : le théorème d'Ascoli (1843-1896)

Soient  $Y, Z$  deux espaces métriques compacts,  $k$  fixé. On considère l'espace  $\mathcal{C}(Y, Z)$  des fonctions continues de  $Y$  dans  $Z$ , muni de la distance uniforme définie par

$$d_\infty(f, g) = \text{Sup}\{d(f(y), g(y)), y \in Y\}.$$

Soit  $k > 0$ . Une application  $f : Y \rightarrow Z$  est *k-lipschitzienne* si, pour tous  $y, y' \in Y$ , on a  $d(f(y), f(y')) \leq kd(y, y')$ . Toute application lipschitzienne étant continue, l'ensemble  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  des application *k-lipschitziennes* de  $Y$  dans  $Z$  est un sous-espace de  $\mathcal{C}(Y, Z)$ .

**Théorème 4.6.** *Pour tout k fixé, L'ensemble  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  est un espace métrique compact : de toute suite dans  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  on peut extraire une sous-suite qui converge dans  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  pour la distance uniforme.*

---

**Exercice 46.**— Construire une suite d'éléments de  $\mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$  qui n'admet aucune sous-suite convergente.

---

La preuve utilise les lemmes suivants.

**Lemme 4.7.** *L'espace métrique  $\mathcal{C}(Y, Z)$  est complet. L'espace  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  est fermé dans  $\mathcal{C}(Y, Z)$ , il est donc également complet.*

**Lemme 4.8.** *Pour tout espace métrique compact  $Y$ , il existe une suite  $(y_p)_{p \geq 0}$  dense dans  $Y$ .*

Pour démontrer le premier lemme, on considère une suite de Cauchy  $(f_n)$  dans  $\mathcal{C}(Y, Z)$ ; pour tout  $y$ , la suite  $(f_n(y))$  est de Cauchy dans  $Z$ , qui est compact donc complet, elle converge donc vers un nombre que l'on appelle  $f(y)$ , ce qui définit une fonction  $f$  de  $Y$  dans  $Z$ . On montre ensuite que la convergence est uniforme, et que la limite est continue. Pour montrer que  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  est fermé, on utilise la définition d'une fonction *k-lipschitzienne* pour exprimer cet espace comme une intersection d'espaces fermés. Pour le second lemme, on commence par considérer un recouvrement fini  $\{B_1, \dots, B_{k_1}\}$  de  $Y$  par des boules de rayon 1 (un tel recouvrement existe par compacité). Puis un deuxième recouvrement fini  $\{B_{k_1+1}, \dots, B_{k_1+k_2}\}$  par des boules de rayon  $\frac{1}{2}$ . Puis un troisième par des boules  $\{B_{k_1+k_2+1}, \dots, B_{k_1+k_2+k_3}\}$  de rayon  $\frac{1}{3}$ , etc.. Il suffit ensuite de choisir, pour chaque entier positif  $p$ , un point  $x_p$  dans la boule  $B_p$ , pour fabriquer une suite  $(x_p)$  dense dans  $Y$ . (Pour plus de détails, se reporter à un cours de topologie).

*Preuve du théorème d'Ascoli.* Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\text{Lip}_k(Y, Z)$ . Soit  $(y_p)$  une suite dense dans  $Y$ , fournie par le second lemme. Par le procédé diagonal (classique), en utilisant la compacité de  $Z$ , on construit une extraction  $\phi(n)$  telle que, pour tout  $p \geq 0$ , la suite  $(f_{\phi(n)}(y_p))_{n \geq 0}$  converge : pour cela on extrait une première suite  $(\phi_0(n))$  telle que  $(f_{\phi_0(n)}(y_0))_{n \geq 0}$  converge, de cette suite on extrait une deuxième suite  $\phi_0 \circ \phi_1(n)$  telle que  $(f_{\phi_0 \circ \phi_1(n)}(y_1))_{n \geq 0}$  converge, etc.. On pose enfin  $\phi(n) = \phi_0 \circ \dots \circ \phi_n(n)$ , et on remarque que, pour chaque entier  $p \geq 0$ , la suite  $(\phi(n))_{n \geq p}$  est extraite de la  $p$  ème suite extraite  $\phi_0 \circ \dots \circ \phi_p(n)$ , ce qui montre bien que  $(f_{\phi(n)}(y_p))_{n \geq 0}$  converge.

Il s'agit maintenant de voir que la suite extraite  $(f_{\phi(n)})$  est de Cauchy, la complétude de  $\text{Lip}_k(Y, Z)$  assurant alors la convergence de cette suite. On se fixe donc  $\varepsilon > 0$ . La suite  $(y_p)$  étant dense, la famille des boules  $(B_\varepsilon(y_p))_{p \geq 0}$  recouvre  $Y$ , par compacité il existe entier  $p_0$  tel que les boules  $(B_\varepsilon(y_p))_{0 \leq p \leq p_0}$  recouvrent encore  $Y$ . Fixons un entier  $i$  entre 0 et  $p_0$  ; par construction de l'extraction  $\phi$ , la suite  $(f_{\phi(n)}(y_i))$  converge, elle est donc de Cauchy : il existe un entier  $N_0(i)$  tel que, pour tous  $n, n' \geq N_0(i)$ , on a

$$(*) \quad d(f_{\phi(n)}(y_i), f_{\phi(n')}(y_i)) < \varepsilon.$$

Notons  $N_0$  le plus grand des entiers  $N_0(i)$ , de sorte que, pour  $n, n' \geq N_0$ , l'inégalité (\*) est vérifiée pour tout entier  $i$  entre 0 et  $p_0$ .

Pour voir que la suite  $(f_{\phi(n)})$  est de Cauchy, on considère maintenant deux entiers  $n, n' \geq N_0$ , on va vérifier que  $d_\infty(f_{\phi(n)}, f_{\phi(n')})$  est "assez petite". Etant donné un élément  $y$  dans  $Y$ , l'un des points  $y_1, \dots, y_{p_0}$  est à distance de  $y$  inférieure à  $\varepsilon$ , appelons-le  $y_i$ . On évalue alors la distance  $d(f_{\phi(n)}(y), f_{\phi(n')}(y))$  à l'aide des points  $f_{\phi(n)}(y_i)$  et  $f_{\phi(n')}(y_i)$ , ce qui donne

$$d(f_{\phi(n)}(y), f_{\phi(n')}(y)) \leq \varepsilon + k\varepsilon + k\varepsilon$$

(c'est ici qu'intervient le caractère  $k$ -lipschitzien des fonctions  $f_n$  ; on a aussi utilisé l'inégalité (\*)). On a pu préalablement fixer un réel  $\varepsilon' > 0$ , et choisir ensuite  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $(2k + 1)\varepsilon < \varepsilon'$ , ce qui montre que la suite extraite est de Cauchy. Ceci termine la preuve.  $\square$

## 4.7 Appendice II : module de continuité

Soit  $f : Y \rightarrow Z$  une application entre deux espaces métriques  $(Z, d_Z)$  et  $(Y, d_Y)$ . Un *module de continuité* pour  $f$  est une application  $w_f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

1.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_f(\delta) = 0$  ;
2. pour tout  $y, y' \in Y$ ,  $d(f(y), f(y')) \leq w_f(d(y, y'))$ .

---

**Exercice 47.**— 1. Supposons  $f$   $C$ -lipschitzienne, rappeler la définition. En déduire un module de continuité pour  $f$ . Dessiner le graphe de  $w_f$ .

2. Supposons  $f$  Holderienne d'exposant  $1/2$ . Rappeler la définition (ou aller voir sur Wikipedia). Mêmes questions.

3. Supposons  $f$  uniformément continue et  $Y$  compact. Montrer que  $f$  admet un module de continuité  $w_f$  qui est une fonction croissante.

AIDE : Pour tout  $\delta > 0$  on définit

$$w_f(\delta) = \sup\{d_Z(f(y_1), f(y_2)) \mid d_Y(y_1, y_2) \leq \delta\}.$$

Montrer que cette formule a les propriétés requises.

4. Montrer la réciproque : si  $f$  admet un module de continuité, alors elle est uniformément continue.

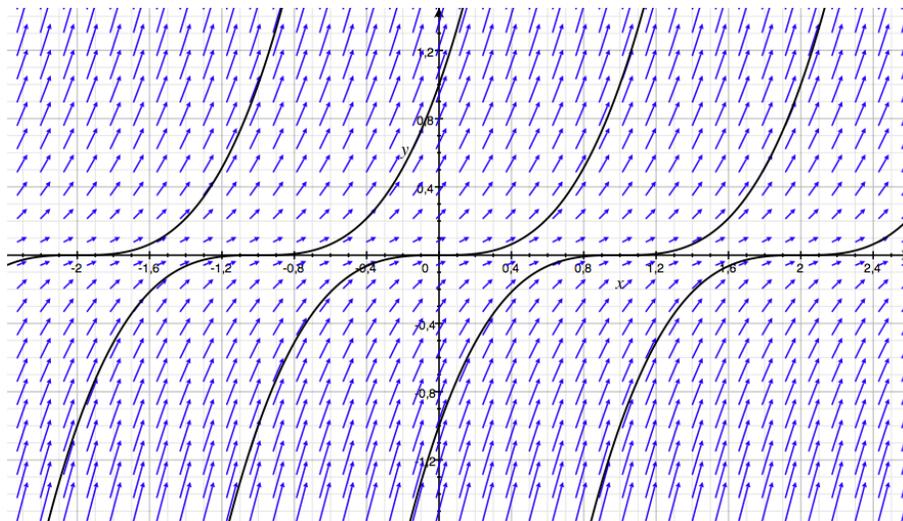
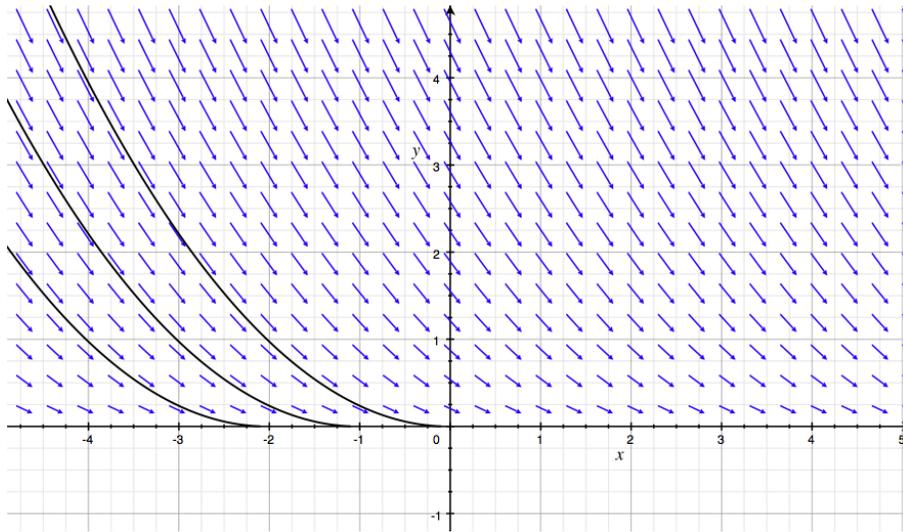
---

## 5 Existence et unicité, le théorème de Cauchy-Lipschitz

(Cauchy 1824).

### 5.1 Condition de Lipschitz

Motivation pour la condition de Lipschitz : l'équation du seau percé ( $x' = -C\sqrt{x}$ , voir Hubbard-West). Exemple donné par Peano :  $x' = 3|x|^{2/3}$ . Les champs de vecteurs correspondant sont dessinés ici :



---

**Exercice 48.**— Montrer que, pour ces deux équations, il n'y a pas unicité des solutions au problème de Cauchy.

---

On considère à nouveau une ED  $x' = X(t, x)$ , où  $X$  est définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . On suppose comme avant que  $X$  est continue (ainsi, les résultats de la section précédentes restent valables). On suppose de plus ici qu'il existe une constante  $k$  telle que  $X$  soit  $k$ -lipschitzienne en  $x$  :

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, \quad \|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| \leq k \|x_2 - x_1\|.$$

---

**Exercice 49.**— Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que si  $X$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , alors elle est *localement* lipschitzienne en  $x$ , ce qui signifie que tout point  $(t_0, x_0)$  possède un voisinage  $V$  sur lequel  $X$  est  $k$ -lipschitzienne pour une certaine constante  $k$  (pouvant dépendre de  $V$ ). On utilisera l'existence d'un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  inclus dans  $U$  et compact.

---

Sous cette hypothèse, nous allons démontrer l'existence et l'unicité des solutions locales, et voir que la méthode d'Euler converge. Remarque : tout marche pareil en dimension infinie (dans un Banach) ; ce n'était pas le cas de la section précédente.

**Théorème 5.1.** *Si  $X$  est continu et lipschitzienne en  $x$ , alors pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in U$ , il existe  $T > 0$  tel que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = X(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*admet une unique solution définie sur  $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ .*

## 5.2 Preuve en utilisant Cauchy-Peano

*Première démonstration.* L'existence est une conséquence du théorème de Cauchy-Peano, il reste juste à voir l'unicité.

Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  deux solutions du même problème de Cauchy. On pose  $M(t) = \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$ , ce qui définit une fonction  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  dont on voudrait montrer qu'elle est nulle sur  $I$ . On a  $M(t_0) = 0$ , et

$$\begin{aligned} M'(t) &\leq \|\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t)\| \quad (1) \text{ (inégalité justifiée plus bas)} \\ &= \|X(t, \gamma_1(t)) - X(t, \gamma_2(t))\| \\ &\leq k \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = kM(t). \end{aligned}$$

Fixons  $\eta > 0$  (un peu de marge), on a donc, pour tout  $t \in I$ ,  $M'(t) < kM(t) + \eta$ . Soit  $u_\eta$  la solution de l'EDO (\*)  $u' = ku + \eta = Y(u)$  vérifiant  $u(t_0) = 0$ . On a donc

$$M(t_0) = u_\eta(t_0) \text{ et, pour tout } t \in I, M'(t) < Y(M(t)).$$

Le graphe de  $M$  est donc une barrière montante pour l'équation. D'après le théorème des barrières, on en déduit, pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

$$M(t) < u_\eta(t) \quad (2)$$

D'autre part on peut résoudre l'EDO (\*) (qui est linéaire à coefficient constant avec second membre), on obtient  $u(t) = \frac{\eta}{k}(e^{k(t-t_0)} - 1)$  : On a donc, pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$  fixé,  $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} u_\eta(t) = 0$ . On en déduit que  $M(t) = 0$ .

---

**Exercice 50.**— Compléter la preuve en démontrant, de façon analogue, que  $M(t) = 0$  pour tout  $t \in [t_0 - T, t_0]$ .

---

On montre ainsi que  $M(t) = 0$  sur tout l'intervalle  $I$ , ce qui conclut.

Il nous reste à justifier l'inégalité (1) ci-dessus : c'est un cas particulier du lemme 5.4 ci-dessous. Sauf qu'il y a des ennuis techniques : en réalité  $t \mapsto M(t)$  est seulement dérivable à droite ; il faut donc interpréter l'inégalité (1) au sens des dérivées à droite ; et on va devoir généraliser le théorème des barrières dans le contexte des dérivées à droite, ce qui est fait plus bas. A ce point, le mieux est peut-être de considérer que ce qui précède est une idée de preuve, qui sert à introduire le lemme de Gronwall.  $\square$

### 5.3 Le lemme de Gronwall

On va préciser l'argument précédent pour montrer que les solutions approchées fournies par la méthode d'Euler convergent vers une solution. Ceci redonnera notamment une preuve de l'existence qui permet de se passer du théorème de Cauchy-Peano. La clé de cette preuve est le lemme de Gronwall, un outil puissant pour comparer deux solutions, et même deux solutions approchées d'une ED (on l'utilisera à nouveau plus loin pour estimer la dépendance des solutions par rapport à un paramètre).

On suppose toujours que  $X$  est  $k$ -lipschitzienne en  $x$  sur  $U$ , pour une certaine constante  $k$ . On considère deux fonctions  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que, pour tout  $t \in I$ ,  $(t, \gamma_i(t)) \in U$ . Soit  $t_0 \in I$ . On suppose que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux solutions respectivement  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -approchées de l'ED  $x' = X(t, x)$  : pour tout  $t \in I$ ,

$$\|\gamma_1'(t) - X(t, \gamma_1(t))\| < \varepsilon_1, \quad \|\gamma_2'(t) - X(t, \gamma_2(t))\| < \varepsilon_2.$$

On note  $\rho_0 = \|\gamma_1(t_0) - \gamma_2(t_0)\|$  l'écart initial. Dans le lemme qui suit la norme considérée  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.<sup>2</sup>

**Lemme 5.2.** (“Inégalité fondamentale”) Pour tout  $t \in I$ , on a

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \leq \rho_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k} (e^{k|t-t_0|} - 1).$$

Pour aider à comprendre l'énoncé, remarquons que la fonction

$$u(t) = \rho_0 e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k} (e^{k(t-t_0)} - 1)$$

est la solution de l'ED  $u' = ku + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  avec condition initiale  $u(t_0) = \rho_0$  (pour prouver cette affirmation, il suffit de vérifier que la fonction vérifie l'ED ; si on veut résoudre l'ED, c'est-à-dire retrouver cette solution, on applique la méthode de variation des constantes).

---

**Exercice 51.**— Montrer que l'unicité découle du lemme de Gronwall. (Cet argument est une variante de l'argument donné dans la section 5.2).

---

### 5.4 Preuve directe du théorème de Cauchy-Lipschitz, convergence de la méthode d'Euler

Dans cette section nous utilisons le lemme de Gronwall pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz, sans l'aide du théorème de Cauchy-Peano.

On considère une ED  $x' = X(t, x)$  avec  $X$   $k$ -lipschitzien en  $x$  sur un ouvert  $U$  contenant une condition initiale  $(t_0, x_0)$ . On considère un cylindre  $C = [t_0 \pm T] \times \bar{B}(x_0, r_0)$  avec  $T \leq r_0/M$  où  $M$  est un majorant de  $\|X\|$  sur  $C$ , ces constantes nous sont fournies par le lemme du chapitre précédent. On rappelle que la méthode d'Euler fournit une suite  $(\gamma_p)$  de solutions  $\varepsilon_p$ -approchées,  $\gamma_p : I = [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(x_0, r_0)$  avec  $\varepsilon_p$  qui tend vers 0, vérifiant toutes la même condition initiale  $\gamma_p(t_0) = x_0$ .

**Théorème 5.3.** Sous les hypothèses précédentes toute suite  $(\gamma_p : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m)$  de solutions  $\varepsilon_p$ -approchée, avec  $\varepsilon_p$  qui tend vers 0, converge uniformément vers l'unique solution  $\gamma$  définie sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$  au problème de Cauchy.

Pas besoin d'extraire pour avoir la convergence, donc, contrairement au contexte du théorème de Cauchy-Peano. De plus, la preuve suivante permet de se passer du théorème de Cauchy-Peano pour l'existence d'une solution.

---

2. Le lemme qui suit est en fait valable pour toute norme, mais la preuve est plus simple pour la norme euclidienne, du fait qu'elle est différentiable en tout point  $x \neq 0$ . D'autre part, dans ce chapitre, seul le cas  $\rho_0 = 0$  va nous servir, mais le cas général nous sera très utile plus loin.

*Démonstration.* Nous avons déjà vu l'unicité. D'autre part, le lemme de Gronwall nous montre que la suite  $(\gamma_p)$  est une suite de Cauchy pour la norme uniforme sur l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\bar{B}(x_0, r_0)$ . Cet espace étant complet, on en déduit que la suite converge uniformément vers une application continue  $\gamma : I \rightarrow \bar{B}(x_0, r_0)$ . D'après la fin de la preuve du théorème de Cauchy-Peano (lemme 4.5),  $\gamma$  est une solution de l'ED. <sup>3</sup>  $\square$

## 5.5 Preuve du lemme de Gronwall

(Suivant partiellement HNW).

---

**Exercice 52.**— Montrer que l'inégalité donnée par le lemme de Gronwall est optimale. On pourra commencer par le cas  $\rho_0 = 0$ , puis  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ .

---

Dans toute cette preuve, on note (abusivement) la dérivée à droite comme la dérivée usuelle,

$$\phi'(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{h} (\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)).$$

On commence par un lemme préliminaire.

**Lemme 5.4.** Soit  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction dérivable à droite en  $t_0$ , et posons  $m(t) = \|\phi(t)\|$ . Alors la fonction  $m$  est dérivable à droite en  $t_0$  et on a

$$m'(t_0) \leq \|\phi'(t_0)\|.$$

---

**Exercice 53.**— Faire un dessin illustrant cette inégalité.

---

*Démonstration.* On rappelle que pour tout vecteurs  $A, B$ , on a  $\| \|A\| - \|B\| \| \leq \|A - B\|$ . Le lemme suit de l'inégalité  $\|\phi(t_0 + h)\| - \|\phi(t_0)\| \leq \|\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)\|$  (diviser par  $h$  et passer à la limite pour  $h > 0$  tendant vers 0). (Lorsque  $\phi(t_0) = 0$ , l'inégalité est en fait une égalité).  $\square$

Passons maintenant à la preuve du lemme de Gronwall. On va s'intéresser seulement au cas  $t \geq t_0$ , l'autre cas étant symétrique. On pose  $m(t) = \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$ . Par définition, les solutions approchées sont dérivables à droite sur  $I$ . Le lemme précédent s'applique, l'application  $m$  est donc dérivable à droite sur  $I$  et on a, pour tout  $t \in I$ ,

$$m'(t) \leq \|\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t)\|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le caractère  $k$ -lipschitzien de  $X$  (écrire par exemple  $\gamma_1'(t) = X(t, \gamma_1(t)) + R_1(t)$ ), on obtient d'autre part

$$\|\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t)\| \leq km(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

On a donc, pour tout  $t \in I$ ,  $m'(t) \leq km(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Soit  $u(t)$  la solution de l'EDO  $u' = ku + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  vérifiant la condition initiale  $u(t_0) = \rho_0$ ; d'après la remarque qui suit l'énoncé, il s'agit donc de montrer que  $m(t) \leq u(t)$ .

Rappelons que  $m(t_0) = u(t_0) = \rho_0$ . Soit  $\eta > 0$  (un peu de marge), posons  $Y_\eta(u) = ku + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \eta$ . On est presque dans les conditions du théorème des barrières : la seule hypothèse non vérifiée est la dérivabilité, puisque  $m$  est seulement dérivable à droite.

---

3. Toute petite triche : il faut s'assurer qu'une solution  $\varepsilon$ -approchée restait dans le cylindre; vérifier que ceci est vrai dès que  $T \leq r_0/(M + \varepsilon)$ .

**Lemme 5.5.** (*Barrières pour les fonction dérivables à droite*) Soient  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $t_0 \in I$ ,  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de l'ED  $u' = Y(u)$ ,  $m$  une fonction continue et dérivable à droite sur  $I$ . Supposons que

$$\begin{cases} m(t_0) \leq u(t_0) \\ m'(t) < Y(m(t)) \quad \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

Alors on a, pour tout  $t \in I$ ,  $t \geq t_0$ ,  $m(t) \leq u(t)$ .

En admettant le lemme on obtient, pour tout  $t \geq t_0$  dans  $I$ ,

$$m(t) \leq u_\eta(t)$$

où  $u_\eta$  est la solution de  $u' = Y_\eta(u)$  vérifiant  $u_\eta(t_0) = \rho_0$ . On fait maintenant tendre  $\eta$  vers 0; la formule explicite pour  $u_\eta$  indique que  $u_\eta(t)$  tend vers  $u(t)$ , ce qui conclut la preuve du lemme de Gronwall.

Il reste à prouver le lemme sur les sous-solutions.

*Démonstration.* L'idée est de comparer  $m$  et  $u$  au voisinage d'un point où ces deux fonctions coïncident. Si le lemme est faux, on considère  $t_2$  tel que  $m(t_2) > u(t_2)$ , puis

$$t_1 = \sup\{t \leq t_2 \mid m(t) = u(t)\}.$$

On a  $t_1 < t_2$ ,  $m(t_1) = u(t_1)$  et  $m(t) > u(t)$  pour  $t \in ]t_1, t_2]$ , d'où, pour tout  $h > 0$ ,

$$\frac{m(t_1 + h) - m(t_1)}{h} > \frac{u(t_1 + h) - u(t_1)}{h}.$$

En passant à la limite, on en déduit  $m'(t_1) \geq u'(t_1)$ . Ceci contredit l'hypothèse  $m'(t_1) < Y(m(t_1)) = Y(u(t_1)) = u'(t_1)$ .

---

**Exercice 54.**— Montrer que le lemme des sous-solution devient faux si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large. (Aide : choisir  $Y$  telle que l'ED  $u' = Y(u)$  ne vérifie pas l'unicité du problème de Cauchy, et  $m$  et  $u$  deux solutions qui se "croisent").

---

□

---

**Exercice 55.**— En supposant  $X$  de classe  $C^\infty$ , quelle est la vitesse de convergence de la méthode d'Euler ?

---



---

**Exercice 56.**— Soit  $f$  une fonction localement lipschitzienne. Soient  $x_1, x_2$  deux courbes solutions de l'EDO indépendante du temps  $x' = f(x)$  vérifiant la même condition initiale  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$ . On suppose pour simplifier que  $x_1$  et  $x_2$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que leurs images sont disjointes ou confondues.

---

## Autre preuve par la méthode des itérations successives

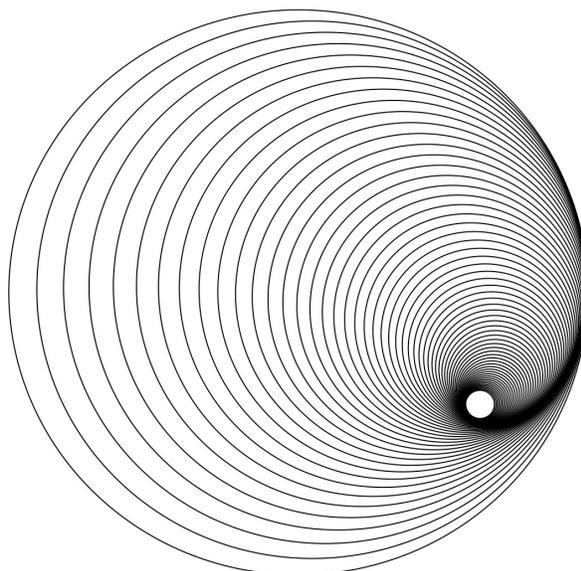
(Picard 1890). Mais aussi Liouville (1838), Cauchy, Peano (1888), Lindelöf (1894), Bendixson (1893).

1) Le théorème du point fixe contractant, version de base, existence et unicité avec une estimation de l'intervalle de vie non optimale (dépendant de la constante de Lipschitz).

2) Le théorème du point fixe lorsque  $T^n$  est contractante, récupération de la bonne estimation sur l'intervalle de vie.

3) Le théorème du point fixe à paramètres, continuité de la solution par rapport à un paramètre et à la condition initiale.

4) (difficile) Le théorème du point fixe à paramètres lisses, lissité de la solution par rapport à un paramètre et à la condition initiale.



Le but de l'exercice suivant est de comprendre ce dessin.

**Exercice 57.**— Soit  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe, de classe  $C^\infty$ , parcourue à vitesse 1. On note  $T(s)$  le vecteur vitesse au temps  $s$  (il s'agit donc du vecteur unitaire tangent à la courbe). Le vecteur accélération s'écrit alors

$$T'(s) = \rho(s)^{-1}N(s)$$

où  $N(s)$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $T(s)$ , et  $\rho(s) > 0$  est le *rayon de courbure* au point  $\alpha(s)$ . On a alors  $N'(s) = -\rho(s)^{-1}T(s)$ . Le centre de courbure est le point  $\gamma(s) = \alpha(s) + \rho(s)N(s)$ , le cercle osculateur  $\mathcal{C}(s)$  est le cercle de centre  $\gamma(s)$  et de rayon  $\rho(s)$ .

On suppose dans la suite que  $\rho'(s) > 0$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  (“la courbe est de plus en plus courbée”).

**1.** On veut montrer que pour tous  $s_0 < s_1$  dans  $[0, 1]$ , le cercle osculateur  $\mathcal{C}(s_1)$  est situé à l'intérieur du cercle osculateur  $\mathcal{C}(s_0)$ .

- a. Faire un dessin.
- b. Montrer que la question revient à une inégalité entre  $\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|^2$  et  $(\rho(s_1) - \rho(s_0))^2$ .
- c. Comparer ces deux quantités, pour  $s_1$  proche de  $s_0$ , à l'aide d'un DL à l'ordre 4 (!).  
4
- d. Conclure.
- e. Montrer que la réunion des cercles

$$U = \bigcup_{s \in ]0, 1[} \mathcal{C}(s)$$

est un ouvert du plan (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

- f. Montrer que l'application

$$H(s, \theta) \mapsto \gamma(s) - \rho(s)e(s, \theta),$$

où  $e(s, \theta) = (-\cos(\theta)N(s) + \sin(\theta)T(s))$ , est un homéomorphisme entre  $]0, 1[ \times \mathbb{S}^1$  et  $U$  (où  $\mathbb{S}^1$  est le cercle unité).

---

4. (Plutôt : donner le DL ? Est-ce qu'on pourrait le calculer avec Maple (je ne vois pas comment) ? Bon, en tout cas, il est sur mon brouillon, si je ne me suis pas trompé)

5

2. Pour tout  $(s, \theta)$ , soit  $X(H(s, \theta))$  le vecteur unitaire tangent au point  $H(s, \theta)$  au cercle  $\mathcal{C}(s)$ . Ceci définit un champ de vecteurs sur  $U$ .

a. Montrer que  $X$  est continu. On pourra voir  $X$  comme l'image par  $H$  d'un champ de vecteur sur  $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$  muni des coordonnées polaires  $(s, \theta)$ .

6

b. Décrire géométriquement des courbes intégrales de  $X$ . Montrer qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy.

3. Donner deux arguments différents montrant que  $H$  n'est pas un  $C^1$ -difféomorphisme. On montrera en particulier que sa différentielle n'est pas injective en les images réciproques de la courbe  $\alpha$ .

7

4. Montrer que  $H$  est un difféomorphisme sur  $H^{-1}(\alpha(]0, 1[))$ .

8

**Exercice 58.**— Déterminer les solution de  $x'^2 = x$ . A-t-on unicité pour le problème de Cauchy ?

5. (Sol :  $H$  est  $C^\infty$  d'après les formules, surjectif par définition, injectif puisque les cercles sont deux à deux disjoints. La continuité de l'inverse est un peu plus délicate. Pour montrer cette continuité au point  $H(s_0, \theta_0)$ , on commence par choisir  $s_{-1} < s_0 < s_1$ ; l'argument plus haut montre que  $U' = \bigcup_{s \in [s_{-1}, s_1]} \mathcal{C}(s)$  est un voisinage de  $H(s_0, \theta_0)$ . Il suffit donc de montrer que la restriction de  $H$  à  $[s_{-1}, s_1] \times \mathbb{S}^1$  est un homéomorphisme sur son image. Cette fois-ci le départ est compact, donc c'est bon.)

6. (Sol :  $X(P) = DH(H^{-1}(P)) \cdot \frac{1}{2\pi\rho(s)} \frac{\partial}{\partial \theta}$ , où on a utilisé les coordonnées polaires, qui forment un difféomorphismes hors de 0.)

7. (Sol : Il est clair que les dérivées partielles de  $H$  par rapport à  $s$  et  $\theta$  sont colinéaires aux points  $(s, 0)$ , elles sont toutes deux colinéaires à  $T(s)$ , donc la différentielle n'est pas inversible. Autre argument : si  $\Phi$  était un  $C^1$ -difféomorphisme, il serait en fait un  $C^\infty$ -difféomorphisme (d'après le théorème d'inversion locale, car  $H$  est de classe  $C^\infty$ ). Le champ  $X$  serait en particulier de classe  $C^1$ , et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'appliquerait.)

8. (Sol : La dérivée partielle de  $H$  par rapport à  $\theta$  est colinéaire au vecteur  $e(s, \theta + \pi_2)$ . La dérivée par rapport à  $s$  vaut

$$c'(s) + \rho'(s)e(s, \theta) + \dots = \rho'(s)(N(s) + e(s, \theta)) + \dots$$

où les pointillées désignent des termes colinéaires à  $e(s, \theta + \pi_2)$ . Or le vecteur  $N(s) + e(s, \theta)$  ne peut être colinéaire à  $e(s, \theta + \pi_2)$ ; sinon il serait orthogonal à  $e(s, \theta)$ , ce qui contredirait Pythagore car  $N(s)$  et  $e(s, \theta)$  ont même longueur.

## 6 Temps de vie des solutions, explosion

Les théorèmes d'existence de solution (Cauchy-Peano ou Cauchy-Lipschitz) ne donnent que l'existence de solution définies sur des petits intervalles de temps autour du temps  $t_0$  de la condition initiale. On cherche maintenant à comprendre les solutions qui sont définies sur des grands intervalles de temps. L'idée principale est d'obtenir de grands intervalles de temps en recollant les solutions locales données par les théorèmes d'existence.

### 6.1 Solutions maximales

On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz :  $X$  est une application définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne en la variable  $x$ . On fixe une condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Soit  $J$  la réunion de tous les intervalles  $I$  pour lesquels il existe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est solution de l'ED  $x' = X(t, x)$  avec  $\gamma(t_0) = x_0$ .

**Proposition 6.1.** *Il existe une unique solution  $\gamma$  vérifiant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  et définie sur  $J$ . Toute autre solution vérifiant la même condition initiale est obtenue par restriction de  $\gamma$  à un sous-intervalle  $I$  de  $J$ .*

La solution  $\gamma$  fournie par cet énoncé s'appelle *solution maximale* pour la condition initiale  $(t_0, x_0)$ . L'intervalle  $J$  est appelé *intervalle de vie* pour cette condition initiale.

Exemple. Partant de l'idée que le taux de reproduction est proportionnel au nombre de couples d'une population, on modélise l'évolution de cette population par l'ED  $x' = x^2$ .

---

**Exercice 59.**— Vérifier que la formule

$$\gamma(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1}$$

est solution de l'ED avec la condition initiale  $\gamma(t_0) = x_0$ . En supposant  $x_0 > 0$ , donner son intervalle de définition  $I(x_0)$ . Quelle est la limite de  $\gamma(t)$  lorsque  $t$  tend vers la borne supérieure de cet intervalle? En déduire que  $I(x_0)$  est l'intervalle de vie, et en particulier qu'il n'existe pas de solution définie sur  $\mathbb{R}$ .

---

*Preuve de la proposition.* Viterbo, prop 4.1. □

**Lemme.** (*minoration locale du temps de vie*) *Pour toute condition initiale  $(t_0, x_0)$ , il existe  $\tau > 0$  tel que pour toute condition initiale  $(t_1, x_1)$  assez voisine de  $(t_0, x_0)$ , l'EDO  $x' = X(t, x)$  admet une solution  $\gamma : ]t_1 - \tau, t_1 + \tau[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  vérifiant la condition initiale  $\gamma(t_1) = x_1$ . En particulier, la solution maximale correspondant à cette condition initiale est définie au moins sur  $]t_1 - \tau, t_1 + \tau[$ .*

*Démonstration.* On considère  $(t_0, x_0) \in U$ . Fixons un premier rayon  $R_2 > 0$  tel que la boule  $B_{R_2}(t_0, x_0)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  est incluse dans l'ouvert  $U$ . On choisit ensuite  $R_1 \in ]0, R_2[$  (par exemple  $R_1 = R_2/2$ ; faire un dessin! Comme avant, la norme considérée est  $\|(t, x)\| = |t| + \|x\|_e$ ). On applique d'abord le lemme d'extension vu plus haut, avec  $K = B_{R_2}(t_0, x_0)$  : il existe un champ de vecteurs  $Y$  défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , à support compact, et qui coïncide avec  $X$  sur la boule  $K$ . On choisit maintenant la condition initiale  $(t_1, x_1)$  dans la boule  $B_{R_1}(t_0, x_0)$ .

D'après la preuve de Cauchy-Peano, l'EDO  $y' = Y(t, y)$  admet une solution  $\gamma$  vérifiant la condition initiale  $\gamma(t_1) = x_1$  et définie sur  $]t_1 - 1, t_1 + 1[$ .

---

**Exercice 60.**— Soit  $M = \sup \|Y\|$ . Rappeler pourquoi  $\gamma$  est  $M$ -lipschitzienne. En déduire que pour tout  $t \in ]t_1 - \tau, t_1 + \tau[$ ,  $\gamma(t) \in B_{R_2}(t_0, x_0)$ , où  $\tau$  est un réel bien choisi ne dépendant que de  $R_1, R_2$  et  $M$ .

---

D'après l'exercice, tant que  $t$  reste dans l'intervalle  $]t_1 - \tau, t_1 + \tau[$  la courbe ne sort pas de la boule  $K$  sur laquelle les champs  $X$  et  $Y$  coïncident. Par conséquent, la courbe  $\gamma|_{]t_1 - \tau, t_1 + \tau[}$  est aussi une solution de l'EDO  $x' = X(t, x)$ , CQFD. □

Le lemme de minoration locale est crucial dans la preuve du résultat suivant.

**Corollaire 6.2** (Phénomène d'explosion). *L'obstruction à l'existence d'une solution globale est la sortie définitive de tout compact. Plus précisément, soit  $X$  un champ de vecteur défini et continu sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , et  $\gamma : ]a, b[$  une solution maximale de l'EDO associée à  $X$ . Alors pour toute partie compacte  $K$  de  $U$ , il existe  $\tau \in ]a, b[$ , pour tout  $t \in ]\tau, b[$ ,  $(t, \gamma(t)) \notin K$ .*

(attention, deux sens pour “sortir de tout compact”. La preuve de la version faible est aussi intéressante, cf Demailly, chap V, 2.6).

*Démonstration.* (Viterbo, 4.2). □

Exemple intéressant : lorsque  $U$  est de la forme  $I \times \mathbb{R}^m$  pour un certain intervalle  $I = ]\alpha, \beta[$ , si une solution maximale  $\gamma$  est définie sur  $]a, b[$  avec  $b < \beta$ , alors la norme de  $\gamma(t)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $b$ . (Pour  $m = 1$  on retrouve ainsi le résultat du premier chapitre).

**Corollaire 6.3** (semi-continuité du temps de vie). *Soit  $X$  un champ de vecteur défini et localement lipschitzien en  $x$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ . Soit  $(t_0, x_0) \in U$  et  $\gamma$  une solution de l'EDO associée à  $X$  et vérifiant la condition initiale  $\gamma(t_0) = x_0$ .*

## 6.2 Estimation de l'intervalle d'existence (I) : conditions géométriques

On considère ici une fonction  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  ; on dit que cette fonction définit un *champs de vecteurs autonome*. Le champ est dit *complet* si toutes les solutions de l'ED  $x' = X(x)$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Commentaire : les dynamiciens étudient uniquement des champs complets. Le temps de vie intéresse plutôt ceux qui étudient des EDP.

Exercices : tout champs de vecteurs à support compact est complet. Un champs de vecteurs tangent aux sphères centrées en zéro ( $X(x)$  orthogonal à  $x$  pour tout  $x$ ) est complet : la fonction  $\|x\|$  est constante le long du flot, ce qui empêche l'explosion. Généralisation : champs de vecteurs rentrant le long d'une hypersurface (Viterbo, prop 4.5, corollaire 4.6).

**Trajectoires périodiques** Soit  $x$  une solution non constante. Lorsqu'il existe  $T > 0$  tel que  $x(t_0 + T) = x(t_0)$ , on dit que la trajectoire  $t \mapsto x(t)$  est périodique. Le corollaire “phénomène d'explosion” implique :

**Lemme 6.4.** *Toute solution périodique est définie sur  $\mathbb{R}$ .*

L'ensemble des réels  $T$  satisfaisant  $x(t_0 + T) = x(t_0)$  est alors un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ , si la solution n'est pas constante il est de la forme  $T_0 \mathbb{Z}$  avec  $T_0 > 0$ , qui est appelé *période* de la solution.

**Proposition 6.5.** (reparamétrage) *Pour tout champ de vecteur autonome sur un ouvert  $U$ , il existe une fonction  $f > 0$  telle que le champ  $Y = f.X$  soit complet.*

Exercice : en utilisant le corollaire “phénomène d'explosion”, montrer que les courbes intégrales (non périodiques) de  $f.X$  sont des reparamétrage bijectifs de celles de  $X$ .

---

**Exercice 61.—Preuve de la proposition** L'idée de la preuve est de choisir  $f$  qui décroît assez vite lorsque  $x$  tend vers le bord de  $U$ , de façon à ce qu'une solution “mette un temps infini à atteindre le bord”.

1. Montrer que si  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  est borné, alors les solutions maximales sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Indication : combien de temps faut-il au minimum à une solution vérifiant  $x(0) = 0$  pour s'échapper de la boule de rayon  $R$ ?

On suppose maintenant que  $Y$  est un champ de vecteurs autonomes.

2. Soit  $x$  une courbe intégrale qui n'est pas définie pour tout temps  $> 0$ . Montrer qu'il existe une suite de temps  $(t_n)$  telle que a) la suite  $(x(t_n))$  tend vers un point  $x_\infty$  du bord de  $U$ , ou b) la suite  $(\|x(t_n)\|)$  tend vers l'infini.

3. On suppose que le champ  $Y$  vérifie la condition de décroissance au bord suivante : pour tout  $x$  dans  $U$ ,

$$\|Y(x)\| < \frac{1}{2}d(x, \partial U).$$

On considère une courbe intégrale  $x$  et une suite de temps  $(t_n)$  vérifiant la propriété (a). Montrer qu'il existe une autre suite de temps  $(t'_n)_{n \geq n_0}$  telle que

1.  $d(x(t'_n), \partial U) = \frac{1}{2^n}$ ,
2.  $d(x(t), \partial U) \leq \frac{1}{2^n}$  pour tout  $t \geq t'_n$ .

Montrer que  $t'_{n+1} \geq t'_n + 1$ . Conclure que la solution est définie pour tout temps positif.

4. Terminer la preuve de la proposition.

---

### 6.3 Estimation de l'intervalle d'existence (II) : conditions analytiques

**Théorème 6.6.** (non explosion quand  $X(x)$  croît au plus linéairement en  $x$ ) Soit  $X : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. On suppose, pour tout  $(t, x)$ ,

$$\|X(t, x)\| \leq A\|x\| + B.$$

Alors les solutions maximales sont définies sur  $I$ .

On retrouve ainsi le fait que les solutions des EDO linéaires sont définies globalement. Typiquement, pas  $x' = x^2$ !

**Corollaire 6.7.** Pour une EDO linéaire  $x' = A(t)x + B(t)$ , avec  $A, B$  définies et continues sur un intervalle  $I$ , on a existence et unicité, et les solutions maximales sont définies sur  $I$  tout entier.

*Démonstration.* Une EDO linéaire satisfait automatiquement la condition de Lipschitz, et la condition de croissance au plus linéaire.  $\square$

---

**Exercice 62.**—(Preuve du théorème) On suppose dans un premier temps que  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne, et que  $x$  est une solution maximale telle que, pour tout  $t \geq t_0$ ,  $x(t) \neq 0$ . On note  $]a, b[$  l'intervalle de vie de cette solution.

1. Montrer que l'application  $m : t \mapsto \|x(t)\|$  est dérivable sur  $]t_0, b[$ , et que  $m'(t) \leq \|x'(t)\|$  pour tout  $t$  dans cet intervalle.

2. Montrer que sur l'intervalle  $]t_0, b[$ , la fonction  $m$  est majorée par la solution  $u$  de l'ED  $u' = Au + B$ . On pourra utiliser la première version du lemme des "sous-solutions" (voir la preuve du lemme de Gronwall).

3. En déduire que  $b$  est aussi la borne supérieure de l'intervalle  $I$ .

4. Démontrer le théorème dans le cas général.

---

Autres conditions analytiques : Queffelec-Zuily.

## 7 Dépendance par rapport aux conditions initiales

cf Hirsch-Smale.

On considère une EDO autonome  $x' = X(x)$ ,  $X$  défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . Pour simplifier on suppose  $X$  de classe  $C^1$  (localement lipschitzien suffirait pour la continuité) : en particulier, d'après le lemme suivant,  $X$  est lipschitzien sur tout compact de  $U$ .

**Lemme.** *Pour tout compact  $K$  inclus dans  $U$ , il existe une constante  $k$  telle que  $X$  est  $k$ -lipschitzien sur  $K$ .*

*Preuve* — Pour tout  $x \in K$ , choisissons un nombre strictement positif  $r(x)$  tel que la boule fermée  $B(x, r(x))$  soit incluse dans  $U$  : un tel nombre existe puisque  $U$  est ouvert. Par compacité, on peut recouvrir  $K$  par un nombre fini de boules  $B(x_1, r(x_1)/2), \dots, B(x_p, r(x_p)/2)$ . Soit  $M$  un majorant de  $\|DX\|$  sur la réunion des boules  $B(x_i, r(x_i))$  ( $M$  existe puisque  $X$  est de classe  $C^1$  et la réunion de ces boules est compacte), et  $r$  le minimum des  $r(x_i)/2$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $K$  à distance inférieure à  $r$ , alors on peut trouver une boule  $B(x_i, r(x_i))$  qui contient les deux points (pourquoi?). Puisque la boule est entièrement incluse dans  $U$  et  $\|DX\|$  y est majoré par  $M$ , l'inégalité triangulaire s'applique pour donner la majoration  $\|X(x) - X(y)\| \leq M \|x - y\|$ .

Il reste à traiter le cas des couples de points à distance supérieure à  $r$ . On considère l'ensemble des tels couples,

$$\{(x, y) \in K \times K, \|x - y\| \geq r\}.$$

Cet ensemble est compact, l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{\|X(x) - X(y)\|}{\|x - y\|}$$

y est continue, elle est donc majorée sur ce compact par un nombre  $M'$ . Autrement dit, pour tous  $x, y$  dans  $K$  tels que  $\|x - y\| \geq r$ , on a la majoration  $\|X(x) - X(y)\| \leq M' \|x - y\|$ . On conclut en prenant  $k = \max(M, M')$ .  $\square$

### 7.1 Continuité

Pour tout  $x \in U$  on note  $t \mapsto \gamma(t, x)$  l'unique solution vérifiant la condition initiale  $\gamma(0, x) = x$ . Soit  $x_0 \in U$ , et  $J_0$  un intervalle de temps compact inclus dans l'intervalle de temps de la solution  $t \mapsto \gamma(t, x_0)$  et contenant 0. On va utiliser la propriété suivante :

**Lemme.** *Il existe un compact  $K$  inclus dans  $U$ , et un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que, pour tout  $(t, x) \in J_0 \times V$ ,  $\gamma(t, x)$  est bien définie et d'image incluse dans  $K$ .*

*Preuve* — On note  $T > 0$  tel que  $J_0 \subset [-T, T]$ . L'ensemble  $\gamma(J_0 \times \{x_0\})$  est un compact inclus dans  $U$ , il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que l' $\varepsilon$ -voisinage  $K_\varepsilon$  de ce compact est encore inclus dans  $U$ . D'après le lemme plus haut, le champ  $X$  est  $k$ -lipschitzien sur  $K_\varepsilon$ , pour une certaine constante  $k > 0$ . Soit  $\rho > 0$  et  $x \in B(x_0, \rho)$ ; d'après Gronwall, on a

$$\|\gamma(t_1, x) - \gamma(t_1, x_0)\| \leq \rho e^{k|t_1|}$$

pour tout  $t_1 \in J_0$  tel que la solution  $t \mapsto \gamma(t, x)$  ne quitte pas  $K_\varepsilon$  entre les temps 0 et  $t_1$ . En choisissant  $\rho$  assez petit pour que  $\rho e^{kT} < \varepsilon$ , on en déduit que cette solution n'a pas pu quitter  $K_\varepsilon$  pour  $t \in J_0$  (plus précisément, on raisonne par l'absurde : d'abord si la solution n'était pas

définie sur  $J_0$ , d'après le théorème d'explosion elle devrait quitter  $K_\varepsilon$ , mais on aurait alors une contradiction en considérant  $t_1$  le plus petit temps sur le bord de  $K_\varepsilon$ ; donc la solution est définie sur  $J_0$ , et on obtiendrait la même contradiction si la solution quittait  $K_\varepsilon$  pour  $t \in J_0$ . Ainsi, le compact  $K_\varepsilon$  et le voisinage  $B(x_0, \varepsilon e^{-kT})$  conviennent.  $\square$

**Proposition.** *L'application  $(t, x) \mapsto \gamma(t, x)$  est continue sur  $\mathring{J}_0 \times V$ .*

---

**Exercice 63.**— Démontrer la proposition à l'aide du lemme de Gronwall.

---

## 7.2 Classe $C^1$

On considère toujours  $(t_0, x_0)$  comme avant. On note  $A(t) = DX(\gamma(t, x_0))$ . On considère l'EDO

$$(2) \quad u' = A(t)u$$

qui est linéaire, non autonome. D'après le cours, à toute condition initiale  $\xi$  correspond une unique solution  $t \mapsto u(t, \xi)$  vérifiant  $u(0, \xi) = \xi$ .

**Proposition.** *On a*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t, x_0 + \xi) - \gamma(t, x_0) - u(t, \xi)\|}{\|\xi\|}$$

*uniformément en  $t \in J_0$ .*

La preuve utilise notamment le lemme de Gronwall, et le fait que  $X$  est lipschitzien sur le compact  $K$ .

**Corollaire.** *L'application  $(t, x) \mapsto \gamma(t, x)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathring{J}_0 \times V$ .*

*Preuve* — La solution d'une EDO linéaire dépend de façon linéaire de la condition initiale, donc  $\xi \mapsto u(t, \xi)$  est linéaire. La proposition dit donc que pour tout  $t$  fixé dans  $J_0$ , l'application  $x \mapsto \gamma(t, x)$  est différentiable en  $x_0$  et sa différentielle est donnée par

$$\frac{D\gamma}{Dx}(t, x_0)\xi = u(t, \xi).$$

Tout point de  $V$  vérifie les mêmes hypothèses que  $x_0$ , par conséquent ce résultat est encore vrai en tout point de  $V$ . Le champ de vecteurs linéaire intervenant dans l'EDO (2) varie de façon continue avec  $x_0$ , puisque  $\gamma$  est une fonction continue; d'après le lemme de Gronwall, la solution  $u$  varie donc également de façon continue (voir plus bas pour des détails (\*)). On en déduit que l'application

$$(t, x) \mapsto \frac{D\gamma}{Dx}(t, x)\xi$$

est continue sur  $J_0 \times V$ . Notons que  $\frac{D\gamma}{Dx}(t, x)\xi$  est la dérivée partielle de  $\gamma$  selon le vecteur  $\xi$ ; en particulier, en appliquant ceci aux vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , et en écrivant  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , on obtient la continuité des dérivées partielles  $\partial\gamma/\partial x_i$ . D'autre part  $(t, x) \mapsto \frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x) = X(\gamma(t, x))$  est également continue. On conclut avec le critère disant qu'une application dont les dérivées partielles existent et varient continument est de classe  $C^1$ .  $\square$

On peut expliciter (\*) comme suit. Considérons deux points  $x_0, x_1$  dans  $V$ , et notons  $A(t) = DX(\gamma(t, x_0)), B(t) = DX(\gamma(t, x_1))$ . En utilisant le module de continuité uniforme de  $DX$ , on peut écrire

$$\|A(t) - B(t)\| \leq \omega_{DX}(\|\gamma(t, x_0) - \gamma(t, x_1)\|) \leq \omega_{DX}(\|x_0 - x_1\| e^{kT})$$

la deuxième négalité utilisant le lemme de Gronwall pour comparer deux solutions de l'EDO (1) ( $T$  est un majorant de l'intervalle  $J_0$  et  $k$  une constante de Lipschitz pour  $X$  sur le compact  $K$ ). Fixons  $\xi \in \mathbb{R}^m$  et notons alors  $t \mapsto u(t, \xi)$  et  $t \mapsto v(t, \xi)$  les solutions des EDO (2)  $u' = A(t)u$  et (2')  $v' = B(t)v$  avec conditions initiales  $u(0, \xi) = v(0, \xi) = \xi$ . On veut voir une solution de (2') comme une  $\varepsilon$ -solution approchée de (2),  $\varepsilon$  donné par la majoration suivante :

$$\|v'(t, \xi) - A(t)v(t, \xi)\| = \|A(t)v - B(t)v\| \leq \|A(t) - B(t)\| \|v(t, \xi)\|$$

et d'autre part il est facile de majorer  $\|v(t, \xi)\|$  pour  $t \in J_0$  par  $e^{k'T} \|\xi\|$  où  $k'$  est un majorant de  $DX$  sur le compact  $K$ , d'où

$$\varepsilon = \|\xi\| e^{k'T} \omega_{DX}(\|x_0 - x_1\| e^{kT}).$$

On applique à nouveau le lemme de Gronwall, mais cette fois-ci pour l'EDO (2), pour estimer la différence entre la solution  $u$  et la solution approchée  $v$  (qui vérifient la même condition initiale), ce qui donne

$$\|u(t, \xi) - v(t, \xi)\| \leq 2\varepsilon \frac{e^{k'T} - 1}{k'}.$$

Ce qui montre que, lorsque  $x_1$  tend vers  $x_0$ ,  $v(t, \xi) = \frac{D\gamma}{Dx}(t, x_1)\xi$  tend vers  $u(t, \xi) = \frac{D\gamma}{Dx}(t, x_0)\xi$ . On en déduit que les dérivées partielles de  $\gamma$  selon les variables d'espace sont continues en  $x$ . La continuité en  $(t, x)$  s'en déduit facilement.

## 8 Flot des champs de vecteurs autonomes

Dans cette section, on considère un champ de vecteurs autonome  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . On s'intéresse à l'EDO  $x' = X(x)$ . On suppose que  $X$  est localement lipschitzien, de façon à ce que le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique. On voudrait maintenant étudier des propriétés plus globales des solutions de cette équation.

### 8.1 Flot

Pour chaque  $x \in U$ , on note  $t \mapsto \Phi(t, x)$  l'unique solution maximale de l'EDO vérifiant la condition initiale  $\Phi(0, x) = x$ . On notera aussi  $\Phi^t(x) = \Phi(t, x)$ . Si on note  $I(x)$  l'intervalle de vie de la solution maximale passant par le point  $x$  au temps 0, l'application  $\Phi$  est donc définie sur l'ensemble

$$O_X = \{(t, x), t \in I(x)\}.$$

L'application  $\Phi$  est appelé *flot* du champ de vecteur  $X$ . Par définition on a  $\Phi(0, x) = x$  pour tout  $x \in U$ , autrement dit  $\Phi^0 = \text{Id}$ .

---

**Exercice 64.**— Décrire le flot du champ de vecteurs nul, puis le flot du champs de vecteur constant  $(1, 0, \dots, 0)$ .

---

#### Proposition 8.1.

1. L'ensemble de définition  $O_X$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ .
2. Pour tous  $s, t, x$  tels que  $\Phi^t(x)$  et  $\Phi^s(\Phi^t(x))$  soient définis,  $\Phi^{t+s}(x)$  est encore défini et on a

$$\Phi^{t+s}(x) = \Phi^s(\Phi^t(x)).$$

3. Si  $X$  est de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) alors  $\Phi$  est aussi de classe  $C^r$  sur  $O_\Phi$ .

On dira que le champ  $X$  est *complet* si toutes les solutions sont définies sur  $\mathbb{R}$  (pas de phénomène d'explosion); on a alors  $O_X = \mathbb{R} \times U$ . Dans ce cas, pour chaque  $t$ , l'application  $\Phi^t$  est un  $C^r$ -difféomorphisme, d'après le deuxième point de la proposition. L'application  $t \mapsto \Phi_t$  est un morphisme de groupe de  $\mathbb{R}$  dans le groupe  $\text{Diff}^r(U)$  des difféomorphismes de  $U$  dans  $U$  de classe  $C^r$ , on dit que  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un sous-groupe à un paramètre de  $C^r$ -difféomorphismes de  $U$ .

*Preuve* — Premier point. Soit  $(t_0, x_0) \in O_X$ . Si  $t_0 = 0$ , utiliser la minoration locale du temps de vie. Si  $t_0 > 0$ , puisque l'intervalle de vie est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Phi^t(x_0)$  est défini pour  $t \in [0, t_0 + \varepsilon]$ , appliquer le lemme du chapitre précédent.

Le deuxième point est traité dans le premier exercice ci-dessous.

Pour  $r = 0, 1$ , le troisième point est une conséquence du chapitre précédent. Le cas des régularité d'ordre  $\geq 2$  se démontre par récurrence, et est traité dans le second exercice ci-dessous.  $\square$

---

**Exercice 65.**—

1. Soit  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  une courbe solution de l'EDO définie sur un intervalle  $J$ , et  $t_0 \in J$ . Montrer que la courbe  $\bar{\gamma} : s \mapsto \gamma(s + t_0)$  est encore une solution (définie sur l'intervalle translaté  $J - t_0$ ).
  2. En utilisant l'unicité des solutions, en déduire que, pour tout  $s$ ,  $\Phi^{s+t_0}(x) = \Phi^s(\Phi^{t_0}(x))$ .
- 

---

**Exercice 66.**— Soit  $X$  un champ de vecteur de classe  $C^{r+1}$ . On considère le champ de vecteur défini par la formule  $Y(x, u) = (X(x), DX(x).u)$ .

1. Donner son domaine de définition et sa régularité.
  2. Relier les solutions de ce système aux objets du chapitre précédent.
  3. Déduire de ce qui précède une preuve par récurrence que toute solution d'une EDO  $x' = X(x)$  avec  $X$  de classe  $C^r$  est de classe  $C^r$ .
- 

## 8.2 Equivalence de champs de vecteurs

---

**Exercice 67.**— Soit  $\gamma$  une solution de l'EDO  $x' = X(x)$ , et  $\Psi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme entre  $U$  et un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^m$ . En calculant la dérivée de  $\Psi \circ \gamma$ , trouver un champ de vecteur  $Y$  défini à partir de  $X$  et  $\Psi$  tel que la courbe  $\Psi \circ \gamma$  soit solution de l'EDO  $y' = Y(y)$ .

---

On dira que le champ  $Y$  défini par la formule ci-dessus est obtenu en transportant le champ  $X$  par le difféomorphisme  $\Psi$ , on notera  $Y = \Psi_*X$ . On dira aussi que les champs  $X$  et  $Y$  sont *conjugués*, ce vocabulaire étant justifié par l'énoncé suivant.

**Proposition 8.2.** *Notons  $\Phi_X, \Phi_Y$  les flots respectifs des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ . On a  $Y = \Psi_*X$  si et seulement si pour tout  $t$ , le difféomorphisme  $\Psi$  conjugue les temps  $t$  des flots  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  :  $\Phi_Y^t \Psi = \Psi \Phi_X^t$ .*

---

**Exercice 68.**— Démontrer la proposition. Aide : l'un des sens est donné par l'exercice précédent. Pour l'autre, dériver par rapport à  $t$  la relation de conjugaison, pour  $x$  fixé, en  $t = 0$ .

---

EXEMPLES :

- Cas linéaire.
- Un changement de variable explicite peut être vu comme un transport de champ de vecteurs. L'exercice suivant traite le cas d'une équation homogène.

---

**Exercice 69.**— Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On s'intéresse à l'EDO non autonome  $y' = f(y/x)$  (attention, ici la variable est notée  $x$ , et  $y$  est la fonction inconnue).

1. Mettre cette équation sous la forme d'une équation autonome en dimension deux, expliciter l'ouvert  $U$  et le champ de vecteurs  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondant.
2. Montrer que cette équation peut se transformer en une équation à variables séparables, à l'aide du changement de variable (ou plutôt de fonction inconnue)  $z = y/x$ . A nouveau, transformer cette deuxième équation en une équation autonome en dimension deux, et expliciter l'ouvert  $V$  et le champ de vecteurs  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondant.
3. Soit  $\Psi : U \rightarrow V$  le difféomorphisme défini par  $\Psi(x, y) = (x, y/x)$ . Calculer le champ  $\Psi_*X$  défini sur l'ouvert  $V$ . Conclusion ?

4. (optionnel, essentiellement indépendant de ce qui précède) Résoudre, à l'aide du changement de variable  $z = y/x$ , l'équation homogène

$$xy'(2y - x) = y^2.$$

(Solution : les courbes intégrales vérifient l'équation implicite  $y(x - y) = \lambda x$ .)

---

- Polaires.
- Introduction au théorème de redressement.

**Proposition.** Montrer la formule  $\Psi_{1*}\Psi_{2*} = (\Psi_1\Psi_2)_*$ .

### 8.3 Le théorème de redressement

Le théorème suivant résume, au moins dans l'esprit, plusieurs théorèmes des chapitres précédents. Il dit que tout champ de vecteur est localement équivalent au champ de vecteurs constant  $X_0 = (1, 0, \dots, 0)$ .

On se donne  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , et  $x_0 \in U$ .

**Théorème 8.3.** (théorème de redressement ou de la “boîte à flot”) On suppose que  $X(x_0) \neq 0$ . Alors il existe un  $C^r$ -difféomorphisme  $\Psi$  entre un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$  et un voisinage  $V(0)$  de 0, qui transporte le champ  $X$  sur le champ de vecteurs constant  $X_0$ .

---

**Exercice 70.**— Avec les notations du théorème, utiliser la proposition précédente pour décrire les courbes images par le difféomorphisme  $\Psi$  des solutions de l'EDO  $x' = X(x)$  passant par un point proche de  $x_0$ .

---

*Preuve* — Le vecteur  $e_1 = X(x_0)$  est supposé non nul, on peut donc le compléter en une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $\mathbb{R}^m$ . On pose alors

$$\Psi : (s_1, \dots, s_m) \mapsto \Phi^{s_1}(x_0 + s_2e_2 + \dots + s_me_m).$$

Puisque le flot  $(t, x) \mapsto \Phi^t(x)$  est défini sur un ouvert<sup>9</sup>, et que l'application  $\alpha$  est continue, cette formule définit  $\Psi$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^m$ . D'après les propriétés du flot, cette application est de classe  $C^r$ .

---

**Exercice 71.**— Calculer les dérivées partielles de  $\Psi$  en 0, et montrer qu'elles forment une base de  $\mathbb{R}^m$ . En déduire que l'application  $D\psi(0)$  est inversible.

---

D'après l'exercice, on peut appliquer le théorème d'inversion locale, qui nous dit qu'il existe un voisinage  $V(0)$  de 0 et un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$  tels que  $\Psi$  soit un  $C^r$ -difféomorphisme de  $V(0)$  sur  $V(x_0)$ . On conclut avec un dernier exercice.

---

**Exercice 72.**— Vérifier que le difféomorphisme  $\Psi$  transporte le champ de vecteur  $X_0$  sur le champ de vecteurs  $X$ .

---

□

---

9. En réalité on a juste besoin ici de la minoration locale du temps de vie.

## 8.4 Propriétés asymptotiques

Les systèmes dynamiques sont une branche des mathématiques qui s'intéresse aux champs de vecteurs à conjugaison près. Les propriétés asymptotiques sont un exemple typique de propriétés conservées par conjugaison.

Pour simplifier, on considère un champ de vecteur  $X$  de classe  $C^1$ , complet, défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . On note  $\Phi^t$  le flot associé.

**Définition.** Orbite (positive, négative, complète). Point d'équilibre, orbite périodique, ensemble  $\alpha$  et  $\omega$ -limites.

**Définition.** On rappelle que les flots  $(\Phi_X^t)$  et  $(\Phi_Y^t)$  sont dit ( $C^1$ -) conjugués s'il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\Psi$  tel que, pour tout  $t, \dots$  Si  $\Psi$  est seulement un homéomorphisme, on dira que les flots sont topologiquement conjugués.

Le but des systèmes dynamiques devrait être de classifier tous les champs de vecteurs à conjugaison topologique (ou lisse) près. Comme c'est un but inatteignable, on se contente d'essayer de décrire le comportement des orbites.

**Proposition.** *Toutes les définitions sont des invariants de conjugaison topologique.*

## 8.5 Conjugaison topologique des puits linéaires

Rappel : puit linéaire ; modèle.

**Théorème** (Conjugaison topologique des puits). *Si toute la valeurs propres d'une matrice  $A$  ont une partie réelle strictement négative, alors le flot  $(e^{tA})$  est topologiquement conjugué au flot  $(e^{-t}Id)$ .*

Remarque : pas de conjugaison  $C^1$  (...). Exemple très courant en dynamique, deux flots  $C^\infty$  qui sont topologiquement conjugués, mais pas  $C^1$  conjugués.

*Démonstration.* On considère la norme euclidienne adaptée fournie par le théorème sur les puits : *il existe une norme euclidienne  $N_*$ , dite norme adaptée, et une constante  $a > 0$  telles que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  et  $t > 0$ ,*

$$N_*(e^{tA}x_0) \leq e^{-ta}N_*(x_0).$$

On remarque que chaque orbite (autre que celle du point fixe 0) rencontre la sphère unité  $S$  pour cette norme en un unique point. Le "temps de rencontre" est une fonction continue (et même lisse)  $\tau : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . De même, chaque orbite du flot modèle rencontre la sphère standard  $S_0$  en un unique point  $\Phi_0^{\tau_0(x)}(x)$ . On construit la conjugaison en envoyant  $S$  sur  $S_0$  via un homéomorphisme  $\Psi$  (qu'on peut trouver comme la restriction d'une application linéaire), et en prolongeant  $\Psi$  à  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  en posant

$$\Psi(x) = \Phi_0^{-\tau(x)}(\Psi(\Phi^{\tau(x)}(x))).$$

Cette application est continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , d'inverse continue (donnée par une formule analogue), et elle se prolonge continument en 0 en un homéomorphisme qui conjugue les deux flots (...).  $\square$

## 8.6 EDO sur les variétés

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$  et de dimension  $d$ . Rappel : ceci signifie que l'inclusion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^N$  est localement difféomorphe à l'inclusion de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^N$ . L'espace tangent à  $M$  en un point  $x \in M$ ,  $T_x M$ , est l'ensemble des vecteurs vitesses au temps 0 de toutes les courbes  $C^1 \gamma : ]-1, 1[ \rightarrow M$  vérifiant  $\gamma(0) = x$ . C'est un sous-espace vectoriel de dimension  $d$ .

Un champ de vecteurs sur  $M$  est une application  $X : M \rightarrow TM = \cup_x T_x M$  telle que, pour tout  $x$ ,  $X(x) \in T_x M$ .

Les théorèmes d'existence et d'unicités se généralisent à ce cadre.

**Théorème.** *Supposons  $M$  compacte, et  $X$  est de classe  $C^1$ . Pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe alors une unique courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  solution du problème*

$$\gamma(0) = x \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

La preuve n'est pas très difficile : le problème local se résout en utilisant les cartes de la sous-variété pour ramener le problème à une EDO dans  $\mathbb{R}^d$  (on transporte le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$ ). On démontre ensuite l'existence d'une solution maximale en recollant les solutions locales (comme dans  $\mathbb{R}^N$ ), puis on montre que le champ est complet en utilisant la compacité de  $M$ .

## 8.7 Systèmes Dynamiques

Voici quelques problèmes et résultats (parmi tant d'autres).

- Si  $X$  est un champ de vecteurs autonome sur le plan, sans point d'équilibre, alors tous les ensembles  $\alpha$  et  $\omega$ -limites sont vides (théorie de Poincaré-Bendixson).
- Tout champ de vecteurs sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  possède un zéro sur la sphère (théorème de la sphère chevelue de Brouwer, vers 1910).
- Il existe un champ de vecteurs sur la sphère unité  $\mathbb{S}^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , appelé champ de Hopf, dont toutes les orbites sont périodiques (ce sont des cercles). Tout champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^3$  assez proche de celui-ci possède une orbite périodique (théorème de Seifert, 1948).
- (Théorème de Kuperberg, 1993) Il existe un champ de vecteurs de classe  $C^\infty$  (ou même analytique) sur  $\mathbb{S}^3$  et qui n'a aucune orbite périodique dans la sphère.
- Problème de Smale : existe-t-il un champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{S}^3$  tel que pour chaque point  $x$  sur la sphère, l'orbite de  $x$  est dense dans la sphère ?

Ce dernier problème est une question ouverte. Si on remplace la sphère par un tore (une bouée), alors la réponse est positive (et facile).

## 8.8 Linéarisation

A ECRIRE.

## 8.9 Flots de gradients

A ECRIRE.

## 9 Equations différentielles analytiques

On va étudier les solutions d'une EDO  $x' = f(x, t)$  où  $f$  est une fonction analytique (cf définition plus bas). Toute fonction analytique étant  $C^\infty$ , les résultats des chapitres précédents nous disent que pour toute condition initiale  $x(a) = b$ , il existe une unique solution définie au voisinage de  $a$ , et que cette solution est de classe  $C^\infty$ . Nous allons voir qu'elle est en fait analytique. La preuve n'utilisera pas les chapitres précédents, et donne donc une nouvelle démonstration de l'existence et unicité dans ce cadre.

### 9.1 Rappels sur les fonctions analytiques

#### Séries entières

**Séries formelles** en  $X$  sur un corps  $\mathbb{K}$ . Opérations sur  $\mathbb{K}[[X]]$  :  $S_1 + S_2, \lambda S$  (structure d'ev),  $S_1 S_2$  (structure d'algèbre). On définit l'ordre d'une série comme le rang du plus petit coefficient non nul. (\*) *L'ordre du produit est la somme des ordres.* En particulier, on a un anneau intègre.

*Série substituée*  $S \circ T$  : substitution de  $T(Y)$  à  $X$ , lorsque  $T$  est une série d'ordre  $\geq 1$ . La remarque clé est que l'ordre de  $T(Y)^n$  est  $\geq n$ . On définit donc formellement la série  $S \circ T(Y)$  en disant que le coefficient de  $Y^N$  dans cette série est égal au coefficient de  $Y^N$  dans la série

$$\sum_{n=0}^N a_n (T(Y))^n$$

qui est obtenue à partir de  $T$  par un nombre fini d'opérations de type produit et somme, opérations qu'on a préalablement définies. On remarque que (\*) *ce coefficient de  $Y^N$  est un certain polynôme  $P_N$ , bien défini, en les variables  $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N$ .* Exemple : calcul explicite de  $P_0, P_1$ .

On a  $(S_1 + S_2) \circ T = \dots, (S_1 S_2) \circ T = \dots, (S \circ T) \circ U = \dots$

*Série inverse.* La série  $1 - Y$  a un inverse  $I(Y) = \dots$  dans  $\mathbb{K}[[Y]]$ . On en déduit que  $S$  a un inverse ssi  $a_0 \neq 0$ , et dans ce cas l'inverse s'exprime en substituant  $S(X)$  à  $Y$  dans  $I(Y)$ .

*Série dérivée.* Dérivée d'un produit, dérivées successives. Série réciproque...

**Convergence.** On suppose maintenant  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'ensemble des  $r \geq 0$  tels que la série  $\sum |a_n| r^n$  converge est un intervalle, on appelle rayon de convergence  $\rho$  sa borne supérieure. La série converge normalement (en particulier uniformément et absolument) sur tout disque de rayon  $< \rho$  (et diverge pour tout  $z$  de module  $> \rho$ ) (preuve facile avec le lemme d'Abel : comparer à une série géométrique). Exemples de rayons de convergence. La convergence se conserve par somme, produit, dérivation, et la valeur de la série est compatible avec ces opérations. (\*) Une série substituée fabriquée à partir de deux séries de rayons de convergence non nul a encore un

rayon de convergence non nul. Même type d'énoncé pour la série inverse, pour la série réciproque.

Expression des coefficients à l'aide des dérivées (unicité du DSE).

## Fonctions analytiques

Une fonction  $f$  est dite *analytique* sur un ouvert  $D$  si elle est DSE en chaque point  $x_0$  de  $D$ , autrement dit si, pour chaque  $x_0 \in D$ , il existe une série  $S$  de rayon de convergence non nul, telle que, pour tout  $x$  assez proche de  $x_0$ ,

$$f(x) = S(x - x_0).$$

Une fonction analytique est  $C^\infty$ , et (\*) ses dérivées sont analytiques, égales à la somme de la série dérivée. L'analyticité est stable par somme, produit, inverse (sur le complémentaire des zéros), (\*) substitution, primitive (lorsqu'elle existe).

Exemple : supposons qu'une fonction analytique  $x(t)$  soit solution de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = 0$  avec  $f$  analytique. On a alors une égalité semblable entre les séries formelles.

Exemple : polynôme, fractions rationnelles. L'exponentielle aussi, ce qui découle du résultat suivant.

*La somme d'une série entière est une fonction analytique sur son disque de convergence.* Ce fait n'a rien d'évident. On le montre en considérant la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) X^n.$$

## Fonctions holomorphes

Une application  $f$ , définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , est holomorphe si elle admet une dérivée, au sens complexe, en chaque point de  $D$ . Il est facile de voir qu'une fonction analytique est holomorphe, mais il est remarquable que la réciproque soit vraie. En particulier, une fonction holomorphe est automatiquement infiniment dérivable au sens complexe (ici, les cadre réels et complexes diffèrent fondamentalement).

**Théorème.** *Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si elle est analytique. (Ceci équivaut encore au fait que  $f$  est différentiable, et sa différentielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire).*

Pour démontrer qu'une fonction holomorphe est DSE en tout point, on commence par étudier les intégrales sur un chemin, et on montre qu'une fonction holomorphe vérifie la formule de Cauchy : si  $f$  est holomorphe sur un ouvert  $D$ , on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

où  $\gamma$  est un chemin entourant  $a$  (par exemple un petit cercle autour de  $a$ ). La preuve de l'existence d'un DSE consiste alors à utiliser le DSE de l'inverse de  $z - a$ .

## 9.2 EDO analytiques

Soit  $f$  une fonction définie et développable en série entière (DSE) au voisinage d'un point  $b \in \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On se donne  $a \in \mathbb{R}$ , et on considère le problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(y), y(a) = b.$$

### Exemples

1)  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ . La fonction exponentielle est solution, elle est analytique, c'est-à-dire DSE au voisinage de chacun de ses points.

2)  $y' = (1 - y)^{-1}$ ,  $y(0) = 0$ . Sur  $\mathbb{R}$ , variables séparables, on écrit  $(1 - y)dy = dx$  on trouve  $y(x) = 1 - (1 + 2x)^{1/2}$ .

3) Méthode des coefficients indéterminés. Pour la première équation  $y' = y$ , par exemple, on aurait pu chercher une solution DSE et trouver les coeffs par récurrence. Exercice : résoudre ainsi l'EDO  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

Dans tous les cas, on a trouvé des solutions analytiques.

### Théorème de Cauchy-Lipschitz analytique

**Théorème (Cauchy).** *Le problème admet une unique solution  $\phi$  définie et DSE sur un voisinage de  $a$ .*

*Démonstration.* On considère le cas  $a = 0$  et  $b = 0$ , auquel il est facile de se ramener (...). On écrit

$$f(y) = \sum_{p \geq 0} c_p y^p$$

et on cherche la fonction inconnue  $y = \phi(x)$  sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n.$$

Autrement dit les coeffs  $c_p$  sont donnés, et les coeff  $a_n$  sont inconnus. Il s'agit de voir (1) que l'EDO admet une "solution formelle", c'est-à-dire qu'il existe une série qui satisfait l'équation quand on remplace  $y$  par la série, et (2) que cette série a un rayon de convergence non nul.

**Étape 1** On injecte  $\phi$  dans l'EDO. A gauche, le coeff de  $x^n$  est  $(n + 1)a_{n+1}$ . A droite (...), on voit que le coeff de  $x^n$  est un polynôme en  $a_1, \dots, a_n$  et  $c_0, \dots, c_n$ . On en déduit, par récurrence, que  $a_n = Q_n(c_0, \dots, c_n)$  où  $Q_n$  est un certain polynôme. Deux remarques importantes : 1) les coeffs de  $Q$  sont des nombres rationnels positifs, 2)  $Q$  ne dépend pas de l'EDO (de la fonction  $f$ ). Réciproquement, la fonction  $\phi$  correspondant à la suite de nombres  $(a_n)$  donnée par ces relations satisfait l'EDO. On remarque aussi que la preuve de cette proposition n'utilise pas la convergence de la série définissant  $f$ . Autrement dit, on a existence et unicité d'une "solution formelle" pour toute "EDO formelle" :

**Proposition.** Pour toute série (formelle)  $f(y) = \sum_{p \geq 0} c_p y^p$ , il existe une unique série  $\phi(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$  qui satisfait formellement l'équation  $\phi'(x) = f(\phi(x))$ ,  $\phi(0) = 0$ , elle est donnée par des relations du type

$$a_n = Q_n(c_0, \dots, c_n)$$

où  $Q_n$  est un certain polynôme à coeffs positifs, et qui ne dépend pas de l'EDO.

Il reste à montrer la CV de la série  $\sum a_n x^n$ . On utilise la méthode des séries majorantes.

**Etape 2 : une série majorante pour  $f$**  Une série (formelle)  $\sum C_p y^p$  est une série majorante de la série  $\sum c_p y^p$  si les  $C_p$  sont des réels positifs, et on a, pour tout  $p$ ,  $|c_p| \leq C_p$ .

Soit  $y$  n'importe quel nombre du domaine de convergence de  $\sum c_p y^p$ , la série  $\sum |c_p y^p|$  converge, en particulier la suite  $(|c_p y^p|)_p$  est bornée (elle tend vers 0) par un nombre  $M$ . On en déduit, pour tout  $p$  :  $|c_p| \leq M r^{-p}$  où  $r = |y|$ . La série correspondant à  $C_p = M r^{-p}$  est majorante.

**Etape 3 : résolution de l'équation pour la série majorante.** Soit

$$F(y) = \sum M r^{-p} y^p = \sum M \left(\frac{y}{r}\right)^p = \frac{rM}{r-y}.$$

C'est une série de rayon de CV  $r$ . Considérons l'EDO

$$\frac{dy}{dx} = F(y), y(0) = 0.$$

On la résoud facilement par séparation des variables, la solution est

$$\Phi(x) = r - (r^2 - 2Mrx)^{\frac{1}{2}}.$$

qui est bien DSE, écrivons  $\Phi(x) = \sum A_n x^n$ .

**Etape 4** La proposition suivante est immédiate en utilisant la résolution formelle et le fait (essentiel!) que les polynômes  $Q_n$  sont à coeffs positifs.

**Proposition.** La série  $\sum A_n x^n$  est une série majorante de  $\sum a_n x^n$ .

Puisque la série  $\sum A_n x^n$  a un rayon de convergence  $> 0$  et est majorante pour  $\sum a_n x^n$ , on en déduit immédiatement que cette deuxième série a un rayon de convergence strictement positif. Ceci termine la preuve.  $\square$

On a utilisé notamment que si les fonctions  $f$  et  $\phi$  sont DSE en 0 et que  $\phi(0) = 0$ , alors la fonction  $f \circ \phi$  l'est aussi, et son DSE est obtenu comme on pense. Pour une preuve, cf Cartan p22.

## 10 Repères chronologiques

(Extrait de *Les équations différentielles ont 350 ans*, Wanner, 1988.)

### Les motivations (début XVIIème siècle)

Galilée (1564-1642) : les lois de la physique s'écrivent dans un langage mathématique. Découverte de lois de la dynamique (les projectiles suivent, dans le vide, des trajectoires paraboliques ; formule pour la période du pendule simple, etc.). Ces découvertes sont essentiellement expérimentales, Galilée n'a pas les outils pour justifier ces lois.

Kepler énonce ses lois sur le mouvement des planètes (1609 pour les deux premières, 1618 pour la troisième). Là encore, il s'agit d'une découverte expérimentale, basée sur les observations très précises de l'astronome Tycho Brahé.

La *Géométrie* de Descartes paraît en 1637. Parmi les problèmes que Descartes et Fermat ont vainement cherché à résoudre : (premier problème de Debeaune) : *Chercher une courbe telle qu'en chaque point P, si on note T le point d'intersection de la tangente avec l'axe des x, et N le point de cet axe au-dessous de P (PN est perpendiculaire à l'axe), la distance de T à N est une constante a.*

Les *Discours et démonstrations mathématiques* de Galilée paraissent en 1638. Ils contiennent les deux observations suivantes. Une chaînette suspendue par deux clous sur un mur se place presque au-dessus d'une parabole. Pour un corps glissant sous l'effet de la pesanteur, le mouvement le plus rapide entre deux points donnés n'a pas lieu le long d'une droite, mais d'un arc de cercle.

### L'invention du calcul différentiel (fin XVIIème siècle)

Newton, Leibniz (philosophe, juriste, fonctionnaire, théologien...). Calcul infinitésimal. Intégration d'équations différentielles par la méthode des séries (livre de Newton écrit vers 1671, mais publié en 1736).

*Dans son ouvrage «Methodus fluxionum», écrit vers 1671, mais publié seulement en 1736, les équations différentielles sont pour Newton des objets mathématiques, au même titre que les équations polynomiales, contenant des «fluxions». On n'y voit aucune relation avec les problèmes de la mécanique qui d'ailleurs auraient été des équations d'ordre 2. Newton résout les équations différentielles par des séries infinies et démontre sa méthode dans des exemples choisis au hasard comme*

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

*Cette équation se trouve donc être la première équation différentielle jamais résolue, avec solution (pour la condition initiale  $y(0) = 0$ )*

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

Grâce au calcul différentiel, Leibniz résoud le premier problème de Debeaune, les Bernouilli rectifient les erreurs de Galilée : la chaînette n'est pas une parabole (mais le graphe d'un cosinus hyperbolique).

«...Mr. Leibnits remarque en Galilée deux fautes considérables : c'est que cet homme-là, qui étoit, sans contredit, le plus clairvoyant de son tems dans cette matière, vouloit conjecturer que la courbe de la chaînette étoit une Parabole, que celle de la plus vite descente étoit un Cercle...» (Joh. Bernoulli, 1697)

### Résolutions explicites (XVIIIème siècle)

Seul Jacob Bernoulli a compris l'article obscur de Leibniz (publié en 1684). Bernouilli, Euler (élève de Johann) : intégrations explicites (but : ramener toute EDO à un calcul de primitive), et sa méthode d'approximation, sans preuve de convergence (1768). Il faut attendre Mc Laurin (1742) pour comprendre vectoriellement la relation  $f = ma$  ; en particulier auparavant la force était perçue comme un vecteur, mais pas la vitesse ou l'accélération. C'est seulement à partir de cette date qu'on traduit la relation fondamentale de la dynamique en la projetant sur trois axes.

EDO linéaires, refs ?

Lagrange est le premier à traiter les systèmes d'équations différentielles dans son travail sur la théorie du son et, surtout, dans sa célèbre mécanique analytique de 1788. Il introduit la méthode de la variation de la constante.

### Les fondements théoriques (XIXème siècle)

Cauchy : preuve de la convergence de la méthode d'Euler (1820), en supposant essentiellement  $f$  de classe  $C^1$  ; solutions holomorphes des EDO holomorphes, cad preuve de la convergence des séries de Newton (1830 ; Weierstrass 1842).

*M. Cauchy annonce, que, pour se conformer au voeu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses. (Conseil d'instruction de l'Ecole polytechnique, 24 nov. 1825).*

Lipschitz 1868, ignorant les travaux de Cauchy. Condition de Lipschitz (que Cauchy déduisait de ses hypothèses, par les accroissements finis).

Peano 1886 (dimension 1), 1890.

Picard expose sa méthode (surtout pour les EDP) dans un article de 1890.

Lemme de Gronwall : 1919.

### Les systèmes dynamiques, ou théorie qualitative des ED (XXème siècle)

Poincaré, Lorentz, (May). Lyapounov, Andronov, Thom-Smale.

Théorèmes de linéarisation : Poincaré, Hartman-Grobman (1959), Sternberg (1957).

# Agrégation

Notions extraites du programme de l'agrégation qui sont concernées par le cours.

## Leçons

– Directement concernées :

Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études qualitatives des solutions.

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.

Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle.

– Autres :

Espaces de fonctions : exemples et applications.

Espaces complets. Exemples et applications.

Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

Étude métrique des courbes. Exemples.

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.

## Programme de l'écrit

Séries formelles. Séries entières, fonctions holomorphes.

Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales. Portrait de phase, comportement qualitatif. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.