Solutions maximales, explosion et barrières

Exercice 1 (Solutions maximales)**.** Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. En admettant le théorème (d'existence et d'unicité locales) de Cauchy-Lipschitz, montrer que, pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$, l'équation $y' = \phi(t, y)$ admet une unique solution sur un intervalle ouvert I_{t_0,y_0} maximal. Autrement dit, toute autre solution de même condition initiale, sur un intervalle ouvert J, vérifie que J est contenu dans I_{t_0,y_0}.

Exercice 2 (Explosion des solutions maximales en temps fini)**.** Soit f une solution maximale, d'intervalle de vie $]a, b[$, d'une équation différentielle de la forme $y' = \phi(t, y)$ où $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Le but est de montrer que si b est fini alors f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en b.
D'après l'exercice 8, l'ensemble Ω des valeurs d'adhérence de f en b est un intervalle fermé non vide $[\alpha, \beta] \subset [-\infty, +\infty]$ éventuellement réduit à un point.

a) Montrer que f ne peut avoir une limite finie en b.

b) On suppose que $\alpha \neq \beta$ et on considère deux réels $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

   i) Montrer que le graphe de f coupe les droites horizontales d'ordonnées α' et β' en une infinité de points d'abscisses arbitrairement proches de b.

   ii) En déduire qu'il existe une suite $(t_n)_n$ d'éléments de $]a, b[$ tendant vers b et satisfaisant

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \alpha' \leq f(t_n) \leq \beta' \quad \text{et} \quad |f'(t_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   iii) Aboutir à une contradiction. [Indication : ϕ est continue et donc bornée sur tout compact.]

c) Conclure que Ω est le singleton $\{+\infty\}$ ou $\{-\infty\}$ et que f converge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice 3 (Barrières horizontales et non-explosion des solutions)**.** On considère l'équation différentielle

$$y' = \cos y + \frac{1}{2}\sin t.$$

a) À l'aide du dessin, trouver quelques droites horizontales qui sont des barrières montantes. Vérifier par le calcul. Même question pour des barrières descendantes.

b) Soit f la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$. Montrer qu'elle est bornée et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que toute solution est bornée et définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Non-explosion des solutions)**.** On considère l'équation différentielle

$$y' = y^2 - t.$$

a) Déterminer les trois régions du plan où le champ de tangentes a une pente nulle, positive, négative.

b) Soit $M_0 = (t_0, y_0)$ un point de la région où la pente du champ est négative et f la solution vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$, c'est-à-dire dont le graphe passe par le point M_0. Montrer que f est définie (au moins) sur $[t_0, +\infty[$.

Exercice 5 (Barrières et limite en $+\infty$ des solutions)**.** On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = -y - \frac{y}{t}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Montrer que, si g est une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = -y$, alors le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1). Montrer de même que, si h est une solution strictement négative de $y' = -y$, alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

b) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$?

c) Soit f la solution maximale de l'équation différentielle (1) de condition initiale $f(t_0) = y_0$. En utilisant les deux premières questions, montrer que f est définie (au moins) sur $[t_0, +\infty[$ et que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 6 (Barrières et divergence des solutions)**.** On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = \cos y - t.$$

a) Soit g une solution maximale de l'équation différentielle $y' = 2 - t$. Montrer que le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1).

b) Résoudre l'équation différentielle $y' = 2 - t$. Quelle est la limite en $+\infty$ des solutions ?

c) Soit f une solution maximale de l'équation différentielle (1) d'intervalle de vie $I =]a, b[$ (avec a et b éventuellement infinis). En utilisant les questions précédentes, montrer que $f(t) \to -\infty$ quand $t \to b$ (on distinguera les cas $b < +\infty$ et $b = +\infty$).

Exercice 7 (Barrières et explosion en temps fini.)**.** On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = e^y + t.$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et soit f la solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(1) = y_0$. On voudrait montrer que f « explose en temps fini » : l'intervalle de vie de f est du type $I =]a, b[$ avec b fini et $\lim_{t \to b} f(t) = +\infty$.

a) Déterminer la solution g de l'équation différentielle $y' = e^y$ avec la condition initiale $g(1) = y_0$. Quel est son intervalle de vie ? Tracer grossièrement son graphe.

b) Montrer qu'un morceau du graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). Conclure.

Exercice 8 (Généralités sur les valeurs d'adhérence)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X, $f : A \to Y$ une application quelconque et $a \in \overline{A}$.
Pour tout point x dans un espace topologique, $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x.

a) Lorsque $X = A = \mathbb{N}$ et $Y = \mathbb{R}$, rappeler ce qu'est une valeur d'adhérence de la suite réelle f (sous-entendu en $+\infty$). *Plus géneralement, on dit qu'un point y de Y est une valeur d'adhérence de f en a si,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall W \in \mathcal{V}(y) \quad f(V \cap A) \cap W \neq \emptyset.$$

b) On suppose que a admet un *système fondamental de voisinages* dénombrable, c'est-à-dire une famille dénombrable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de a telle que, pour tout voisinage W de a, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n \subset W$.

   i) Étant donné $y \in Y$, montrer que y est une valeur d'adhérence de f en a si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ converge vers y.

   ii) Montrer que, dans un espace métrique, tout point admet un système fondamental de voisinages dénombrable.

c) Soit $\Omega \subset Y$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a.

   i) Montrer que $\Omega = \displaystyle\bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(V \cap A)}$ et qu'en particulier, si a admet un système fondamental de voisinages dénombrable (V_n), alors $\Omega = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(V_n \cap A)}$.

   ii) En déduire que Ω est fermé dans Y.

d) Y est supposé compact. Montrer que

   i) pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de Y, si $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.

   ii) Ω n'est pas vide.

   iii) si Ω est un singleton $\{y\}$, alors f converge vers y en a. [Indication : considérer un fermé de Y ne contenant pas y.]

e) Le but de cette question est de munir la droite réelle achevée $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$ par abus, d'une topologie naturelle qui la rende compacte. On considère, par exemple, la distance d définie par

$$d(y_1, y_2) = \left| \frac{y_1}{1 + |y_1|} - \frac{y_2}{1 + |y_2|} \right|$$

avec la convention $\frac{\pm\infty}{+\infty} = \pm 1$.

i) Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto y$ est un homéomorphisme sur son image (c'est-à-dire que $i : \mathbb{R} \mapsto i(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme).

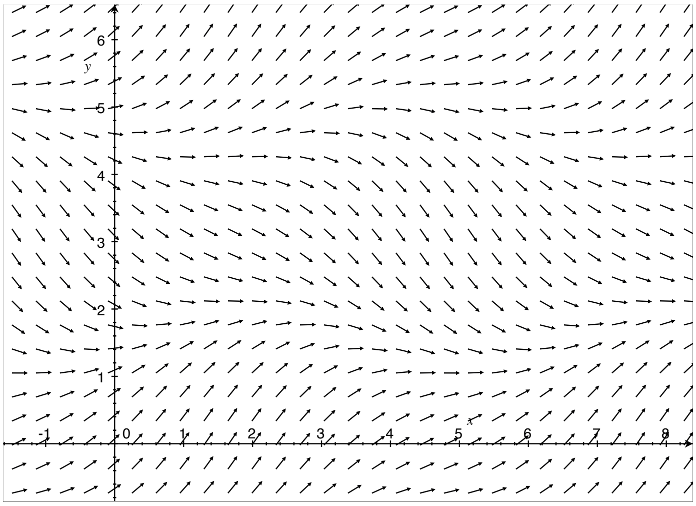
ii) Montrer que l'application $h : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1], y \mapsto \frac{y}{1+|y|}$ est un homéomorphisme.

iii) En déduire que $\overline{\mathbb{R}}$ est compacte.

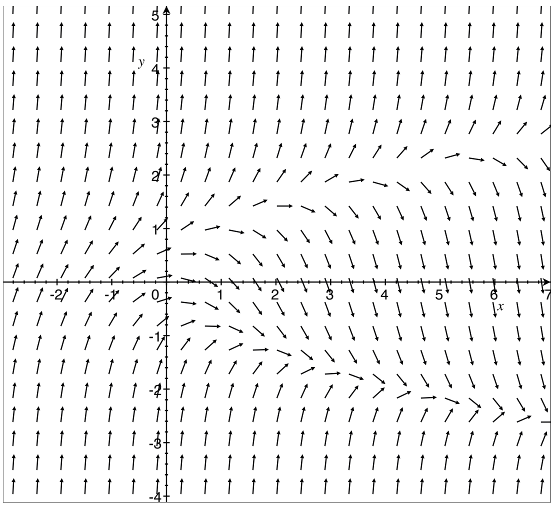
f) Enfin, on suppose que $f : A \subset X \to \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction continue à valeurs réelles.

i) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est un fermé non vide de $\overline{\mathbb{R}}$.

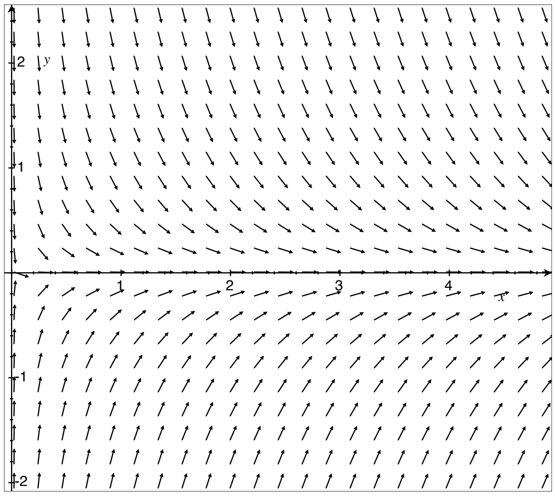
ii) Montrer que si A est connexe (par arcs) alors $\Omega \subset [-\infty, +\infty]$ est un intervalle fermé.



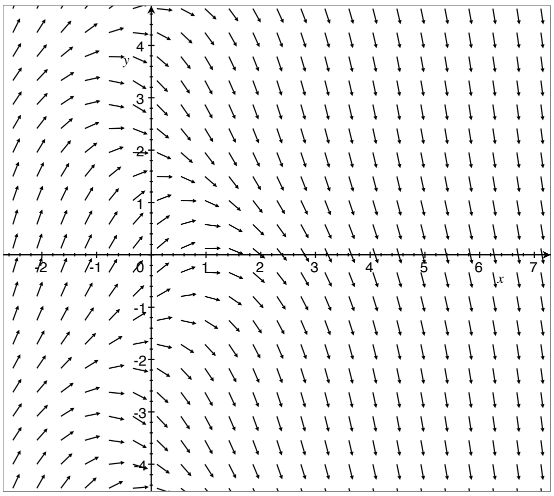
$y' = \cos y + \frac{1}{2}\sin t$



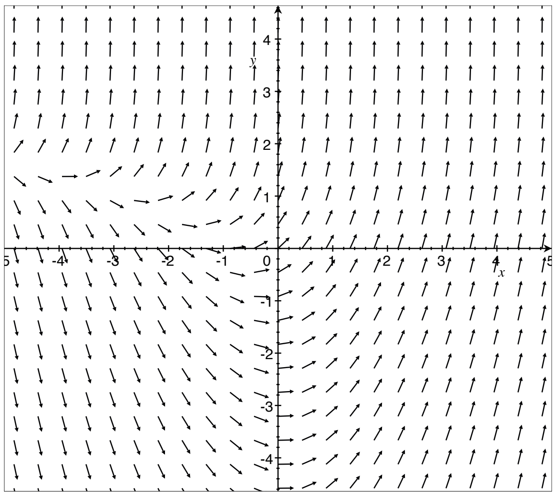
$y' = y^2 - t$



$y' = -y - \frac{y}{t}$



$y' = \cos y - t$



$y' = e^y + t$