Equations différentielles linéraires
à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Exercice 1. Esquisser dans le plan le champ de vecteurs (linéaire) $x \mapsto Ax$ dans les trois cas suivants.

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[Indication : la dernière est un multiple d'une matrice de rotation.]

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2\pi \\ 2\pi & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad B = PAP^{-1}.$$

a) Esquisser le portrait de phase de l'équation différentielle $X' = AX$ dans le plan.
b) Quel est le lien entre les solutions de $X' = AX$ et celles de $Y' = BY$?
c) En déduire l'allure du portrait de phase de la seconde équation.

Exercice 3 (Un exemple de selle)**.** On considère le système d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = 2x - y \end{array} \right.$.

a) Ecrire ce système sous la forme $X' = AX$ avec $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
b) Donner l'ensemble des solutions de $Y' = DY$ et en déduire celles de $X' = AX$.
c) Comment obtenir le portrait de phase de $X' = AX$ à partir de celui de $Y' = DY$? Esquisser ces deux portraits de phase.

Exercice 4. Le mouvement d'un chariot de masse m, relié à un point du plan par un ressort de raideur $k > 0$, est modélisé par l'équation différentielle

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

où $x(t)$ est l'écart à la position d'équilibre et $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement du chariot sur le plan.

a) Ecrire cette équation sous la forme $X' = AX$ avec $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres complexes de A en fonction de $\alpha = \frac{\mu}{2m}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
c) Quel est (intuitivement) le mouvement du chariot dans chacune des situations suivantes ?
   – Pas de frottement ($\alpha = 0$),
   – frottements faibles ($\alpha < \omega$),
   – frottements importants ($\alpha = \omega$ ou $\alpha > \omega$).
d) Esquisser le portrait de phase dans chacun des cas. On fera notamment apparaître les éventuels sous-espaces propres réels de A.
e) Déterminer les solutions et comparer au comportement prévu.
f) Dans le premier cas, montrer que la courbe paramétrée $t \mapsto X(t)$ est une ellipse.

Structure des solutions

Exercice 5 (Superposition)**.** Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $(V_j)_{j=1,\dots,n}$ une base de $\mathbb{C}^n$. Pour chaque j, on considère la solution $X_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de l'équation $X' = AX$ vérifiant la condition initiale $X_j(0) = V_j$. Montrer que toute solution de l'équation est combinaison linéaire (à coefficients complexes) des X_j.

Exercice 6 (De l'ordre n à l'ordre 1)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ des réels, avec $a_n \neq 0$. Trouver une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et toute application $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois, les assertions suivantes soient équivalentes :

a) x est la solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0,\ \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{array}\right.$

b) $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est la solution du problème de Cauchy $X'(t) = AX(t),\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 7. L'endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $V = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui, à une fonction, associe sa dérivée est noté D.

a) Soient f et g deux éléments de V. Pour tout entier naturel n, exprimer $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g (formule de Leibniz).

b) Pour tout nombre complexe λ, on considère la fonction $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. En déduire que

$$e_\lambda\, D^m(e_{-\lambda} f) = (D - \lambda \mathrm{id}_V)^m(f).$$

c) En déduire quel est l'ensemble $\ker(D - \lambda \mathrm{id}_V)^m$.

d) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes. En utilisant le lemme des noyaux (exercice 15), montrer que les solutions (dans V) de l'équation différentielle $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y^{(0)} = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.

Exponentielle de matrice

Exercice 8. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer e^{tA} pour

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & a & b \\ & & -b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Calculer l'exponentielle des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (Exponentielle et méthode d'Euler)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Appliquer la méthode d'Euler à l'équation différentielle $X' = AX$ où l'inconnue X est une fonction à valeurs dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Pour la condition initiale $X(0) = \mathrm{I}_n$, montrer que la solution approchée $\tilde{X}$ de pas $\delta > 0$ vérifie, pour tout entier k, $\tilde{X}(k\delta) = (\mathrm{I}_n + A\delta)^k$. Lorsque $\delta = 1/m$ où m est un entier strictement positif, calculer $\tilde{X}(1)$.

On s'attend naturellement à ce que la solution approchée $\tilde{X}$, obtenue grâce à la méthode d'Euler, se rapproche de la solution exacte au fur et à mesure que le pas δ tend vers 0.

b) Justifier l'égalité $e^A - \left(\mathrm{I}_n + \dfrac{A}{m}\right)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{m}{k}}{m^k}\right) A^k$.

c) Soit $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\left\| e^A - \left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{m}\right)^m \right\| \leq e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{m}\right)^m$$

et en déduire que

$$e^A = \lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{m}\right)^m.$$

Exercice 11. Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que e^A s'écrit sous la forme $P(A)$ où P est un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ de degré strictement inférieur à n. [Indication : la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.]

b) Lorsque n vaut 2, trouver une expression simple de e^A. [Indication : commencer par supposer que A est de trace nulle et utiliser le théorème de Cayley-Hamiton, puis se ramener à ce cas grâce à $A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2$.]

Exercice 12. Un *sous-groupe à un paramètre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞.

a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $t \mapsto e^{tA}$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Réciproquement, montrer que tout sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de cette forme.

Stabilité

Exercice 13. On considère l'équation différentielle $X' = AX$ avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur de l'espace caractéristique $\ker(A - \lambda\mathrm{I}_n)^m$ associé à la valeur propre λ.

a) Montrer, en utilisant l'exponentielle de matrice ou en vérifiant directement, que la solution de condition initiale $X(0) = V$ est donnée par

$$X(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} t^j (A - \lambda\mathrm{I}_n)^j V.$$

b) Etudier le comportement asymptotique de cette solution : à quelle condition $\|X(t)\|$ tend-elle vers 0, vers $+\infty$ ou reste-elle bornée ?

Exercice 14. On considère une équation différentielle linéaire $X' = AX$.

a) Montrer que l'origine est un *point d'équilibre* : pour tout réel t_0, la solution de condition initiale $X(t_0) = 0$ est constante.
Montrer que c'est le seul si, et seulement si, A est inversible.

b) On dit qu'un point d'équilibre X_0 est *stable* si toute solution de condition initiale $X(t_0) = X_0'$ proche de X_0 reste proche de X_0 dans le futur ($t \geq t_0$). On dit qu'un point d'équilibre stable X_0 est *asymptotiquement stable* si, de plus, toute solution de condition initiale $X(t_0) = X_0'$ proche de X_0 converge vers X_0 en $+\infty$.
Etudier la stabilité et la stabilité asymptotique de l'origine en fonction de la matrice A, notamment de ses valeurs propres.

Réduction des endomorphismes

Exercice 15 (Lemme des noyaux)**.** Soient K un corps, A un endomorphisme d'un espace vectoriel V sur K.

a) Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans K, premiers entre eux, montrer que

$$\ker(PQ)(A) = \ker P(A) \oplus \ker Q(A).$$

[Indication : théorème de Bézout dans l'anneau principal $K[X]$.]

b) De plus, montrer que la projection $\ker(PQ)(A) \to \ker Q(A)$ parallèlement à $\ker P(A)$ est de la forme $R(A)$ où R est dans $K[X]$.

c) Enoncer et montrer une généralisation de ce qui précède avec des polynômes $P_1, \dots, P_n$ deux à deux premiers entre eux.

d) En déduire la décomposition de V en somme directe des espaces caractéristiques de A lorsque V est de dimension finie (et que K est algébriquement clos) ? [Indication : polynôme caractéristique ou minimal de A.]

Exercice 16 (Décomposition de Dunford)**.** Soient K un corps, A un endomorphisme d'un espace vectoriel V sur K de dimension finie. On suppose que le polynôme caractéristique (ou minimal) de A est scindé. Montrer qu'il existe deux endomorphismes D et N de V tels que

- D est diagonalisable et N est nilpotent,
- $A = D + N$,
- D et N commutent,
- D et N s'écrivent comme des polynômes en A. [Indication : exercice 15 question c).]