Equations différentielles linéraires
à coefficients variables

Exercice 1. Résoudre l'équation

$$t(t-1)x' + (t-1)x = 1$$

sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 2. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= \quad y \\ y' &= 2x - y + e^t \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

a) Ecrire la matrice A du système homogène associé et calculer e^{tA}.

b) Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène.

c) Déterminer l'ensemble des solutions du système (non homogène).

Exercice 3. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= tx - y \\ y' &= x + ty \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions réelles de la variable t.

a) Résoudre le problème de Cauchy de condition initiale $(0, x_0, y_0)$. [Indication : poser $z = x + iy$.]

b) Même question pour

$$\begin{cases} x' &= tx - y + t\cos t - t^3 \sin t \\ y' &= x + ty + t\sin t + t^3 \cos t \end{cases} .$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions de $x'' + 4x = \tan t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue et soit X une solution de l'équation différentielle linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$$

de condition initiale $X(0) = X_0$. Montrer que pour tout t, $X(t)$ et X_0 sont semblables (conjugués). [Indication : chercher X sous la forme $X(t) = P(t)^{-1}X_0P(t)$ et trouver une équation différentielle dont P doit être solution.]