Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \longmapsto & X(t,x) \end{array} \right.$ un champ de vecteur, dépendant du temps t, continu et localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable x, c'est-à-dire,

$$\forall (t_0,x_0) \in I \times \Omega \quad \exists \varepsilon, k > 0 \quad \begin{cases} \forall t \in I & |t-t_0| < \varepsilon \\ \forall x_1 \in \Omega & \|x_1 - x_0\| < \varepsilon \\ \forall x_2 \in \Omega & \|x_2 - x_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \quad \|X(t,x_1) - X(t,x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Un tel champ de vecteurs X est dit *autonome* s'il ne dépend pas du temps et, dans ce cas, X sera simplement considéré comme une fonction définie sur Ω.

Exercice 1 (Partition de l'espace par les orbites)**.** L'*orbite* d'un point (t_0, x_0) de $I \times \Omega$, pour le champ de vecteurs X, est l'ensemble

$$\mathcal{O}_{(t_0,x_0)} = \{(t, x(t)) \in I \times \Omega \mid t \in J\}$$

où $x : J \to \mathbb{R}^n$ est la solution maximale de l'equation $x' = X(t,x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$. Montrer que l'ensemble des orbites forment une partition de $I \times \Omega$, autrement dit, que la réunion des orbites est $I \times \Omega$ et que toutes deux orbites distinctes sont disjointes.

Exercice 2 (Translation)**.** Le champ de vecteurs X est supposé autonome. Soit $x : J \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale de l'équation $x' = X(x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, montrer que la solution maximale de condition initiale $x(t_0 + \tau) = x_0$ est

$$\begin{array}{ccc} J + \tau & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & x(t - \tau) \end{array}$$

où $J + \tau$ désigne l'intervalle $\{t + \tau \mid t \in J\}$.

Exercice 3 (Orbites périodiques)**.** Le champ de vecteurs X est supposé autonome. Montrer que, si une solution maximale x de $x' = X(x)$ satisfait $x(t_0 + T) = x(t_0)$ pour un certain réel t_0 de son intervalle de vie et un certain réel T, alors x est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Exercice 4 (De non automone vers autonome)**.** Soit le champ de vecteurs autonome sur $\tilde{\Omega} = I \times \Omega$,

$$\tilde{X} : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (t,x) & \longmapsto & (1, X(t,x)) \end{array} \right. .$$

Pour toute fonction dérivable $x : J \to \mathbb{R}^n$, montrer que x est une solution de l'équation $x' = X(t,x)$ si, et seulement si, la fonction $\tilde{x} : t \mapsto (t, x(t))$ est une solution de l'équation $\tilde{x}' = \tilde{X}(\tilde{x})$.

Stabilité et champ de vecteurs complet

Exercice 5 (Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra)**.** On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = +ax - cxy \\ y' = -by + dxy \end{array} \right.$$

régissant l'évolution d'une population x de proies et d'une population y de prédateurs, où a, b, c, d sont des réels strictement positifs.

a) Hormis $(0,0)$, montrer qu'il existe un unique point d'équilbre (x_e, y_e).

b) Montrer que des fonctions solutions x et y, de condition initiale $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[^2$, ne s'annulent jamais.

c) On pose $u = x/x_e$ et $v = y/y_e$. Quelles sont les équations différentielles satisfaites par u et v ?

d) Montrer que la fonction

$$E : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ (u,v) & \longmapsto & (ue^{-u})^b(ve^{-v})^a \end{array} \right.$$

est une intégrale première, c'est-à-dire que $E(u(t),v(t))$ ne dépend pas de t.

e) Tracer les lignes de niveau de E.

f) En déduire que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

g) Montrer que toute solution maximale est périodique et que le point d'équilibre (x_e, y_e) est stable.

Exercice 6 (Champ de vecteurs à support compact)**.** Le *support* d'un champ de vecteurs (autonome) $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est le fermé $\overline{\Omega \setminus X^{-1}(0)}$. Montrer qu'un champ de vecteurs, dont le support est compact, est complet.

Exercice 7 (Champ de gradient)**.** Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère le champ de vecteurs $\nabla V : \Omega \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, défini par

$$\forall x \in \Omega \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{d}_x V\, h = \langle \nabla V(x) \mid h \rangle$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que, pour toute solution $x : J \to \Omega$ de l'équation différentielle $x' = -\nabla V(x)$, V est décroissante le long de x, c'est-à-dire que la fonction $V \circ x$ est décroissante.

b) Montrer que si V admet un minimum local en un point x_0 alors x_0 est un point d'équilibre stable pour l'équation $x' = -\nabla V(x)$.

Exercice 8 (Fonctions de Liapounov)**.** Soit x_0 un zéro d'un champ de vecteurs autonome X sur Ω. Une *fonction de Liapounov* pour le point d'équilibre x_0 est une fonction continue $L : U \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de x_0,

– admettant x_0 comme unique minimum global,
– et telle que, pour tout $x_1 \neq x_0$ dans U, et toute solution x de condition initiale $x(0) = x_1$, la fonction $L \circ x$ soit strictement décroissante (sur son domaine de définition).

a) Montrer que la seconde condition est vérifiée dès que, pour tout $x_1 \neq x_0$ dans U,

$$\langle \nabla L(x) \mid X(x) \rangle < 0.$$

b) Montrer que, si le point d'équilibre x_0 admet une fonction de Liapounov, alors x_0 est (asymptotiquement) stable.