Exercice 1 (Transport de champ de vecteurs)**.** Soient Φ l'application du plan dans lui-même définie par $\Phi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\v^2-u\end{pmatrix}$ et X le champ de vecteurs constant $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que Φ est un difféomorphisme.

b) Calculer le champ image $Y=\Phi_*X$ du champ X par le difféomorphisme Φ.

c) Quel est le lien entre les solutions de l'équation différentielle $y'=Y(y)$ et celles de $x'=X(x)$?

d) En déduire le lien entre le flot de Y et celui de X.

Exercice 2 (Petites oscillations du pendule)**.** Le mouvement d'un pendule lâché (sans élan) avec un angle initial u (par rapport à la verticale) est modélisé par les équations suivantes.

$$(P)\qquad\begin{cases}\ddot\theta+\sin\theta=0\\ \theta(0)=u\\ \dot\theta(0)=0\end{cases}$$

a) Montrer que le problème (P) est équivalent à un problème de Cauchy de la forme

$$(P'):\quad x'=X(x),\quad x(0)=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$$

où X est un champ de vecteurs dans le plan. Quel est le lien entre θ et x ? En déduire que, pour tout $u\in\mathbb{R}$, le premier problème admet une unique solution maximale θ_u satisfaisant $\theta_u(0)=u$, $\theta'_u(0)=0$.

b) Montrer que $\frac{1}{2}\dot\theta^2-\cos\theta$ est une intégrale première.

c) Déterminer $\theta_{k\pi}$ pour tout entier k.

d) Montrer que θ_u est définie sur $\mathbb{R}$ entier, pour tout $u\in\mathbb{R}$.

e) Justifier que la fonction

$$\Theta:\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (u,t) & \longmapsto & \theta_u(t)\end{cases}$$

est de classe C^∞.

f) Justifier que le développement limité de Θ par rapport à u, au voisinage de 0, à l'ordre p, s'écrit

$$\Theta(u,t)=c_0(t)u^0+c_1(t)u^1+\cdots+c_p(t)u^p+o(u^p)$$

où les fonctions c_k sont des fonctions de classe C^∞. Exprimer ces dernières à l'aide de dérivées partielles de Θ.

g) Que vaut c_0. Montrer que $\Theta(-u,t)=-\Theta(u,t)$. En déduire que tous les termes pairs du développement limité sont nuls.

h) Justifier soigneusement que

$$\ddot\theta_u(t)=\sum_{k=0}^{p}\ddot c_k(t)\,u^k+o(u^p).$$

i) En utilisant les développements limités ci-dessus à des ordres p bien choisis, trouver c_1, c_3, …

Exercice 3 (Lemme de Morse)**.** Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose, pour $a<b$ réels, que le module $|\nabla f|$ du gradient de f est minorée par une constante strictement positive sur $f^{-1}([a,b])$. Montrer alors qu'il existe un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui envoie $f^{-1}(a)$ sur $f^{-1}(b)$.
[Indication : montrer que le flot du champ du vecteurs $X(x)=\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ est complet, calculer $f(\varphi_t^X(x))$ en calculant sa dérivée et montrer que le flot envoie $f^{-1}(a)$ sur $f^{-1}(b)$.]