Exercice 1 (Redressement global)**.** On considère le champ de vecteurs

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\cos(y), \sin(y)). \end{array} \right.$$

a) Ce champ de vecteurs est-il complet ?

b) Représenter l'ensemble des points où X est horizontal (respectivement vertical). Trouver des droites dont un paramétrage (à expliciter) est solution de $(x,y)' = X(x,y)$.

c) Déterminer l'ensemble des translations qui laissent X invariant (i.e l'ensemble des translations T telles que $T^*X = X$).

d) Trouver un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant : pour tout t, $\Phi^t(K) \cap K \neq \emptyset$, où $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot associé à X.

e) Quel est le flot associé à un champ de vecteurs constant $Y \equiv \vec{u}$ sur $\mathbb{R}^2$?

f) En déduire qu'il n'existe pas de difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ redressant globalement le champ X, c'est-à-dire tel que le champ f^*X soit un champ de vecteurs constant.

Exercice 2 (Courbe tangente à un champ de vecteurs)**.** Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 ne s'annulant pas sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et Γ une courbe de classe C^1 tangente à X en chacun de ses points. Montrer que Γ admet un paramétrage solution de l'équation $x' = X(x)$.

Exercice 3 (Champ tangent à une hypersurface)**.** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, X un champ de vecteurs de classe C^1 sur U et f une fonction de classe C^2 sur U. On note $M = f^{-1}(\{0\})$ et on suppose que $\mathrm{d}_x f \neq 0$ pour tout $x \in M$ et que X est tangent à M, i.e $\mathrm{d}_x f(X(x)) = 0$ pour tout $x \in M$. Montrer que toute orbite de X rencontrant M est *incluse* dans M.