**Exercice 1** (Garer sa voiture)**.** L'état d'une voiture se déplaçant dans le plan est décrit par un système de coordonnées $(x, y, \theta, \phi)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les coordonnées du milieu de l'essieu arrière, $\theta \in \mathbb{S}^1$ est l'angle orienté entre l'axe $Ox$ et la direction de la voiture et $\phi \in ]-\pi/2, \pi/2[$ est l'angle entre cette direction et celle des roues. Sur cette variété $M$ de dimension 4, on considère les deux champs de vecteurs $T = (0, 0, 0, 1)$ et $A = (\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{L}\tan\phi, 0)$ où $L$ est la distance entre les deux essieux.

a) A quelles évolutions (ou flots) correspondent ces champs de vecteurs ?

b) Justifier que pour tout chemin $\gamma \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ emprunté par la voiture, le vecteur $\gamma'(t)$ doit appartenir au champ de plans engendré par $A$ et $T$.

c) Montrer que
$$[A, T] = -\frac{1}{L\cos^2\phi} R \qquad \text{où} \qquad R = (0, 0, 1, 0).$$
Interpréter ceci en termes de conduite.

d) Calculer $[A, R]$. Comment le résultat permet-il de se garer ?

**Exercice 2.** Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On considère les champs de vecteurs linéaires $X$ et $Y$ sur $\mathbb{R}^n$ donnés par
$$X(x) = Ax \qquad Y(x) = Bx.$$

a) Calculer les flots de $X$ et de $Y$.

b) Montrer que le champ $[X, Y]$ est linéaire et calculer la matrice associée.

**Exercice 3** (Champs de vecteurs sur la sphère)**.** On considère la sphère comme la compactification du plan $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ où le plongement $j$ est l'inverse de la projection stéréographique. Montrer que tout champ de vecteurs constant sur le plan se prolonge à la sphère. Même question avec la champ $X$ défini par $X(x, y) = (x, y)$.
On rappelle que si $(x_N, y_n)$ et $(x_S, y_S)$ sont les coordonnées obtenues par projection stéréographique par rapport aux pôles nord et sud respectivement, on a au-dessus de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$
$$x_N = \frac{x_S}{{x_S}^2 + {y_S}^2} \qquad y_N = \frac{y_S}{{x_S}^2 + {y_S}^2}.$$