# Examen première session : corrigé succinct

---

**Exercice 1.** 1. Expliciter les solutions et représenter l'allure du portrait de phase du système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= -5x(t) - 12y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) \end{cases}.$$

2. Vérifier que le point $(0,0)$ est un point d'équilibre du système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x'(t) &= -5x(t) - 12y(t) + 7\sin((x(t) - y(t))^2) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) - \cos(x(t)) + 1 \end{cases}.$$

Que peut-on dire des solutions de condition initiale proche de 0 ? Justifier à l'aide d'un résultat du cours.

**Corrigé.** 1. Il s'agit d'un système linéaire à coeffcient constant, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont complexes conjuguéeset sont $\lambda_\pm = -5 \pm i\sqrt{6}$. Des vecteurs propres respectifs sont les vecteurs $(i\sqrt{6}, 1)$ pour $\lambda_-$ et $(-i\sqrt{6}, 1)$ pour $\lambda_+$. On utilise comme base les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres. On considère donc la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A = P \begin{pmatrix} -5 & -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$, et on sait que les solutions sont alors données par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \exp(-5t) P \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{6}) & -\sin(2\sqrt{6}) \\ -\sin(2\sqrt{6}) & \cos(2\sqrt{6}) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Dans la terminologie du cours, il s'agit d'un foyer attractif. Voir cours pour l'allure du portrait de phase. On doit y voir des spirales centrée en l'origine. Les orbites convergent vers l'origine en tournant dans le sens négatif).

2. Un rapide développement limité à l'ordre 1 nous apprend que la différentielle du champ de vecteur au point d'équilibre $(0,0)$ est la matrice $A$ de la première question. Le critère de Routh non linéaire vu en cours indique que (les valeurs propres étant de partie réelle strictement négative), il existe un voisinage de $(0,0)$ dont l'orbite de tous les points converge vers $(0,0)$ à l'infini.

**Exercice 2.** Soient $A : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{R})$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ deux applications continues telles que

$$\int_0^{+\infty} |||A(t)||| \, dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \|p(t)\| \, dt < +\infty.$$

Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = A(t)x(t) + p(t)$$

sont définies à tout temps et bornées dans le futur.

**Corrigé.** Comme on ne suppose pas a priori que les $A(t)$ commutent, on ne dispose pas de formule explicite (avec exponentielle) pour les solutions. En revanche, si on note $a(t) = |||A(t)|||$ et $b(t) = \|p(t)\|$, on a l'inégalité

$$\|x'(t)\| \leq a(t)\|x(t)\| + b(t).$$

D'après le lemme de Gronwall, on a alors pour tout $t$ où la solution est définie, $\|x(t)\| \leq \rho(t)$ où $\rho$ est la solution du problème de Cauchy $\rho'(t) = a(t)\rho(t) + b(t)$, $\rho(0) = \|x(0)\|$. Or, nous avons vu à de multiples reprises en cours que ce problème a une solution explicite définie sur $\mathbb{R}$ :

$$\rho(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)\left(\|x(0)\| + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(u)\,du\right) b(s)\,ds\right).$$

Il ne peut donc pas y avoir explosion en temps finie et les solutions sont définies à tout temps. Enfin, la fonction $\rho$ donnée ci-dessus est bornée sur $[0, +\infty[$ d'après l'hypothèse faite. Il en est donc de même pour les solutions $x(t)$.

**Exercice 3.** Soient $p$ et $f$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On cherche à savoir s'il existe une application $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \ -x''(t) + p(t)x(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Les théorèmes du cours s'appliquent-ils directement au problème (1) ?
2. Justifier que chacun des deux problèmes

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \ -x''(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall t \in [0,1], \ -x''(t) + p(t)x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

   admet une unique solution de classe $C^2$. On notera respectivement $y$ et $z$ ces solutions.
3. Montrer $x$ est solution de (1) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y + z$ et $\lambda y(1) + z(1) = 0$.
4. En déduire que si le problème homogène

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \ -x''(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

   admet une unique solution alors il en est de même pour (1).
5. Montrer que si $p(t)$ est positif pour tout $t$, (1) possède une unique solution.

**Corrigé.**
1. Non ! Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique avec une condition sur $x(0)$ et $x'(0)$. Ici, les conditions portent sur $x(0)$ et $x(1)$.
2. On peut appliquer Cauchy-Lipschitz grâce à l'astuce habituelle qui consiste à voir un système d'ordre 2 en dimension 1 comme un système d'ordre 1 en dimension 2. Comme il s'agit de la version "linéaire" de Cauchy-Lipschitz, les solutions sont définies à tout temps.
3. Si $x$ est solution de (1) alors $\lambda = x'(0)$ convient. En effet, $x - z$ vérifie le même problème de Cauchy que $\lambda y$, et par unicité on a alors $x - z = \lambda y$. L'autre implication est une vérification immédiate.

4. Si $x_1$ et $x_2$ sont deux solutions distinctes de (1), alors leur différence est une solution non nulle du problème homogène. Donc l'unicité dans le problème homogène (qui admet toujours la solution nulle) implique l'uncité dans (1).

   Réciproquement, si $u$ est une solution non nulle du problème homogène, alors, par la question précédente, appliquée au cas où $f = 0$ (dans ce cas la fonction $z$ est nulle), on a $u = \lambda y$ et $\lambda y(1) = 0$. comme $u$ est non nulle, $\lambda$ est non nulle donc $y(1) = 0$. Il y a alors deux cas. Si $z(1)$ est nul, alors, toute fonction de la forme $\lambda y + z$ est solution de (1), et il n'y a pas unicité. Si $z(1)$ est non nul, alors, on n'a jamais de $\lambda$ tel que $\lambda y(1) + z(1) = 0$, et il n'y a pas existence au problème (1).

5. D'après la question précédente, il suffit de vérifier que le problème homogène a une unique solution.

   On sait que 0 en est solution. Donc seule l'unicité peut poser problème. Supposons que l'on ait une solution $x$ non identiquement nulle. Soit $I$ un intervalle maximal sur lequel $x$ est $> 0$. La solution $x$ s'annule aux bornes de $I$. L'hypothèse implique que sur $I$, $x''(t) = p(t)\,x(t) \geq 0$. La fonction $x$ est donc convexe sur $I$[1]. Comme elle est nulle aux bornes, elle doit être négative sur $I$. Contradiction, sauf si $I$ est vide. On raisonne de même pour montrer que $x$ n'est jamais $< 0$. Il y a donc une unique solution au problème homogène : la solution nulle.

**Exercice 4.** On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= (1 - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) - x(t). \end{cases}$$

1. Expliciter la solution qui passe par le point $(0, 1)$ à $t = 0$. Indication : elle est périodique et reste à distance constante de l'origine! On note $u$ cette solution.
2. Calculer la matrice dans la base canonique de la différentielle du champ de vecteur associé à cette équation différentielle. On note $A(t)$ cette matrice, au point $u(t)$.
3. On note $R(t)$ la résolvante de l'équation linéaire $X'(t) = A(t)X(t)$, entre les temps 0 et $t$. Donner une équation différentielle vérifiée par $\det R(t)$. Calculer $\det R(2\pi)$.
4. Justifier que l'application de premier retour sur l'axe des $y$ est bien définie et contractante au voisinage de $(0, 1)$. En déduire le comportement des solutions voisines de l'orbite périodique pour de grandes valeurs de $t$. Faire un rapide dessin.

**Corrigé.** 1. La courbe $u(t) = (\sin(t), \cos(t))$ convient.

2. La matrice recherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2xy - 1 & 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$. En $(x, y) = u(t)$, on obtient

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sin(t)\cos(t) - 1 & -2\cos(t)^2 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le cours, on a l'équation différentielle $\frac{d}{dt}\det R(t) = \mathrm{trace}(A(t))\det R(t)$. Comme la trace de $A(t)$ est $-2\cos^2(t) = -1 - \cos(2t)$, on peut résoudre explicitement l'équation différentielle :

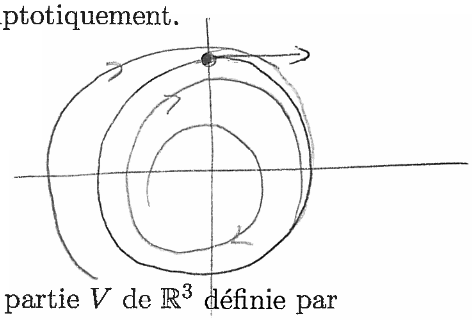
$$\det R(t) = \exp\left(\int_0^t (-1 - \cos 2s)ds\right)$$

   En $t = 2\pi$, on obtient $\det R(2\pi) = \exp(-2\pi)$.

1. Si l'on n'est pas familier avec la notion de fonction convexe, on peut raisonner sur la dérivée de $x$ qui doit être croissante...

4. Au point $(0,1)$ notre champ de vecteurs vaut $(1,0)$. L'axe des $y$ est donc une section de Poincaré du flot. Le cours affirme donc que l'application de premier retour $r$ est bien définie et de plus que $R(2\pi)$ peut être trigonalisée avec pour valeurs propres, 1 et la différentielle de $r$. Cette différentielle (ou plutôt dérivée puisque $r$ est définie sur un intervalle) est donc $\det(R(2\pi) = \exp(-2\pi)$. Comme elle appartient à l'intervalle $]0,1[$, $r$ est bien contractante dans un voisinage du point considéré.

   On en déduit que les itérées par $r$ des points de l'axe proche de $(0,1)$ convergent vers $(0,1)$. Par conséquent, les orbites proches de l'orbite périodique tournent autour de l'orbite en s'en rapprochant asymptotiquement.



**Exercice 5.** On considère la partie $V$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

et $X$ le champ de vecteur donné pour tout $(x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des $z$,

$$X(x,y,z) = \left(-y - \frac{xz}{x^2+y^2}, x - \frac{yz}{x^2+y^2}, -1\right).$$

1. Montrer que $V$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2. Faire un rapide dessin représentant $V$ (Indication pour le dessin : remarquer que $V$ est invariante par rotation autour de l'axe des $z$ et utiliser les coordonnées polaires dans le plan $x, y$).
2. Montrer que l'orbite d'un point de $V$ pour le flot de $X$ reste dans $V$.
3. Que vaut la troisième coordonnée du flot d'un point $x$ au temps $t$ ? Démontrer que l'orbite d'un point de $V$ n'explose pas en temps fini.
4. Donner une idée qualitative du comportement des orbites de $X$ sur $V$. Représenter grossièrement ces orbites sur le dessin de $V$. Indication : Le champ $X$ sur $V$ est la somme de deux champs sur $V$, $(-y,x,0)$ et $(-\frac{xz}{x^2+y^2}, -\frac{yz}{x^2+y^2}, -1)$. Ce dernier appartient au plan contenant le vecteur $(x,y,0)$ et l'axe des $z$.

**Corrigé.**

1. $V = f^{-1}(0)$ où $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$. Comme la différentielle de $f$ ne s'annule pas sur $V$, on en déduit que $V$ est une sous-variété. C'est un hyperboloïde à une nappe (cf. un moteur de recherche pour voir des images !)
2. Il suffit de montrer que $X(x,y,z) \in T_{(x,y,z)}V$ en tout point de $V$, c'est à dire que $X(x,y,z) \in \ker df(x,y,z)$. La vérification est immédiate.
3. La troisième coordonnée d'une solution vérifie l'equation différentielle $z'(t) = -1$, donc $z(t) = z(0) - t$. Pour un point de $V$, on a à tout temps, $(x(t), y(t), z(t)) \in V$ donc $\|(x(t), y(t), z(t))\|^2 = -1 + 2z^2(t) = -1 + 2(z(0) - t)^2$. On voit qu'il ne peut pas y avoir explosion en temps fini.
4. Le premier champ donné dans l'indication fait tourner les points horizontalement, le deuxième les pousse vers le bas sans les faire tourner. Le champ $X$ fait donc tourner les points autour de l'hyperboloïde, tout en les faisant descendre :