Examen première session

Exercice 1.

1. Expliciter les solutions et représenter l'allure du portrait de phase du système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= -5x(t) - 12y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) \end{cases}.$$

2. Vérifier que le point $(0,0)$ est un point d'équilibre du système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x'(t) &= -5x(t) - 12y(t) + 7\sin((x(t) - y(t))^2) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) - \cos(x(t)) + 1 \end{cases}.$$

Que peut-on dire des solutions de condition initiale proche de 0 ? Justifier à l'aide d'un résultat du cours.

Exercice 2. Soient $A : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{R})$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ deux applications continues telles que

$$\int_0^{+\infty} |||A(t)|||\, dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \|p(t)\|\, dt < +\infty.$$

Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = A(t)x(t) + p(t)$$

sont définies à tout temps et bornées dans le futur.

Exercice 3. Soient p et f deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On cherche à savoir s'il existe une application $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solution du problème suivant

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + p(t)x(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Les théorèmes du cours s'appliquent-ils directement au problème (1) ?
2. Justifier que chacun des deux problèmes

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + p(t)x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^2. On notera respectivement y et z ces solutions.

3. Montrer x est solution de (1) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y + z$ et $\lambda y(1) + z(1) = 0$.
4. En déduire que si le problème homogène

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution alors il en est de même pour (1).

5. Montrer que si $p(t)$ est positif pour tout t, (1) possède une unique solution.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\begin{cases} x'(t) & = y(t) \\ y'(t) & = (1 - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) - x(t). \end{cases}$$

1. Expliciter la solution qui passe par le point $(0,1)$ à $t=0$. Indication : elle est périodique et reste à distance constante de l'origine ! On note u cette solution.
2. Calculer la matrice dans la base canonique de la différentielle du champ de vecteur associé à cette équation différentielle. On note $A(t)$ cette matrice, au point $u(t)$.
3. On note $R(t)$ la résolvante de l'équation linéaire $X'(t) = A(t)X(t)$, entre les temps 0 et t. Donner une équation différentielle vérifiée par $\det R(t)$. Calculer $\det R(2\pi)$.
4. Justifier que l'application de premier retour sur l'axe des y est bien définie et contractante au voisinage de $(0,1)$. En déduire le comportement des solutions voisines de l'orbite périodique pour de grandes valeurs de t. Faire un rapide dessin.

Exercice 5. On considère la partie V de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

et X le champ de vecteur donné pour tout (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z,

$$X(x,y,z) = \left(-y - \frac{xz}{x^2+y^2}, x - \frac{yz}{x^2+y^2}, -1 \right).$$

1. Montrer que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2. Faire un rapide dessin représentant V (Indication pour le dessin : remarquer que V est invariante par rotation autour de l'axe des z et utiliser les coordonnées polaires dans le plan x, y).
2. Montrer que l'orbite d'un point de V pour le flot de X reste dans V.
3. Que vaut la troisième coordonnée du flot d'un point x au temps t ? Démontrer que l'orbite d'un point de V n'explose pas en temps fini.
4. Donner une idée qualitative du comportement des orbites de X sur V. Représenter grossièrement ces orbites sur le dessin de V. Indication : Le champ X sur V est la somme de deux champs sur V, $(-y, x, 0)$ et $(-\frac{xz}{x^2+y^2}, -\frac{yz}{x^2+y^2}, -1)$. Ce dernier appartient au plan contenant le vecteur $(x,y,0)$ et l'axe des z.