Correction du devoir surveillé

Durée : 1 heure.

Exercice 1. Tout d'abord, on remarque que les fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ sont en général définies sur $\mathbb{R}_+$ hormis pour certaines valeurs de α, notamment pour $1/n$ où n est un entier naturel impair, pour lesquelles cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto t\sqrt[3]{x}$ est continue, de classe C^∞ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x sur Ω, mais pas sur tout son ensemble de définition $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Il n'est pas nécessaire de le justifier mais on remarque en effet, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, que le taux d'accroissement au voisinage de 0

$$\frac{|t\sqrt[3]{x} - t\sqrt[3]{0}|}{|x-0|} = \frac{|t||x|^{1/3}}{|x|} = \frac{|t|}{|x|^{2/3}}$$

converge vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une et une seule solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, de condition initiale $x(t_0) = x_0$. Comme $(0,1)$ appartient à Ω, le second problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t\sqrt[3]{x(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

admet donc une unique solution maximale.

En revanche, le point $(0,0)$ n'appartient pas à Ω et le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas. Néanmoins, la fonction nulle (sur $\mathbb{R}$) est une solution (maximale) évidente, de condition initiale $x(0) = 0$.

Par ailleurs, supposons qu'il existe une autre solution $t \mapsto x(t)$ qui ne s'annule pas en un certain point t_0. Par continuité, x ne s'annule pas sur un voisinage de t_0 et l'équation peut alors se réécrire sur ce voisinage

$$\Big(-\frac{1}{3}+1\Big)\, x'(t)\, x(t)^{-1/3} = \Big(-\frac{1}{3}+1\Big)\, t = \frac{2}{3}\, t.$$

Or une primitive de $x \mapsto (-\frac{1}{3}+1)\, x^{-1/3}$ sur $\mathbb{R}^*$ est

$$x \mapsto |x|^{2/3} = \begin{cases} \text{si } x > 0,\ x^{2/3} \\ \text{si } x < 0,\ (-x)^{2/3} \end{cases}$$

donc on obtient, en intégrant sur ce voisinage de t_0,
- soit $x(t)^{2/3} = \frac{1}{3}t^2 + C$ si $x(t_0) > 0$,
- soit $(-x(t))^{2/3} = \frac{1}{3}t^2 + C$ si $x(t_0) < 0$,

où C est un réel (vérifiant $\frac{1}{3}t_0^2 + C > 0$), autrement dit,

$$\text{soit} \quad x(t) = \Big(\frac{1}{3}t^2 + C\Big)^{3/2}, \qquad \text{soit} \quad x(t) = -\Big(\frac{1}{3}t^2 + C\Big)^{3/2}.$$

Comme on cherche des solutions de condition initiale $x(0) = 0$, autres que la fonction nulle, les fonctions

$$x_{\varepsilon_-,\varepsilon_+} : t \mapsto \begin{cases} \varepsilon_+ 3^{-3/2}\, t^3 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \varepsilon_- 3^{-3/2}\, t^3 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

semblent être de bons candidats. Elles sont bien continues sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 également car les limites à gauche et à droite coïncident avec la valeur en 0. Elles sont dérivables et de dérivée nulle en 0. Enfin elles vérifient bien l'équation différentielle

$$x'(t) = \pm 3^{-3/2}\, 3\, t^2 = \pm 3^{-1/2} t^2 = t\big(\pm 3^{-3/2}\, t^3\big)^{1/3} = t\sqrt[3]{x(t)}.$$

Ainsi, le premier problème de Cauchy admet (au moins) cinq solutions maximales distinctes (toutes définies sur $\mathbb{R}$) : la fonction nulle et $x_{+,+}$, $x_{-,-}$, $x_{+,-}$, $x_{-,+}$.

Même si ce n'est pas demandé pas l'énoncé, on peut montrer que cette liste est exhaustive, c'est-à-dire que ces cinq fonctions sont les seules solutions de condition initiale $x(0) = 0$. Il a déjà été démontré que toute solution, non partout nulle, est localement de la forme $t \mapsto \pm(\frac{1}{3}t^2+C)^{3/2}$. Réciproquement, une telle fonction est une solution sur les intervalles où $\frac{1}{3}t^2+C > 0$, c'est-à-dire,

- sur $\mathbb{R}$ si $C > 0$,
- sur $]-\infty, -\sqrt{-3C}[$ et $]\sqrt{-3C}, +\infty[$ si $C \leq 0$.

Ces intervalles sont maximaux, au sens où $(t, x(t))$ sort de Ω quand t tend vers $\pm\sqrt{-3C}$ dans le cas où $C \leq 0$. Et ce sont les seules solutions maximales (restant dans Ω) d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (valables sur Ω). Parmi ces solutions, les seules qui peuvent se prolonger en $t = 0$ par $x(0) = 0$ vérifient alors $C = 0$ et sont exactement les $t \mapsto \pm 3^{-3/2}\, t^3$ sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. Ainsi toute solution, de condition initiale $x(0) = 0$ et non toujours nulle, coïncident nécessairement sur tout intervalle où elle ne s'annule pas avec $t \mapsto \pm 3^{-3/2}\, t^3$. Par conséquent, la liste de solutions ci-dessus est exhaustive.

Exercice 2. 1. Réduisons d'abord la matrice A. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$$

de sorte que ses valeurs propres sont les réels 1 et -2. Comme χ_A est un polynôme annulateur de A (théorème de Cayley-Hamilton) et que ce polynôme est scindé (sur $\mathbb{R}$) et à racines simples, A est diagonalisable (dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Cherchons ses vecteurs propres. Pour la valeur propre 1, il suffit de trouver une solution de $Av = v$ qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un solution évidente. Pour la valeur propre -2, il suffit de trouver une solution de $Av = -2v$ qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un solution évidente. Ainsi, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (v_1, v_2),

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\mathrm{com}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix} = D.$$

L'exponentielle de A peut donc être calculée de la façon suivante :

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & \\ & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - e^{-2} & e - e^{-2} \\ -2e + 2e^{-2} & -e + 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

2. Pour toute condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, la solution du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = -6x(t) - 5y(t) \end{cases}$$

est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -2e^t + 2e^{-2t} & -e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

3. Le portrait de phase de ce sytème différentiel est de type hyperbolique.

Exercice 3. 1. La fonction $(t, x) \mapsto x^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale $t \mapsto x(t)$ du problème de Cauchy $x' = x^2$, $x(0) = 1$. De plus, comme la fonction nulle est également solution de l'équation différentielle $x' = x^2$, si $x(t)$ s'annulait pour un certain t, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz impliquerait que $t \mapsto x(t)$ est nulle partout. Par conséquent, x ne s'annule jamais et on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1$$

et intégrer :

$$-\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right) = t - 0$$

autrement dit, la solution maximale est $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et a pour intervalle de vie $]-\infty, 1[$.

2. Comme $x^2 + t \geq x^2$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est une barrière montante pour la solution x_1 du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

et, comme $x(0) = 1 = \frac{1}{1-0}$, x_1 vérifie donc $x_1(t) \geq \frac{1}{1-t}$. Par conséquent, x_1 explose en temps fini (dans le futur) et le temps t auquel elle explose est inférieur ou égal à 1.

3. On pose $y_1(t) = x_1(-t)$ et on vérifie facilement que

$$y_1'(t) = -x_1'(-t) = -x_1(-t)^2 - (-t) = -y_1(t)^2 + t.$$

D'une part, comme $-y^2 + t \leq t$ pour tous $t \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, la solution de $y' = t$, de condition initiale $y(0) = 1$, est une barrière descendante pour y_1. Cette solution est $t \mapsto \frac{t^2}{2} + 1$ et celle-ci est inférieure à $y_1(t)$ pour $t \geq 0$. D'autre part, comme $-y^2 + t \geq -y^2$ pour tous $t \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, la solution de $y' = -y^2$, de condition initiale $y(0) = 1$, est une barrière montante pour y_1. Cette solution est $t \mapsto -\frac{1}{t+1}$ et celle-ci est inférieure à $y_1(t)$ pour $t \geq 0$. Finalement, pour tout $t \geq 0$,

$$-\frac{1}{t+1} \leq y_1(t) \leq \frac{t^2 + 2}{2}$$

donc y_1 n'explose pas en temps fini dans le futur, donc x_1 n'explose pas en temps fini dans le passé. Ainsi, l'intervalle de vie de x_1 est de la forme $]-\infty, b[$ avec $b \in]0, 1]$.