Devoir surveillé

Durée : 1 heure.

Exercice 1. On considère les deux problèmes de Cauchy suivants, où t et $x(t)$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = t\sqrt[3]{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x'(t) = t\sqrt[3]{x(t)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Admettent-ils une solution ? si oui, est-elle unique ? Justifier, expliquer. En particulier, précisez ce que vous entendez par "solution" dans votre réponse.

Exercice 2.

1. Calculer l'exponentielle de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Donner pour toute condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = -6x(t) - 5y(t) \end{cases}$$

3. Dessiner le portrait de phase du système.

Exercice 3.

1. Calculer la solution du problème de Cauchy posé sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

2. En déduire que la solution maximale $t \mapsto x(t)$ au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = x^2 + t \\ x(0) = 1 \end{cases},$$

explose en temps fini dans le futur.

3. Vérifier que $t \mapsto x(-t)$ est la solution maximale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2 + t \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

A l'aide de barrières bien choisies, montrer que $t \mapsto x(t)$ n'explose pas en temps fini dans le passé.