Correction du devoir surveillé

Exercice 1. a) Le champ de vecteur $\psi_* X$ est la composée de $\psi^{-1} : V \to U$, de

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (\mathrm{d}_x\psi, X(x)) \end{array}$$

et de l'application de composition

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (A, v) & \longmapsto & A(v) \end{array} \right. .$$

Or, la dernière est de classe C^∞ et, comme ψ est un difféomorphisme de classe C^{k+1} et que X est un champ de vecteurs de classe C^k, les deux premières sont de classe C^k. Donc $\psi_* X$ est de classe C^k.

b) Comme $X, Y : U \to \mathbb{R}^n$ sont des applications de classe C^k, leur somme $X+Y : x \mapsto X(x)+Y(x)$ est aussi de classe C^k. De même, comme $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k, l'application $fX : x \mapsto f(x)X(x)$ est de classe C^k. Ainsi, $X + Y$ et fX sont des champs de vecteurs sur U de classe C^k.

c) Pour tout y dans V (et avec $x = \psi^{-1}(y)$), on a par définition

$$(\psi_*(X + Y))(y) = \mathrm{d}_x\psi((X + Y)(x)) = \mathrm{d}_x\psi(X(x) + Y(x))$$

et comme $d_x\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire

$$(\psi_*(X + Y))(x) = \mathrm{d}_x\psi(X(x)) + \mathrm{d}_x\psi(Y(x)) = (\psi_*X)(y) + (\psi_*Y)(y) = (\psi_*X + \psi_*Y)(y)$$

donc $\psi_*(X + Y) = \psi_*X + \psi_*Y$. De même,

$$\begin{aligned}(\psi_*(fX))(y) &= \mathrm{d}_x\psi((fX)(x)) = \mathrm{d}_x\psi(f(x)X(x)) = f(x)\mathrm{d}_x\psi(X(x)) = f(\psi^{-1}(y))(\psi_*X)(y) \\ &= ((f \circ \psi^{-1})(\psi_*X))(y)\end{aligned}$$

ainsi $\psi_*(fX) = (f \circ \psi^{-1})(\psi_*X)$.

d) Pour tous champs de vecteurs X sur U et Y sur V, pour tous x dans U et y dans V tels que $y = \psi(x)$,

$$(\psi_*(\psi^*Y))(y) = \mathrm{d}_x\psi((\psi^*Y)(x)) = \mathrm{d}_x\psi\Big(\big(\mathrm{d}_x\psi\big)^{-1}\big(Y(\psi(x))\big)\Big) = Y(\psi(x)) = Y(y)$$

et

$$(\psi^*(\psi_*X))(x) = (\mathrm{d}_x\psi)^{-1}\Big((\psi_*X)(\psi(x))\Big) = (\mathrm{d}_x\psi)^{-1}\Big(\mathrm{d}_x\psi(X(x))\Big) = X(x)$$

ainsi, $\psi_*(\psi^*Y) = Y$ et $\psi^*(\psi_*X) = X$.

e) Pour pouvoir définir l'image réciproque ψ^*Y d'un champ de vecteurs Y sur V par

$$(\psi^*Y)(x) = (\mathrm{d}_x\psi)^{-1}(Y(\psi(x)))$$

il suffit que, pour tout x dans U, $\mathrm{d}_x\psi$ soit inversible. Dans ce cas, si ψ est de classe C^{k+1}, le théorème d'inversion locale garantit que ψ est un difféomorphisme local de classe C^{k+1}, de U sur son image $\psi(U) \subset V$. Dès lors, pour tout champ de vecteurs Y sur V de classe C^k, ψ^*Y est un champ de vecteurs sur U de classe C^k.

Exercice 2. a) Les coordonnées de ψ sont des fonctions de classe C^∞ donc ψ aussi. En particulier, ψ est différentiable et, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{\partial\psi}{\partial r}(r, \theta)h + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r, \theta)k = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

donc la matrice de $\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut r et n'est pas nul car $r \neq 0$. Ainsi, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi$ est inversible et, d'après le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local de classe C^∞. En revanche, ψ n'est pas un difféomorphisme global car elle n'est même pas bijective. En effet, elle n'est pas injective car $\psi(r, \theta + 2\pi) = \psi(r, \theta)$.

b) Comme $\psi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un difféomorphisme local, d'après la dernière question de l'exercice précédent, il est possible de calculer l'image réciproque de tout champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la matrice de l'inverse de $\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi$ est

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$(\psi^* X_{/\!/})\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = (\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi)^{-1}(X_{/\!/}(\psi(r,\theta))) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(\psi^* X_\perp)\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = (\mathrm{d}_{(r,\theta)}\psi)^{-1}(X_\perp(\psi(r,\theta))) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. a) Lorsque $\lambda = 0$, X n'est autre que le champ de vecteurs linéaire $X_\perp$: pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $X_\perp\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de rotation d'angle $\pi/2$. Les solutions de l'équation $z' = X(z)$ sont exactement de la forme

$$z(t) = e^{At}z_0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} z_0.$$

b) Soit z la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. On vérifie que $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, en notant $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout t

$$X(z(t)) = \left(1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{\|z(t)\|_2}\right)\right) X_\perp(z(t)) + \lambda\left(1 - \frac{1}{\|z(t)\|_2}\right) X_{/\!/}(z(t)) = X_\perp(z(t)) = z'(t)$$

car $\|z(t)\|_2 = 1$. Ainsi, la fonction z est la solution de condition initiale $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) D'après la question précédente, le cerle unité est l'orbite d'une solution périodique. Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si deux orbites se rencontrent alors elles coïncident. Par conséquent, toute solution maximale de $z' = X(z)$, de condition initiale $z(0) = z_0$ située dans le disque unité, reste dans le disque unité, sur tout son intervalle de vie. Comme le disque unité fermé est compact, le théorème sur l'explosion des solutions assure que toute telle solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

d) On remarque que le champ de vecteurs X s'exprime en fonction des champs de vecteurs $X_\perp$ et $X_{/\!/}$ de l'exercice précédent : pour tout $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$X(z) = \left(1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{\|z\|_2}\right)\right) X_\perp(z) + \lambda\left(1 - \frac{1}{\|z\|_2}\right) X_{/\!/}(z).$$

Et d'après le premier exercice, ψ^* est un morphisme de C^∞-modules de l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur ceux sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. En particulier,

$$(\psi^* X)(r,\theta) = \left(1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{\|\psi(r,\theta)\|_2}\right)\right)(\psi^* X_\perp)(r,\theta) + \lambda\left(1 - \frac{1}{\|\psi(r,\theta)\|_2}\right)(\psi^* X_{/\!/})(\psi(r,\theta))$$

et d'après les calculs de l'exercice précédent,

$$(\psi^* X)(r,\theta) = \left(1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{|r|}\right)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\left(1 - \frac{1}{|r|}\right)\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda r\left(1 - \frac{1}{|r|}\right) \\ 1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{|r|}\right) \end{pmatrix}$$

e) On calcule la dérivée z' de $z = \psi \circ w$ sachant que $w' = (\psi^* X)(w)$:

$$z'(t) = \mathrm{d}_{w(t)}\psi(w'(t)) = \mathrm{d}_{w(t)}\psi\Big((\psi^* X)(w(t))\Big) = \mathrm{d}_{w(t)}\psi\Big((\mathrm{d}_{w(t)}\psi)^{-1}X(\psi(w(t)))\Big) = X(z(t))$$

donc $z = \psi \circ w$ est solution de $z' = X(z)$.

f) Le flot φ_t^X de X est défini par la propriété que $t \mapsto \varphi_t^X(z_0)$ est la solution de $z' = X(z)$ de condition initiale $z(0) = z_0$, et de même pour φ_t^Y en remplaçant X par Y. Comme $Y = \psi^* X$, d'après la question précédente, $t \mapsto \psi \circ \varphi_t^Y(w_0)$ est solution de $z' = X(z)$ de condition initiale $z(0) = \psi(w_0)$. Donc par unicité, $\psi \circ \varphi_t^Y(w_0) = \varphi_t^X(\psi(w_0))$. Par conséquent,

$$\psi \circ \varphi_t^{\psi^* X} = \psi \circ \varphi_t^Y = \varphi_t^X \circ \psi.$$

g) D'après le calcul du champ $Y = \psi^* X$,

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = w' = Y(w) = \begin{pmatrix} \lambda r \left(1 - \frac{1}{|r|}\right) \\ 1 - \lambda \left(1 - \frac{1}{|r|}\right) \end{pmatrix}$$

ainsi $r' = \lambda r \left(1 - \frac{1}{|r|}\right)$ et $\theta' = 1 - \lambda \left(1 - \frac{1}{|r|}\right) = 1 - \frac{r'}{r}$.

h) Comme r est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et que $r(0) = r_0 > 0$, r est toujours positif. Ainsi, r satisfait l'équation différentielle $r' = \lambda(r-1)$. Or $r' = (r-1)'$, donc $r - 1$ est de la forme $t \mapsto Ce^{\lambda t}$ où C est une constante. Comme $r(0) = r_0 = 1 + Ce^0$, $C = r_0 - 1$ donc $r(t) = 1 + (r_0 - 1)e^{\lambda t}$.

Puis, comme $\theta' = 1 - \frac{r'}{r}$,

$$\theta(t) - \theta(0) = (t - 0) - \ln \frac{r(t)}{r(0)}$$

donc $\theta(t) = t - \ln \left(\frac{1}{r_0} + (1 - \frac{1}{r_0})e^{\lambda t}\right)$.

i) Pour une condition initiale $z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \,]0, +\infty[\times \{0\}$, la solution z, de l'équation $z' = X(z)$ de condition initiale $z(0) = z_0$, revient dans $]0, +\infty[\times \{0\}$ à chaque temps t où $\theta(t)$ est un multiple de 2π, autrement dit, à chaque temps t vérifiant $t - \ln \frac{r(t)}{r(0)} \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\theta(0) = 0$ et que $r(t) - 1 = (r(0) - 1)e^{\lambda t}$, le temps de premier retour $t_1 > 0$ dans $]0, +\infty[\times \{0\}$ à partir du point $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie

$$r(t_1) - 1 = (r(0) - 1)e^{\lambda t_1} \qquad \text{et} \qquad \theta(t_1) = t_1 - \ln \frac{r(t_1)}{r(0)} \in \{-2\pi, 0, +2\pi\}.$$

On remarque que r est strictement croissante, strictement décroissante ou constante exactement lorsque le réel $\lambda(r(0) - 1)$ est respectivement strictement positive, strictement négative, nulle. Si $\lambda(r(0) - 1) \leq 0$, alors $r(t_1) \leq r(0)$ et $t_1 - \ln \frac{r(t_1)}{r(0)} > 0$ donc $t_1 - \ln \frac{r(t_1)}{r(0)} = 2\pi$.

Par ailleurs, le sens de variation de θ change éventuellement au moment où $\theta'(t) = 1 - \frac{r'(t)}{r(t)} = 0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{r'(t)}{r(t)} = 1 = \lambda(1 - \frac{1}{r(t)})$ soit encore $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{r(t)} = 1$. Dès lors, comme $\lambda(r(0) - 1) \neq 0$, r est strictement monotone donc θ ne change de sens de variation qu'au plus une seule fois sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

i) $\theta(t_1) = 2\pi$ si et seulement si θ est croissante sur tout $[0, t_1]$

ii) $\theta(t_1) = -2\pi$ si et seulement si θ est décroissante sur tout $[0, t_1]$

iii) et $\theta(t_1) = 0$ sinon.

[...]