Devoir surveillé

Exercice 1 (Transport de champs de vecteurs)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

a) Pour un champ de vecteurs $X : U \to \mathbb{R}^n$ sur U de classe C^k, illustrer à l'aide d'un schéma, la définition du champ de vecteurs $\psi_* X$ sur V

$$\forall\, y \in V \qquad (\psi_* X)(y) = \mathrm{d}_x\psi(X(x)) \qquad \text{où} \qquad x = \psi^{-1}(y)$$

image directe de X par ψ.

b) Pour tous champs de vecteurs X et Y sur U et toute fonction $f : U \to \mathbb{R}$ (toujours de classe C^k), remarquer que

$$X + Y : U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto X(x) + Y(x) \qquad \text{et} \qquad fX : U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x)X(x)$$

sont des champs de vecteurs sur U de classe C^k.
Ainsi, l'ensemble des champs de vecteurs sur U (de classe C^k), noté $\Gamma(\mathrm{T}U)$, est un module sur l'anneau $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$.

c) Pour tous champs de vecteurs X et Y sur U et toute fonction $f : U \to \mathbb{R}$ (de classe C^k), montrer que

$$\psi_*(X + Y) = \psi_* X + \psi_* Y \qquad \text{et} \qquad \psi_*(fX) = (f \circ \psi^{-1})(\psi_* X).$$

Ainsi, $\psi_* : \Gamma(\mathrm{T}U) \to \Gamma(\mathrm{T}V)$ est un morphisme de C^k-modules.

d) Pour un champ de vecteurs Y sur V de classe C^k, le champ de vecteurs $\psi^* Y$ sur U, image réciproque de Y par ψ, est défini par

$$\forall\, x \in U \qquad (\psi^* Y)(x) = (\mathrm{d}_x\psi)^{-1}(Y(\psi(x))).$$

Montrer que $\psi_*(\psi^* Y) = Y$ et que $\psi^*(\psi_* X) = X$.

e) Montrer que cette dernière définition reste valable si l'on ne demande plus à ψ d'être un difféomorphisme, mais seulement d'être un difféomorphisme local, c'est-à-dire si, pour tout x dans U, la différentielle $\mathrm{d}_x\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de ψ en x est inversible.

Exercice 2 (Coordonnées polaires)**.** On considère l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

a) Montrer que ψ est de classe C^∞ et écrire la matrice de sa différentielle en tout point (r, θ). Montrer qu'elle inversible et calculer son inverse (matricielle). En déduire que ψ est un difféomorphsime local, mais pas un difféomorphisme (global).

b) On considère les champs de vecteurs $X_{/\!/}$ et $X_\perp$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définis par

$$X_{/\!/}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Montrer les champs de vecteurs $\psi^* X_{/\!/}$ et $\psi^* X_\perp$, images réciproques de $X_{/\!/}$ et de $X_\perp$ par ψ, sont donnés par

$$(\psi^* X_{/\!/})\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (\psi^* X_\perp)\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 3 (Application de premier retour)**.** Pour tout réel λ, on considère l'équation différentielle $z' = X(z)$ où X est le champ de vecteurs sur le plan, privé de l'origine, défini par

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \lambda\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Lorsque $\lambda = 0$, donner la solution de l'équation $z' = X(z)$ de condition initiale $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, à l'aide d'une exponentielle de matrice.

b) Vérifier que la solution de condition initiale $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

c) En déduire que toute solution maximale de condition initiale $z(0) = z_0$ située dans le disque unité est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

d) Soit ψ le difféomorphisme défini dans l'exercice 2. Calculer le champ $Y = \psi^* X$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, image réciproque par ψ de X, à l'aide des résultats des deux exercices précédents.

e) Soit w une solution de $w' = (\psi^* X)(w)$. Montrer que $z = \psi \circ w$ est une solution de $z' = X(z)$.

f) En déduire le lien entre le flot φ_t^X de X et le flot φ_t^Y de Y.

g) Si $w = (r, \theta)$ désignent les composantes de w, quelles sont les équations différentielles satisfaites par r et θ ?

h) Calculer r et θ en prenant comme conditions initiales $r(0) = r_0 > 0$ et $\theta(0) = 0$.

i) Pour toute condition initiale $z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in]0, +\infty[\times \{0\}$, calculer le temps de premier retour de z, dans le morceau d'hyperplan $]0, +\infty[\times \{0\}$. En quel point z revient-il ?
[Indication : $z = \psi \circ w = \psi \circ (r, \theta)$.]