Equations de Sturm-Liouville

correction

a) Si $y(t) = e^{\alpha(t)}x(t)$ alors

$$\begin{aligned} y' &= e^{\alpha}(x' + \alpha' x) \\ y'' &= e^{\alpha}(x'' + 2\alpha' x' + (\alpha'' + \alpha'^2)x) \end{aligned}$$

donc

$$y'' + ay' + by = e^{\alpha}(x'' + (2\alpha' + a)x' + (\alpha'' + \alpha'^2 + a\alpha' + b)x)$$

et comme e^{α} n'est jamais nulle, en choisissant α comme une primitive de la fonction continue $-a/2$, l'équation $y'' + ay' + by = 0$ équivaut à

$$x'' + qx = 0 \qquad \text{avec} \qquad q = b - \frac{a'}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

b) i) Soit $z = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ de sorte que $x'' + qx = 0$ équivaut à $z' = Az$ où A est l'application définie par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversement, si une fonction $z : I \to \mathbb{R}^2$ vérifie $z' = Az$ alors sa première coordonnée x vérifie $x'' + qx = 0$. Donc l'application qui, à une solution $z : I \to \mathbb{R}^2$ de $z' = Az$, associe sa première coordonnée x, est un isomorphisme linéaire sur l'espace des solutions de $x'' + qx = 0$.

Or, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires, comme l'application A est continue, l'espace vectoriel des solutions (sur I) de $z' = Az$ est de dimension 2. Donc il en va de même pour l'espace des solutions de $x'' + qx = 0$.

ii) Comme l'espace des solutions est de dimension 2, il suffit de montrer que la famille (c_{t_0}, s_{t_0}) est libre. Soit (λ, μ) un couple de réels vérifiant $\lambda c_{t_0} + \mu s_{t_0} = 0$. En évaluant en t_0, on obtient $\lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda = 0$. Puis en dérivant la relation et en évaluant encore en t_0, on obtient $\lambda c'_{t_0}(t_0) + \mu s'_{t_0}(t_0) = \lambda \times 0 + \mu \times 1 = 0$ donc $\mu = 0$. Par conséquent, la famille (c_{t_0}, s_{t_0}) est libre et est donc une base de l'espace des solutions.

iii) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est le couple (e_1, e_2) où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit z_0 un point de $\mathbb{R}^2$ que l'on écrit

$$z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0 e_1 + y_0 e_2.$$

Comme c_{t_0} est la solution de $x'' + qx = 0$ de condition initiale $c_{t_0}(t_0) = 1$ et $c'_{t_0}(t_0) = 0$, la fonction $\begin{pmatrix} c_{t_0} \\ c'_{t_0} \end{pmatrix}$ est la solution de $z' = Az$ de condition initiale $z(t_0) = e_1$. De même, la fonction $\begin{pmatrix} s_{t_0} \\ s'_{t_0} \end{pmatrix}$ est la solution de $z' = Az$ de condition initiale $z(t_0) = e_2$. Ainsi, par linéarité (par le principe de superposition), la solution de $z' = Az$ de condition initiale $z(t_0) = z_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ est

$$x_0 \begin{pmatrix} c_{t_0} \\ c'_{t_0} \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} s_{t_0} \\ s'_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t_0} & s_{t_0} \\ c'_{t_0} & s'_{t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t_0} & s_{t_0} \\ c'_{t_0} & s'_{t_0} \end{pmatrix} z_0.$$

Donc par la définition de la résolvante,

$$R_{t_0}^t(z_0) = \begin{pmatrix} c_{t_0}(t) & s_{t_0}(t) \\ c'_{t_0}(t) & s'_{t_0}(t) \end{pmatrix} z_0.$$

Finalement, la matrice de $R_{t_0}^t$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} c_{t_0}(t) & s_{t_0}(t) \\ c'_{t_0}(t) & s'_{t_0}(t) \end{pmatrix}$.

iv) Le wronskien $W_{t_0} : t \mapsto W_{t_0}^t$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{t_0}^t = \operatorname{tr}(A(t)) W_{t_0}^t = 0$$

car, pour tout $t \in I$, la trace de la matrice $A(t)$ est nulle. Donc W_{t_0} est constant, égal à $W_{t_0}^{t_0} = \det(R_{t_0}^{t_0}) = 1$ car $R_{t_0}^{t_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

v) Pour i valant 1 ou 2, $\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix}$ est la solution de $z' = Az$, notée z_i, de condition initiale $z(t_0) = \begin{pmatrix} x_i(t_0) \\ x_i'(t_0) \end{pmatrix}$, notée v_i. Par linéarité, pour tous réels λ et μ, la solution de $z' = Az$ de condition initiale $z(t_0) = \lambda v_1 + \mu v_2$ n'est autre que $\lambda z_1 + \mu z_2$. Par unicité, comme la fonction nulle est solution de $z' = Az$, si $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ alors $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$. Ainsi, en prenant la première coordonnée, $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$. Or la base (x_1, x_2) est en particulier une famille libre, donc $\lambda = \mu = 0$. Par conséquent, (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, si P est la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2), c'est-à-dire la matrice

$$P = \begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique, alors la matrice de $R_{t_0}^t$ dans la nouvelle base est

$$P^{-1} \begin{pmatrix} c_{t_0}(t) & s_{t_0}(t) \\ c_{t_0}'(t) & s_{t_0}'(t) \end{pmatrix} P.$$

Par défintion, la résolvante de $z' = Az$ vérifie

$$R_{t_0}^t(v_i) = z_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \end{pmatrix}$$

de sorte que sa matrice dans la base (v_1, v_2) est

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$$

(on vérifie qu'en t_0, c'est bien la matrice identité).

Enfin, comme le calcul du déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie, en utilisant la dernière expression matricielle, on obtient

$$W_{t_0}^t = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{\det P} = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_1'(t_0)x_2(t_0)}.$$

c) i) En dérivant les relations $c'' + c = 0$ et $s'' + s = 0$, on obtient que c' et s' sont des solutions de l'équation différentielle $x'' + x = 0$. Or $c'(0) = 0$ et $c''(0) = -c(0) = -1$, $s'(0) = 1$ et $s''(0) = -s(0) = 0$. Donc par unicité et linéarité, $c' = -s$ et $s' = c$.

Par ailleurs, avec $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -t$, on remarque que $c \circ \sigma$ et $s \circ \sigma$ sont également solutions de $x'' + x = 0$ et ont les mêmes conditions initiales que c et $-s$, respectivement. Ainsi $c \circ \sigma = c$ et $s \circ \sigma = -s$ donc c est paire et s est impaire.

ii) Le wronskien de l'équation $z' = Az$ correspondant à l'équation $x'' + qx = 0$ est donné par $W_0^t = c(t)s'(t) - c'(t)s(t) = c(t)^2 + s(t)^2$. Or le wronskien est constant, égal à 1. Donc $c^2 + s^2 = 1$.

iii) D'après les questions précédentes, la matrice de la résolvante R_0^t dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} c(t) & s(t) \\ c'(t) & s'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{pmatrix}.$$

De plus, comme l'équation $x'' + x = 0$ est autonome (à coefficients constants), $z' = Az$ l'est aussi et $R_t^{t'} = R_0^{t'-t}$. Ainsi, la résolvante vérifie $R_0^{a+b} = R_a^{a+b} \circ R_0^a = R_0^b \circ R_0^a$ ce qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} c(a+b) & s(a+b) \\ -s(a+b) & c(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(b) & s(b) \\ -s(b) & c(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(a) & s(a) \\ -s(a) & c(a) \end{pmatrix}$$

et qui implique les relations

$$\begin{aligned} c(a+b) &= c(a)c(b) - s(a)s(b) \\ s(a+b) &= c(a)s(b) + s(a)c(b). \end{aligned}$$

iv) Il suffit de montrer que c et s sont périodiques et les relations $c' = -s$ et $s' = c$ garantiront qu'elles ont même période.

Comme $c(0) = 1$, $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1 > 0$, s et c sont strictement positives au moins sur un intervalle de la forme $]0, \varepsilon[$. Supposons que c soit strictement positive $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, comme $s' = c > 0$, s est strictement croissante, donc strictement positive et comme $c'' = -c < 0$ et $c' = -s < 0$, c est strictement concave et strictement décroissante. En particulier, c est majorée par une fonction affine strictement décroissante ce qui contredit le fait qu'elle ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Soit t_c le plus petit réel positif où c s'annule, de sorte que $c(t_c) = 0 = s'(t_c)$ et, comme $s' = c > 0$ sur $]0, t_c[$, $s(t_c) = +\sqrt{1 - c(t_c)^2} = 1 = -c'(t_c)$. En résumé,

$$\left\{ \begin{aligned} c(t_c) &= 0 \\ c'(t_c) &= -1 \end{aligned} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{aligned} s(t_c) &= 1 \\ s'(t_c) &= 0 \end{aligned} \right.$$

et par unicité des solutions de $x'' + x = 0$, on déduit que pour tout réel t, $s(t + t_c) = c(t)$ et que $-c(t + t_c) = s(t)$. Enfin,

$$s(t + 4t_c) = c(t + 3t_c) = -s(t + 2t_c) = -c(t + t_c) = s(t)$$

donc s est périodique de période $4t_c$, et de même pour c.

d) Supposons par l'absurde que x admet un zéro non isolé t_0, autrement dit, pour tout voisinage $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, x admet un autre zéro que t_0. Pour tout entier positif n, en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on en déduit qu'il existe une suite de réels t_n vérifiant $x(t_n) = 0$ et $|t_n - t_0| < \frac{1}{n}$. Dès lors,

$$x'(t_0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0$$

donc la solution x vérifie $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ et, par unicité, x est la fonction nulle.

e) Supposons que x_1 et x_2 sont strictement positives sur $]\sigma, \tau[$ et étudions les variations de la fonction $w = x_2' x_1 - x_2 x_1'$:

$$w' = x_2'' x_1 + x_2' x_1' - x_2' x_1' - x_2 x_1'' = x_2'' x_1 - x_2 x_1'' = (q_1 - q_2) x_2 x_1 \leq 0$$

donc la fonction w est décroissante sur $]\sigma, \tau[$. Comme x_1 s'annule en σ et τ et est strictement positive entre les deux, $x_1'(\sigma) \geq 0$ et $x_1'(\tau) \leq 0$. Donc $w(\sigma) = 0 - x_2(\sigma) x_1'(\sigma) \leq 0$ et $w(\tau) = 0 - x_2(\tau) x_1'(\tau) \geq 0$. Par conséquent, la fonction w est nulle sur $]\sigma, \tau[$. Or sur $]\sigma, \tau[$,

$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)' = \frac{w}{{x_1}^2} = 0$$

donc la fonction x_2/x_1 est constante sur cet intervalle. L'alternative est donc démontrée.

i) Les solutions de l'équation $x'' = 0$ sont exactement les fonctions affines. Si $q \leq 0$, supposons qu'une x une solution (non triviale) de $x'' + qx = 0$ admet deux zéros σ et τ que l'on peut supposer consécutifs. On considère deux fonctions affines a_1 et a_2, solutions de $x'' = 0$ et qui ne s'annulent pas sur $]\sigma, \tau[$. D'après ce qui précède, les fonctions a_1/x et a_2/x sont alors constantes sur $]\sigma, \tau[$ et donc a_1/a_2 également. En choisissant a_1 et a_2 de sorte que leur rapport ne soit pas constant, on obtient une contradiction. Ainsi, toute solution x de $x'' + qx = 0$ avec $q \leq 0$ admet au plus un seul zéro.

ii) Soient x_1 et x_2 deux solutions indépendantes de $x'' + qx = 0$ et supposons qu'elles admettent un zéro t en commun. Pour tout t, si $x_1(t) = x_2(t) = 0$, alors les vecteurs $\begin{pmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \end{pmatrix}$, pour i valant 1 ou 2, ne peuvent former une base de $\mathbb{R}^2$, ce qui doit être le cas. Donc x_1 et x_2 n'ont pas de zéro commun. Par ailleurs, d'après ce qui précède, comme $q \geq q$ et que le rapport x_2/x_1 n'est constant sur aucun intervalle (sinon il serait constant sur tout l'intervalle de définition et la famille (x_1, x_2) ne serait pas libre), entre deux zéros consécutifs de x_1, il y a (au moins) un zéro de x_2. Et symétriquement. Donc il ne peut y avoir qu'un seul zéro de x_2 entre deux zéros consécutifs de x_1, car sinon il y aurait un autre zéro de x_1 entre les deux zéros consécutifs de x_1, ce qui est absurde.

iii) La distance entre deux zéros consécutifs quelconque des solutions $x_\pm$ (non triviales) de $x'' + \omega_\pm^2 x = 0$ est exactement de $\pi/\omega_\pm$.

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' + qx = 0$, $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs. Si $t_2 - t_1 > \pi/\omega_-$, soit x_- une solution de $x'' + \omega_-^2 x = 0$ ayant deux zéros consécutifs sur $]t_1, t_2[$. Comme $q \geq \omega_-^2$, le rapport x/x_- est constant (et non nul) entre les deux zéros de x_-. Donc le rapport x_-/x est constant et nul par continuité, ce qui est absurde.

Si $t_2 - t_1 < \pi/\omega_+$, soit x_+ une solution de $x'' + \omega_+^2 x = 0$ n'ayant aucun zéro sur $[t_1, t_2]$. Comme $q \leq \omega_+^2$, le rapport x_+/x est constant (non nul) sur $]t_1, t_2[$. Donc le rapport x/x_+ est constant et nul par continuité, ce qui est absurde.

Finalement $\frac{\pi}{\omega_+} \leq |t_2 - t_1| \leq \frac{\pi}{\omega_-}$.