Equations de Sturm-Liouville

L'objectif est d'étudier les équations différentielles ordinaires du type

$$x'' + qx = 0$$

d'inconnue, $x : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

a) Montrer que toute équation du type $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est équivalente à une équation du type $x'' + q(t)x = 0$, dite *réduite*, grâce à un changement de variable de la forme $y(t) = e^{\alpha(t)}x(t)$. Exprimer α en fonction de a et b.

b) i) Ramener l'équation $x'' + qx = 0$ à une équation différentielle linéaire $z' = A(t)z$ d'ordre 1 d'inconnue $z : I \to \mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble des solutions (sur I), de l'une comme de l'autre, est un espace vectoriel de dimension 2.

ii) Soient $t_0 \in I$ et c_{t_0} et s_{t_0} les solutions (sur I) de $x'' + qx = 0$ vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} c(t_0) = 1 \\ c'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s(t_0) = 0 \\ s'(t_0) = 1 \end{cases}.$$

Montrer que c_{t_0} et s_{t_0} forment une base de l'espace des solutions.

iii) Pour $t \in I$, $R^t_{t_0}$ désigne la résolvante de l'équation $z' = A(t)z$, c'est-à-dire l'application linéaire qui associe à tout $z_0 \in \mathbb{R}^2$, la valeur à l'instant t de la solution de condition initiale $z(t_0) = z_0$. Écrire la matrice de $R^t_{t_0}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, à l'aide de c_{t_0} et s_{t_0}.

iv) Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le wronskien $t \mapsto W^t_{t_0} = \det(R^t_{t_0})$? En déduire que le wronskien est constant, égal à 1.

v) Soit (x_1, x_2) une autre base de solutions de $x'' + qx = 0$. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_1'(t_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Comment exprimer la matrice de $R^t_{t_0}$ dans cette nouvelle base en fonction de sa matrice dans la base canonique ? En déduire une expression du wronskien en fonction de x_1 et de x_2.

c) Dans cette question seulement, $I = \mathbb{R}$ et la fonction q est supposée constante, égale à 1. L'objectif est de retrouver certaines propriétés des fonctions trigonométriques en utilisant seulement le fait qu'elles sont solutions de $x'' + x = 0$. On note $c = c_0$ et $s = s_0$.

i) Montrer que $s' = c$, $c' = -s$ et que les fonctions s et c sont respectivement impaire et paire.

ii) Montrer, grâce au wronskien, que $c^2 + s^2 = 1$.

iii) Retrouver, grâce aux propriétés de la résolvante, les formules d'addition des fonctions sinus et cosinus.

iv) En déduire que c et s sont périodiques de même période.
[Indication : sur tout intervalle où toutes deux sont strictement positives, par exemple, elles sont strictement concaves, s est croissante et c est décroissante.]

d) Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' + qx = 0$ sur I. Montrer que tout zéro (ou point d'annulation) de x est isolé (admet un voisinage où x n'a pas d'autre zéro).

e) Soient $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telle que $q_2 \geq q_1$. Pour i valant 1 ou 2, soit x_i une solution de $x'' + q_i x = 0$. Étant donné deux zéros consécutifs σ et τ de x_1. Montrer l'alternative suivante :

– soit x_2 s'annule sur $]\sigma, \tau[$,

– soit x_2/x_1 est constante sur $]\sigma, \tau[$.
[Indication : supposer x_1 et x_2 positives sur $]\sigma, \tau[$ et étudier les variations de la fonction $w = x_2' x_1 - x_2 x_1'$.]
En déduire que

i) si $q \leq 0$, toute solution de $x'' + qx = 0$ admet au plus un seul zéro ;

ii) si $q_1 = q_2 = q$, deux solutions x_1 et x_2 indépendantes ne peuvent avoir de zéro en commun et qu'entre deux zéros consécutifs de l'une, se trouve exactement un zéro de l'autre ;

iii) s'il existe deux réels $0 < \omega_- \leq \omega_+$ vérifiant ${\omega_-}^2 \leq q \leq {\omega_+}^2$, la distance entre deux zéros consécutifs $t_1 < t_2$ de toute solution non identiquement nulle vérifie $\frac{\pi}{\omega_+} \leq |t_2 - t_1| \leq \frac{\pi}{\omega_-}$.