Feuille de TD n°1 : entropie topologique

Exercice 1. Soit $T : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact X. Ecrire avec des quantificateurs la propriété : $h(T) > 0$.

Exercice 2. Montrer que l'entropie topologique d'un homéomorphisme de $[0, 1]$ est nulle.

Exercice 3. Calculer l'entropie topologique de l'application "multiplication de l'angle par p", c'est à dire l'application $T : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ induite par $x \mapsto px$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4. Donner un exemple d'homéomorphisme d'un espace compact dont l'entropie topologique est infini.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Calculer l'entropie topologique de

$$\begin{aligned} F : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, y + \alpha). \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $T : X \to X$ une application lipschitzienne sur un espace métrique compact. L'entropie peut elle être infinie ? et dans le cas où X est une variété différentiable ?

Exercice 7. Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. On rappelle que x est non errant si pour tout voisinage U de x, il existe $y \in U$ et $n \geq 0$ tel que $T^n(y) \in U$.

1. Montrer que l'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est fermé et vérifie $T\big(\Omega(T)\big) \subset \Omega(T)$.
2. A l'aide du principe variationnel, montrer que $h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$.
3. Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact tel que $\Omega(T)$ est fini. Montrer que $h(T) = 0$.

Exercice 8. Reprendre l'exercice 2 avec l'aide de l'exercice 7.

Exercice 9. On se donne une application continue sur un espace métrique compact $T : X \to X$.

1. On fixe dans cette question μ, ν dans $\mathcal{M}_T$ et $t \in [0, 1]$. Montrer que pour toute partition borélienne $\mathcal{P} = (P_i)_{\in I}$, on a :

   $$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \leq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) - t\ln t - (1-t)\ln(1-t).$$

   En déduire que

   $$H_{t\mu+(1-t)\nu}(T, \mathcal{P}) = tH_\mu(T, \mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(T, \mathcal{P}),$$

   puis que

   $$h_{t\mu+(1-t)\nu}(T) = th_\mu(T) + (1-t)h_\nu(T).$$
2. On suppose qu'il existe une unique mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$. Montrer que μ est ergodique.
3. On suppose que $h(T) = +\infty$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.
4. Donner un exemple où $h(T) = +\infty$ et où il n'existe aucune mesure ergodique μ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.

Exercice 10. Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. On suppose qu'il existe une famile finie $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ de parties fermées positivement invariantes (i.e. $T(X_i) \subset X_i$), telles que $X = \bigcup_{1\leq i\leq p} X_i$. Montrer que $h(T) = \sup_{1\leq i\leq p} h(T|_{X_i})$.

Exercice 11. Quelle est l'entropie de $T : z \mapsto z^2$ définie sur la sphère de Riemann ?