

Feuille de TD n°2 : Un exemple de sous-décalage

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et le sous-décalage de type fini σ_A défini sur $X_A \subset \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$.

1. Calculer le nombre de points périodiques de période q , pour $q \leq 3$. Quel est le nombre de points fixes de σ_A^n , pour $n \geq 1$?
2. Quelle est l'entropie topologique de σ_A ?
3. Peut-on trouver une partie fermée invariante $X \subset X_A$ telle que la restriction $\sigma_A|_X$ soit conjuguée au décalage de Bernouilli sur $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$?
4. On considère la matrice stochastique suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi il existe sur $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$ une unique mesure de Markov associée à M et calculer $\mu(C)$, où

$$C = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}} \mid x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2\}.$$

La mesure μ est-elle supportée sur X_A ? que vaut l'entropie $h_\mu(\sigma_A)$?

5. Soit ν la mesure de Parry de σ_A . Calculer $\nu(C)$ et donner la valeur de l'entropie $h_\nu(\sigma_A)$.