Feuille de TD n°3 : Automorphismes hyperboliques du tore

Exercice 1. Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Rappelons que T est expansive s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \delta$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(T^n)$ est fini.
2. Montrer que $h(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sharp \mathrm{Fix}(T^n)\right)$.
3. Montrer qu'un automorphisme linéaire du tore $\mathbb{T}^r$ est expansif si et seulement s'il est hyperbolique.

Exercice 2.
1. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   — $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$;
   — A est hyperbolique ;
   — $\hat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).
2. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant -1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   — $|\mathrm{Tr}(A)| \neq 0$;
   — A est hyperbolique ;
   — $\hat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).
3. Trouver une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients entiers de déterminant 1 telle que
   — A n'est pas hyperbolique ;
   — $\hat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).
   (On commencera par montrer que les racines de $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ ne sont pas racines de l'unité).

Exercice 3. Donner un argument dynamique au fait que les valeurs propres d'une matrice carrée hyperbolique d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1 sont irrationnelles.

Exercice 4. Soit $\hat{A}$ un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{T}^r$. Prouver le lemme de fermeture suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ-pseudo-orbite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q peut être ε-pistée par une orbite périodique $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q.

Exercice 5. Soit $F : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r$ un homéomorphisme tel que F_* soit un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^r$. On va donner un autre preuve du fait qu'il existe une unique application continue $H : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r$ homotope à l'identité telle que $H \circ F = \hat{F}_* \circ H$.

1. Soit f un relèvement de F. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^r$, il existe un unique point $y = h(x) \in \mathbb{R}^r$ tel que la suite $(f^k(x) - F_*^k(y))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et que de plus on a $\|f^k(x) - F_*^k(y)\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $h \circ f = F_* \circ h$ et que $h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r}$ est invariante par les translations entières.
3. Montrer que h est continue.
4. Conclure.

Exercice 6. Soit T une application un automorphisme linéaire de R^r qui n'est pas hyperbolique. Montrer qu'il une application f de classe C^1 au voisinage de 0, vérifiant $df(0) = T$, et telle que f n'est conjuguée à T dans aucun voisinage de 0.