Feuille de TD n°1 : Nombre de rotation

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 1. Montrer qu'un homéomorphisme de $\mathbb{T}$ qui renverse l'orientation a exactement 2 points fixes. Peut-il avoir des points périodiques de période 2 ? de période > 2 ?

Exercice 2. (Nombre de rotation des itérés) Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un homéomorphisme croissant et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé quelconque de F.

1. Montrer que pour tous $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} p/q < \rho(f) &\quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{R}, p < F^q(x) - x, \\ \rho(f) < p/q &\quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) - x < p. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $\rho(F^q + p) = q\rho(F) + p$.

Exercice 3. (Continuité du nombre de rotation)

1. Soit f_0 un homéomorphisme de $\mathbb{T}$ et $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé de f_0. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, tout homéomorphisme de $\mathbb{T}$ assez proche de f_0 admet un relevé ε-proche de F_0.
2. Montrer que le nombre de rotation est continu sur l'espace des homéomorphismes croissants de $\mathbb{T}$.

Exercice 4. Soit f un homéomorphisme croissant du cercle. On suppose que 0 et ses cinq premiers itérés sont disposés sur le cercle dans l'ordre suivant :

$$0, f^2(0), f^4(0), f(0), f^3(0), f^5(0).$$

Que peut-on dire du nombre de rotation de f ? *Indication : on pourra commencer par choisir un relevé F de f et déterminer la position de $F(0), \ldots, F^5(0)$ par rapport aux entiers.*

Exercice 5. Soit α un nombre irrationnel et $\tau_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la rotation d'angle α.

1. Décrire tous les homéomorphismes qui commutent à τ_α.
2. On suppose que $f = h_0 \circ \tau_\alpha \circ h_0^{-1}$ est conjugué à τ_α, avec h_0 homéomorphisme croissant de $\mathbb{T}$. Trouver tous les homéomorphismes h tels que $f = h \circ \tau_\alpha \circ h^{-1}$.

Exercice 6. On note $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui commutent à la translation $\tau : t \mapsto t + 1$.

1. Donner un exemple de fonctions F et G dans $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ tels que $F(x) < G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pourtant, $\rho(F) = \rho(G)$.
2. Supposons que $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $x - \varepsilon < F^q(x) - p < x$.
3. En déduire que si $F, G \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ vérifient $F(x) < G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\rho(F) = \rho(G)$, alors $\rho(F) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 7. (Famille d'Arnold) On fixe $\alpha \in]-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}[\setminus\{0\}$, on définit pour tout t, l'application $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \alpha \sin(2\pi x) + t$ et f_t l'homéomorphisme de $\mathbb{T}$ induit par F_t. On note également F_t son prolongement à $\mathbb{C}$.

1. Si $q \geq 1$, prouver que la fonction $z \mapsto F_t^q(z) - z$ n'est pas constante sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que chaque f_t a un nombre fini de points périodiques.

3. Montrer que l'application $r : t \mapsto \rho(F_t)$ est continue, croissante et vérifie $r(t+1) = r(t)+1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que chaque ensemble $r^{-1}(a)$ est un intervalle non trivial si $a \in \mathbb{Q}$ et réduit à un point si $a \notin \mathbb{Q}$.
4. En déduire que r est un escalier du diable.

Exercice 8. 1. Donner un exemple de couple (F, G) d'homéomorphismes de $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ tels que $\rho(F \circ G) \neq \rho(F) + \rho(G)$.

2. Montrer que $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$ quand F et G commutent.

Exercice 9. Montrer que si f et g sont des homéomorphismes croissants de $\mathbb{T}$ qui commutent et ont chacun un point fixe, alors $f \circ g$ a également un point fixe. *Indication : on pourra commencer par montrer que leurs relevés commutent et utiliser l'exercice précédent.*

Exercice 10. (Nombre de rotation, mesures invariantes et homéomorphismes qui commutent)

1. Soit F un relevé d'un homéomorphisme croissant du cercle f. On note $\Delta_F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la fonction induite par la fonction 1-périodique $x \mapsto F(x) - x$. Montrer que pour toute mesure de probabilité μ invariante par f, on a :
$$\rho(F) = \int_{\mathbb{T}} \Delta_F(x) d\mu(x).$$
2. Montrer que deux homéomorphismes d'un même espace métrique compact qui commutent admettent une mesure invariante commune.
3. Montrer que le nombre de rotation est un morphisme sur le groupe des homéomorphismes croissants du cercle préservant une mesure donnée.

Exercice 11. Montrer que sur le tore $\mathbb{T}^N$, l'ensemble de rotation des mesures est un invariant de conjugaison.

Exercice 12. 1. Pour tout petit $\varepsilon \geq 0$, on considère le relèvement d'un homéomorphisme de T^2 donné par la formule :
$$F_\varepsilon(x, y) = (x + \cos(2\pi y), y + \varepsilon \sin^2(\pi y)).$$
Calculer son ensemble de rotation des points et des mesures. Que remarque-t-on à la limite $\varepsilon \to 0$?

2. Montrer que l'ensemble de rotation des mesures est semi-continu supérieurement.
3. En déduire que l'ensemble de rotation des mesures est continu aux points dont l'ensemble de rotation est un singleton.