Feuille de TD n°2 : Automorphismes hyperboliques du tore

Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer que les automorphismes hyperboliques du tore $\mathbb{T}^2$ sont mélangeants pour la mesure de Haar. Soient f un automorphisme hyperbolique, e un générateur de son espace instable E_u, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ le flot induit par $x \mapsto x + te$. Enfin, on introduit les opérateurs T et S_r (pour $r > 0$) suivants : pour toute fonction continue $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$,

$$T\phi = \phi \circ f, \qquad S_r(\phi)(x) = \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \phi(h_t(x))\, dt.$$

1. Rappeler pourquoi h_t est ergodique.
2. Justifier que l'adjoint de T pour le produit scalaire L^2 est T^{-1} et que l'opérateur S_r est autoadjoint.
3. Montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel que,
$$S_r \circ T = T \circ S_{\lambda r}.$$
4. Montrer que pour toutes fonctions L^2 ϕ et ψ de moyenne nulle, le produit scalaire $\langle S_r\phi, T^n\psi \rangle$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En deduire que si ϕ est continue, $\langle \phi, T^n\psi \rangle$ converge également vers 0. Conclure.

Exercice 2. On rappelle qu'un automorphisme f_A du tore est mélangeant si et seulement si A n'admet aucune racine de l'unité parmi ses valeurs propres.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   — $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$;
   — A est hyperbolique ;
   — f_A est mélangeante (pour la mesure de Haar).
2. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant -1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   — $|\mathrm{Tr}(A)| \neq 0$;
   — A est hyperbolique ;
   — f_A est mélangeante (pour la mesure de Haar).
3. Trouver une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients entiers de déterminant 1 telle que
   — A n'est pas hyperbolique ;
   — f_A est mélangeante (pour la mesure de Haar).
   (On commencera par montrer que les racines de $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ ne sont pas racines de l'unité).

Exercice 3. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Rappelons que f est expansive s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.

1. Montrer qu'un automorphisme linéaire du tore $\mathbb{T}^r$ est expansif si et seulement s'il est hyperbolique.
2. On suppose dorénavant f expansif quelconque. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(f^n)$ est fini.
3. Montrer que $h(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\sharp\mathrm{Fix}(f^n)\right)$.

Exercice 4. Donner un exemple d'homéomorphisme f de $\mathbb{T}^2$ tel que A_f est hyperbolique mais f n'est pas conjugué à A_f (il lui est seulement semi-conjugué).

Exercice 5. Soit A un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^r$ qui n'est pas hyperbolique. Montrer qu'il existe une application F de classe C^1 au voisinage de 0, vérifiant $dF(0) = A$, et telle que F n'est conjuguée à A dans aucun voisinage de 0.

Exercice 6. (Closing Lemma) Soit f_A un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{T}^r$. Prouver le lemme de fermeture suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ-pseudo-orbite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q peut être ε-pistée par une orbite périodique $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q.

Exercice 7. Soit $f\ : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r$ un homéomorphisme tel que $A_f = f_*$ soit un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^r$. On va donner un autre preuve du fait qu'il existe une unique application continue $h\ : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r$ homotope à l'identité telle que $h \circ f = \hat{A}_f \circ h$.

1. Soit F un relèvement de f. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^r$, il existe un unique point $y = H(x) \in \mathbb{R}^r$ tel que la suite $(F^k(x) - A_f^k(y))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et que de plus on a $\|F^k(x) - A_f^k(y)\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $H \circ F = A_f \circ H$ et que $H - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r}$ est invariante par les translations entières.
3. Montrer que H est continue.
4. Conclure.