DS1-LM270-14 février 2014

A.Ben Abdesselem

Université Paris 6, Groupe Sorbonne.

Problème.
Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
Pour tout couple $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les cofficients sont nuls excepté le coefficient de la i^{ieme} ligne, j^{ieme} colonne qui vaut 1.

<u>Partie 1</u>
1. Pour $1 \leq i,j \leq n$, Soit $\{a_{ij}\}$ une famille de n^2 nombres réels. On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = 0,$$

où 0 désigne la matrice nulle.
Montrer que tous les cofficients a_{ij} sont nuls. Qu'en déduit-on pour la famille $\{E_{ij}\}$?
2-a. Quel est le rang d'une matrice E_{ij}?
2-b. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice E_{ij}? (on distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$).
2-c. Si $i \neq j$, E_{ij} est-elle diagonalisable?
3. On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3-a. Rappelez la définition des élèments de cette base.
3-b. Soit $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$. On associe à toute matrice E_{ij}, l'endomorphisme u_{ij} dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est E_{ij}. Exprimez $u_{ij}(e_k)$ en fonction de i,j et k.
4. On suppose dans cette question que $i \neq j$. Montrer que les matrices E_{ij} et E_{ji} sont semblables.
<u>Ind</u>: Cela revient à montrer que les matrices E_{ij} et E_{ji} représentent le même endomorphisme u_{ij}. La première, dans la base canonique, la seconde dans une base à déterminer. Il suffit donc de déterminer cette base.
5. Pour $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ on pose :

$$\delta_{ij} = 1, \text{ si } i = j$$
$$\delta_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j$$

Montrer que $\forall (i,j,k,l) \in \{1,2,...,n\}^4, E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, (en d'autres termes, $E_{ij}E_{kl}$ est la matrice nulle si $j \neq k$ et $E_{ik}E_{kl} = E_{il}$).

Partie 2

Dans cette partie, p est un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p. On se donne une base $(e_1, ..., e_p)$ de E et un entier q tel que $1 \leq q \leq p-1$. On considère l'espace vectoriel $F = Vect(e_1, ..., e_q)$ engendré par $(e_1, ..., e_q)$. On note E^*, l'espace dual de E.

On désigne par $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$ la base duale de $(e_1, ..., e_p)$ (on rappelle que $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$ est la base sur E^* dont les éléments vérifient $\sigma_k(e_j) = \delta_{kj}$).

6. Soit $\sigma \in E^*$. Exprimer en fonction de $(\sigma(e_1), ..., \sigma(e_p))$ les coordonnées de σ dans la base $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$.

7. Soit $\sigma \in E^*$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in F, \sigma(x) = 0$.

(ii) $\sigma \in Vect(\sigma_{q+1}, ..., \sigma_n)$ (le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $\sigma_{q+1}, ..., \sigma_n$).

8. On note $G = \{\sigma \in E^* / \forall x \in F, \sigma(x) = 0\}$. Que peut-on dire de F si $\dim G = 1$?

Partie 3

Dans cette partie, on pose $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit $\sigma : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ par :

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9. Montrer que σ est un élément de E^*.

10. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux éléments de E. On pose $C = AB$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

10-a. Pour $1 \leq i \leq n$, donner l'expression de c_{ii} en fonction des coefficients de A et B.

10-b. En déduire que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

11. Dans cette question on se donne $\tau \in E^*$ vérifiant $\tau(AB) = \tau(BA)$, pour tout $(A, B) \in E^2$.

11-a. Calculer $\tau(E_{ij})$ pour $i \neq j$.

11-b. Comparer, pour $i \neq j$, $\tau(E_{ii})$ et $\tau(E_{jj})$.

11-c. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\tau = \lambda\sigma$ (σ étant la forme linéaire définie au début de la partie 3).

12. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les matrices de la forme $AB - BA$. Déduire de ce qui précède la dimension de F.