Devoir surveillé 2

Durée : 2 heures

Exercice 1. Calculer les valeurs propres de la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles, donner une base de l'espace propre associé. La matrice A est-elle diagonalisable / trigonalisable ? Si oui, donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale / triangulaire supérieure.

Exercice 2. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints et calculer la signature ε des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 1 & 5 & 8 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est 1 si $j = n + 1 - i$ et 0 sinon.

1. Ecrire A_1, A_2 et A_3 et calculer leur polynôme caractéristique.
2. En développant par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie, exprimer le polynome caractéristique de A_{n+2} en fonction de celui de A_n. En déduire le polynome caractéristique de A_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs propres de A_n ?

Problème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure par bloc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de montrer que si B est diagonalisable alors nécessairement $A = 0$.

1. On commence par le cas $n = 1$. On considère donc une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés, en fonction de la valeur de A ? En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
2. Considérons à présent le cas général d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & F \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ avec } C \in M_p(\mathbb{R}), F \in M_{p,q}(\mathbb{R}), E \in M_q(\mathbb{R}).$$

   (a) On rappelle que pour tout entier k, la matrice M^k est également triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux C^k et E^k respectivement. Montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la matrice $P(M)$ est triangulaire supérieure par bloc. Quels sont ses blocs diagonaux ?

   (b) Montrer que si M est diagonalisable, alors C et E sont diagonalisables. On pourra utiliser le critère selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.

3. Considérons maintenant le cas qui nous intéresse : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que B est diagonalisable. Montrer qu'il existe des réels $d_1, \dots, d_n$ et une matrice P inversible tels que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \dots, d_n$ comme coefficients diagonaux. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Expliciter Q en fonction de P.

4. A l'aide d'une matrice de permutation, montrer que B est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide des questions 1 et 2, montrer que $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En déduire que $A = 0$.