DS3 - LM270 - 4 Avril 2014

Exercice 1. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement les isométries de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale. On considère la forme quadratique Q définie par :

$$Q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1 - 4x_1x_2.$$

1. Quelle est la matrice représentative de Q dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
2. Déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien E qui est aussi une base orthogonale pour Q. On pourra utiliser l'identité : $X^3 + 3X^2 - 9X - 27 = (X + 3)^2(X - 3)$.
3. Que peut-on dire de la matrice de passage de la base initiale à cette nouvelle base ?
4. Donner l'expression de $Q(x)$ en fonction des coordonnées x_1', x_2', x_3' de x dans cette nouvelle base.

Exercice 3. Soient a et b deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$. On considère la forme quadratique Q définie par :

$$Q(x) = (a|b)(x|x) - (a|x)(b|x).$$

1. Vérifiez que la forme polaire f de la forme quadratique Q (c'est à dire la forme bilinéaire symétrique associée à Q) est donnée par :
$$f(x, y) = (a|b)(x|y) - \frac{1}{2}[(a|x)(b|y) + (a|y)(b|x))].$$
2. On suppose dans cette question que a et b sont colinéaires, c'est à dire que $b = \lambda a$ pour un certain réel λ. Exprimer Q en fonction de a et λ. En déduire le rang et la signature de Q en fonction de λ.
3. On suppose pour la suite de cet exercice que a et b ne sont pas colinéaires et on décompose b sous la forme :
$$b = \lambda a + a', \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}, a' \in (\mathbb{R}a)^{\perp}, a' \neq 0.$$
Ecrire la forme polaire de Q en fonction de a, a' et λ.
4. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$ et $e_2 = \frac{a'}{\|a'\|}$. Exprimer la matrice de la forme polaire de Q dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, en fonction de λ, $\|a\|$, et $\|a'\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de Q lorsque $\lambda = 0$? Quel est le rang de Q lorsque $\lambda \neq 0$?