Devoir surveillé 2 : corrigé succinct

Exercice 1. Calculer les valeurs propres de la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles, donner une base de l'espace propre associé. La matrice A est-elle diagonalisable / trigonalisable ? Si oui, donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale / triangulaire supérieure.

Corrigé. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_4) = (X+1)^2(X-2)^2$. Les valeurs propres de A sont donc -1 et 2. Trouver une base de l'espace propre associé à -1 revient à trouver une base du noyau de la matrice $A + I_4$. Cela peut se faire par la méthode du pivot (voir TD ou cours). Pour la valeur propre -1, on trouve un espace propre de dimension 2 engendré par exemple par $x = (1, 1, -1, 0)$ et $y = (0, -1, 1, 1)$. Pour la valeur propre 2, on trouve une espace propre de dimension 1, engendré par $z = (0, -1, 1, 0)$.

La somme des dimensions des espaces propres est 3 qui est strictement inférieur à la dimension de l'espace considéré (4 ici), donc la matrice n'est pas diagonalisable. En revanche, elle est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé. Pour trouver une base de trigonalisation, il suffit de compléter la famille (x, y, z) en une base (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$. On peut prendre par exemple $t = e_2$, mais il y a plein de choix possibles. Pour matrice P, on peut alors prendre la matrice dont les colonnes sont respectivement x, y, z et t. On obtient alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & * \\ 0 & -1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

où les caractères notés $*$ sont des réels qui dépendent du choix fait pour t.

Exercice 2. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints et calculer la signature ε des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 1 & 5 & 8 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. Les décompositions en cycles sont :

$$\sigma_1 = (1, 6, 8, 3, 4) \circ (2, 9, 7), \qquad \sigma_2 = (1, 8) \circ (2, 4, 9, 3) \circ (5, 7, 6).$$

La signature d'un r-cycle étant $(-1)^{r-1}$, on obtient les signatures

$$\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^{4+2} = 1, \qquad \varepsilon(\sigma_2) = (-1)^{1+3+2} = 1.$$

Exercice 3. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est 1 si $j = n + 1 - i$ et 0 sinon.

1. Ecrire A_1, A_2 et A_3 et calculer leur polynôme caractéristique.
2. En développant par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie, exprimer le polynome caractéristique de A_{n+2} en fonction de celui de A_n. En déduire le polynome caractéristique de A_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs propres de A_n ?

Corrigé. 1. Les matrices considérées sont

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où les polynômes caractéristiques

$$P_{A_1}(X) = 1 - X, \quad P_{A_2}(X) = (X-1)(X+1).$$

Pour $P_{A_3}(X)$, on développe par rapport à la première colonne :

$$P_{A_3}(X) = -X(1-X)(-X) - (1-X) = (1-X)(X^2-1).$$

2. Pour exprimer A_{n+2} en fonction de A_n, on développe par exemple par rapport à la première colonne. Dans les matrices représentées ci-dessous, les coefficients non-représentés sont nuls.

$$P_{A_{n+2}} = \det \begin{pmatrix} -X & & & & 1 \\ & -X & & 1 & \\ & & \ddots \quad \iddots & & \\ & & \iddots \quad \ddots & & \\ & 1 & & -X & \\ 1 & & & & -X \end{pmatrix}$$

$$= -X \begin{pmatrix} -X & & 1 & \\ & \ddots \quad \iddots & & \\ & \iddots \quad \ddots & & \\ 1 & & -X & \\ & & & -X \end{pmatrix} + (-1)^{n+2+1} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ -X & & 1 & \\ & \ddots \quad \iddots & & \\ & \iddots \quad \ddots & & \\ -X & & -X & \end{pmatrix}$$

$$= X^2 \begin{pmatrix} -X & & 1 \\ & \ddots \quad \iddots & \\ & \iddots \quad \ddots & \\ 1 & & -X \end{pmatrix} + (-1)^{n+2+1}(-1)^{n+1+1} \begin{pmatrix} -X & & 1 \\ & \ddots \quad \iddots & \\ & \iddots \quad \ddots & \\ 1 & & -X \end{pmatrix}.$$

$$= (X^2-1)P_{A_n}.$$

Par conséquent, si $n = 2k$ est pair, $P_{A_n} = (X^2-1)^k$. Si $n = 2k+1$ est impair, $P_{A_n} = (1-X)(X^2-1)^k$. Les racines de tous ces polynomes sont 1 et -1 qui sont donc aussi les valeurs propres de A_n.

Problème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure par bloc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de montrer que si B est diagonalisable alors nécessairement $A = 0$.

1. On commence par le cas $n = 1$. On considère donc une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés, en fonction de la valeur de A ? En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
2. Considérons à présent le cas général d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & F \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ avec } C \in M_p(\mathbb{R}), F \in M_{p,q}(\mathbb{R}), E \in M_q(\mathbb{R}).$$

(a) On rappelle que pour tout entier k, la matrice M^k est également triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux C^k et E^k respectivement. Montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la matrice $P(M)$ est triangulaire supérieure par bloc. Quels sont ses blocs diagonaux ?

(b) Montrer que si M est diagonalisable, alors C et E sont diagonalisables. On pourra utiliser le critère selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.

3. Considérons maintenant le cas qui nous intéresse : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que B est diagonalisable. Montrer qu'il existe des réels $d_1, \dots, d_n$ et une matrice P inversible tels que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \dots, d_n$ comme coefficients diagonaux. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Expliciter Q en fonction de P.

4. A l'aide d'une matrice de permutation, montrer que B est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide des questions 1 et 2, montrer que $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En déduire que $A = 0$.

Corrigé. 1. Comme B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale. Il n'y en a donc qu'une seule, A. L'espace propre associé est de dimension 1 ou 2. Si jamais elle vaut 2, alors B est une homothétie ce qui n'est possible que si $A = 0$. Si $A \neq 0$, l'espace propre est de dimension 1 et B n'est pas diagonalisable.

2. (a) On écrit $P(X)$ sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$. Alors,

$$P(M) = \sum_{i=0}^d a_i M^i = \sum_{i=0}^d a_i \begin{pmatrix} C^i & * \\ 0 & E^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^d a_i C^i & * \\ 0 & \sum_{i=0}^d a_i E^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(C) & * \\ 0 & P(E) \end{pmatrix}.$$

(b) Si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples annulé par M. D'après la question précédente, on voit que ce polynôme est aussi annulé par C et E. Donc C et E sont aussi diagonalisables.

3. D'après la question précédente, si B est diagonalisable, A l'est aussi, d'où l'existence de tels matrices P et D : $A = PDP^{-1}$. On vérifie ensuite que

$$B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. La matrice B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Or cette matrice est la même que la matrice souhaitée si l'on permute les vecteurs de base. Si $(e_1, \dots, e_{2n})$ est la base

canonique de R^{2n}, et si on note R la matrice de permutation envoyant e_i sur e_{2i-1} si $1 \leq i \leq n$ et e_i sur e_{2i} si $n+1 \leq i \leq 2n$, alors

$$\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} R^{-1}.$$

5. D'après la question 2, si B est diagonalisable, chacun des blocs 2×2 ci-dessus est diagonalisable. Donc d'après la question 1, chacun des d_i est nul. La matrice A est donc semblable à la matrice nulle donc nulle.