DS3 - LM270 - 4 Avril 2014 : corrigé

Exercice 1. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement les isométries de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique.

Corrigé exercice 1

Pour montrer que les matrices considérées sont orthogonales, on peut au choix vérifier par le calcul que ${}^tAA = I_n$ ou vérifier que le produit vectoriel des deux premières colonnes est est la troisième colonne au signe près.

Etudions A. Tout d'abord, on remarque que A est dans $SO_3(\mathbb{R})$ puisque le produit vectoriel des deux première colonne est exactement la troisième colonne. C'est donc la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$, dont il faut déterminer l'angle et l'axe orienté. On sait que l'axe est dirigé par un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. On cherche donc un vecteur propre et on trouve à un multiple près le vecteur $v = (1,1,0)$. Le cosinus de l'angle θ est obtenu par la formule de la trace : $\cos\theta = \frac{1}{2}(\text{trace(A)} - 1) = \frac{1}{2}$. Donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Pour connaître le signe, on choisit un vecteur x non colinéaire à V, par exemple $(1,0,0)$ et on regarde le signe du déterminant (dans la base canonique) suivant

$$\det(x, Ax, v) = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{4} > 0.$$

Conclusion : A représente dans la base canonique la rotation d'axe orienté par $(1,0,0)$ et d'angle $\pi/3$.

Etudions maintenant B. La matrice B est elle indirecte car le produit vectoriel de ses deux premières colonnes est l'opposé de la troisième, ou encore car son déterminant vaut -1. C'est donc la matrice d'une rotation gauche dont il faut déterminer l'angle et l'axe orienté. L'axe orienté est engendré par un veteur propre pour la valeur propre -1. On trouve à un multiple près, le vecteur $v = (1,1,3)$. L'angle est donné par la formule de la trace qui est cette fois : $\cos\theta = \frac{1}{2}(\text{trace(B)} + 1) = \frac{5}{6}$. D'où $\theta = \pm\arccos\frac{5}{6}$ modulo 2π. Le signe est obtenu comme précédemment en calculant le déterminant

$$-\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{5}{6} < 0.$$

Conclusion : B est la matrice dans la base canonique de la rotation gauche d'axe dirigé par $(1,1,-3)$ et d'angle $-\arccos\frac{5}{6}$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale. On considère la forme quadratique Q définie par :

$$Q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1 - 4x_1x_2.$$

1. Quelle est la matrice représentative de Q dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
2. Déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien E qui est aussi une base orthogonale pour Q. On pourra utiliser l'identité : $X^3 + 3X^2 - 9X - 27 = (X+3)^2(X-3)$.
3. Que peut-on dire de la matrice de passage de la base initiale à cette nouvelle base ?
4. Donner l'expression de $Q(x)$ en fonction des coordonnées x_1', x_2', x_3' de x dans cette nouvelle base.

Corrigé exercice 2

1. Les coefficients diagonaux de la matrice de Q se lisent au niveau des termes "carrés", les coeffcients non diagonaux au niveaux des "doubles produits" (ne pas oublier de diviser par 2) On trouve la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. D'après le cours, trouver une base orthonormale qui soit une base orthogonale est la même chose que de trouver une base orthonormale qui diagonalise la matrice symétrique A, ce que l'on va donc chercher à faire.

   Le calcul du polynome caractéristique de A donne $P_A(X) = -(X+3)^2(X-3)$. Le calcul d'un vecteur propre pour 3 donne à un multiple près $(1,-2,1)$, qui est de norme $\sqrt{6}$. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ qui est unitaire. Le calcul de l'espace propre associé à -3 montrer qu'il est par exemple engendré par $(1,0,-1)$ et $(1,1,1)$. Le hasard faisant bien les choses, cette famille est orthogonale (si elle ne l'était pas il faudrait l'orthogonaliser en utilisant le procédé de Gram-Schmidt). On pose maintenant $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. La famille (u,v,w) est base orthonormée qui diagonalise A et donc qui est orthogonale pour Q.
3. La nouvelle et l'ancienne bases étant orthonormales, la matrice de passage est orthogonale.
4. Dans la base (u,v,w) la matrice de Q est la mtrice diagonale dont les coeffcients sont $(3,-3,-3)$. Donc on peut écrire
$$Q(x) = 3x_1'^2 - 3x_2'^2 - 3x_3'^2.$$

Exercice 3. Soient a et b deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$. On considère la forme quadratique Q définie par :
$$Q(x) = (a|b)(x|x) - (a|x)(b|x).$$

1. Vérifiez que la forme polaire f de la forme quadratique Q (c'est à dire la forme bilinéaire symétrique associée à Q) est donnée par :
$$f(x,y) = (a|b)(x|y) - \frac{1}{2}[(a|x)(b|y) + (a|y)(b|x))].$$
2. On suppose dans cette question que a et b sont colinéaires, c'est à dire que $b = \lambda a$ pour un certain réel λ. Exprimer Q en fonction de a et λ. En déduire le rang et la signature de Q en fonction de λ.
3. On suppose pour la suite de cet exercice que a et b ne sont pas colinéaires et on décompose b sous la forme :
$$b = \lambda a + a', \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}, a' \in (\mathbb{R}a)^{\perp}, a' \neq 0.$$
   Ecrire la forme polaire de Q en fonction de a, a' et λ.
4. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$ et $e_2 = \frac{a'}{\|a'\|}$. Exprimer la matrice de la forme polaire de Q dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, en fonction de λ, $\|a\|$, et $\|a'\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de Q lorsque $\lambda = 0$? Quel est le rang de Q lorsque $\lambda \neq 0$?

Corrigé exercice 3

1. Il suffit d'appliquer la formule donnant la forme polaire d'une forme quadratique
$$f(x,y)=\frac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)),$$
et développer.
2. On remplace b par λa. On obtient
$$Q(x)=\lambda(\|a\|^2\|x\|^2-(a|x)^2).$$
Si $\lambda=0$, Q est de rang 0 et sa signature est $(0,0)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que $Q(x)$ est du même signe que λ et ne s'annule que si x est colinéaire à a.
Par conséquent, le rang de Q est $n-1$. La signature est $(n-1,0)$ si $\lambda>0$ et $(0,n-1)$ si $\lambda<0$.
3. La formule est cette fois
$$f(x,y)=\lambda((a|a)(x|y)-(a|x)(a|y))-\frac{1}{2}((a|x)(a'|y)+(a|y)(a'|x))).$$
4. On calcule : $f(e_1,e_1)=0$, $f(e_2,e_2)=\lambda\|a\|^2$, $f(e_1,e_2)=-\frac{1}{2}\|a\|\|a'\|$. Pour tout $3\leq i\leq n$, $f(e_i,e_i)=\lambda\|a\|^2$. tous les autres coefficients sont nuls. D'où la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\|a\|\|a'\| & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}\|a\|\|a'\| & \lambda\|a\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\|a\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\|a\|^2 \end{pmatrix}$$
5. Pour $\lambda=0$, le rang et la signature sont ceux d'une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$
avec $\mu\in\mathbb{R}$. Le polynome caractéristique d'une telle matrice est $X^2-\mu^2$ qui admet une racine négative et une racine positive sauf si $\mu=0$. Le rang et la signature sont donc respectivement 2 et $(1,1)$ (sauf si $a=0$ au quel cas $Q=0$).
Pour $\lambda\neq 0$ et $a\neq 0$, la matrice est inversible et Q est de rang n.