Examen première session : corrigé

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x', y', z')$ où

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 5) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine et donner la matrice A de la partie linéaire de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A est orthogonale. En calculant les produits scalaires $(C_i|C_j)$ pour tous $1 \leq i, j \leq 3$ montrer que A est orthogonale.
3. Que vaut le déterminant de A ?
4. Décrire géométriquement A.
5. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est une droite affine dont on déterminera l'équation.
6. Décrire géométriquement f.

Corrigé.

1. Si on note $M = (x, y, z)$, $0 = (0, 0, 0)$, alors $f(0) = (-5, -2, 1)$, $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f(0)f(M)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) \\ \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{OM}$. L'application f est donc affine de partie linéaire représentée dans la base canonique par la matrice
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. Le calcul explicite montre que $(C_i|C_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(C_i|C_i) = 1$ pour tout i. Les colonnes de A forment une base orthonormée donc A est orthogonale.
3. Pour calculer le déterminant de A, dont on sait qu'il est $+1$ ou -1, on regarde si C_3 est plus ou moins le produit vectoriel de C_1 et C_2. On obtient $+1$.
4. La matrice A est donc la matrice d'une rotation. Sa trace est -1 donc le cosinus de l'angle de rotation est -1 aussi et l'angle $-\pi$ modulo π (il s'agit donc d'un demi-tour). Pour déterminer l'axe, on cherche un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On trouve par exemple le vecteur de coordonées $(1, -2, 1)$.
5. On résout le système $f(x, y, z) = (x, y, z)$. On trouve effectivement une droite affine $\mathcal{D}$.
6. D'après la classification faite en cours, l'application f est la rotation autour de $\mathcal{D}$ et d'angle indentique à celui de sa partie linéaire. C'est donc le demi-tour d'axe $\mathcal{D}$.

Exercice 2. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que le polynome caractéristique de A est le polynome $(2 - X)(X - 1)^2$.

2. Dire pourquoi A n'est pas diagonalisable.
3. Dire pourquoi A est trigonalisable.
4. Trigonaliser A. Donner explicitement des matrices P et T telles que $T = P^{-1}AP$.

Corrigé. 1. Le calcul du polynome caractéristique donne $P_A(X) = -X^3 + 4X^2 - 5X + 2$. On vérifie aisément que ce polynôme est bien égal à $(2 - X)(X - 1)^2$.

2. La recherche de l'espace propre associé à la valeur propre 1, montre qu'il est de dimension 1. La multiplicité géométrique de 1 n'est donc pas égale à sa multiplicité algébrique.
3. Le polynome caractéristique de A est scindé. D'après le cours, A est trigonalisable.
4. Les matrices
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
conviennent.

Exercice 3. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes 1,X,X^2 et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\ell_1(P) = P(1)$$
$$\ell_2(P) = P'(1)$$
$$\ell_3(P) = \int_0^1 P(x)dx$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Corrigé. 1. Les coordonnées de ℓ_i dans la base duale de $(1, X, X^2)$ sont obtenus en calculant $\ell_i(1), \ell_i(X), \ell_i(X^2)$ On obtient :

$$\ell_1(1) = 1, \ell_1(X) = 1, \ell_1(X^2) = 1,$$
$$\ell_2(1) = 0, \ell_2(X) = 1, \ell_2(X^2) = 1,$$
$$\ell_3(1) = 1, \ell_3(X) = \tfrac{1}{2}, \ell_3(X^2) = \tfrac{1}{3}.$$

2. Pour montrer que l'on obtient une base, il suffit de vérifier que la matrice composée des coefficients calculés dans la question précédente est inversible. Or,
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$
est non nul, ce qui montre que la matrice est inversible.
3. Notons $\mathcal{B}'$ la base de E que l'on cherche, de sorte que $\mathcal{B}'^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. D'après le cours,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' =^t (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}\mathcal{B}'^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$
Par conséquent, $\mathcal{B}' = (-3X^2 + 6X - 2, \frac{3}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2}, 3X^2 - 6X + 3)$ est la base recherchée.

Exercice 4. 1. On considère l'application $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{trace}({}^tAB)$. Expliciter $\phi(A, B)$ en fonction des coefficients de A, B. En déduire que ϕ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. On considère la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Que vaut la norme de la matrice identité $I_n \in M_n(\mathbb{R})$?
3. Montrer que pour toute matrice A, on a l'inégalité

$$|\text{trace}(A)| \leq \sqrt{n}\sqrt{\text{trace}({}^tAA)}.$$

4. Dans quels cas a-t-on égalité dans l'inégalité précédente ?

Corrigé. 1. On note a_{ij}, b_{ij} les coefficients des matrices A et B. Le coefficient à la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice ${}^tAB$ est

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}.$$

Donc,

$$\phi(A, B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}b_{ki}.$$

Si l'on identifie $M_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$ on reconnait le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

2. Par définition,

$$\|I_n\| = \sqrt{\text{trace}({}^tI_nI_n)} = \sqrt{n}.$$

3. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux matrices A et I_n :

$$|\phi(I_n, A)| \leq \|I_n\| \, \|A\|.$$

Cela nous donne exactement l'inégalité voulue.

4. D'après le cours, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors les deux vecteurs sont colinéaires. Ici, cela implique que A est une homothétie.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer la proposition $(\mathcal{P}_n)$ suivante : toute matrice de $O_n(\mathbb{R})$ est le produit de matrices de réflexions (c'est à dire de symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de dimension $n - 1$).

1. A l'aide des résultats du cours justifier que les propositions $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs distincts **de même norme**. Montrer que la réflexion par rapport à l'orthogonal du vecteur $x - y$ envoie x sur y.
3. On suppose qu'une matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, n'admet pas 1 pour valeur propre. Montrer qu'il existe une matrice de réflexion R telle RA admette 1 pour valeur propre.
4. On suppose dans cette question que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vérfiée pour un certain entier $n \geq 3$ et on se donne $A \in O_n(\mathbb{R})$ admettant un vecteur propre v pour la valeur propre 1. Montrer que $(\mathbb{R}v)^\perp$, l'orthogonal de la droite engendrée par v, est stable par A. En déduire que A est un produit de réflexions.
5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Corrigé. 1. D'après le cours, les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des réflexions sont des rotations, et celles-ci sont la composées de deux réflexions. Comme les rotations du plan, les rotations de $\mathbb{R}^3$ sont le produit de deux réflexions. Les éléments de $O_3(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des rotations sont des rotations gauches, c'est à dire les composées de rotations et de réflexions par rapport à des plans orthogonaux à l'axe de rotation. Ce sont donc des composées de 3 réflexions.

2. On note π la projection orthogonale sur la droite engendrée par $x-y$. La réflexion σ par rapport à $(x-y)^{\perp}$ est donnée par la formule :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \sigma(u) = u - 2\pi(u) = u - 2\frac{(u|x-y)}{(x-y|x-y)}(x-y).$$

Donc $\sigma(x) = x - 2\frac{(x|x-y)}{(x-y|x-y)}(x-y)$. Or,

$$(x-y|x-y) = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 - (x|y)) = 2(x|x-y),$$

Car les deux vecteurs ont même norme. On en déduit que $\sigma(x) = y$.

3. Soit y un vecteur non nul quelconque. Par hypothèse, $Ay \neq y$. Comme A est orthogonale, elle préserve la norme, donc Ay et y ont même norme. Il existe donc une matrice de réflexion R qui envoir Ay sur y. On a alors $RAy = y$ et y est bien vecteur propre de RA pour la valeur propre 1.

4. Soit $u \in (\mathbb{R}v)^{\perp}$. Alors,

$$(Au|v) = (u|A^{-1}v) = (u|v) = 0.$$

Donc Au est orthogonal à v et on a prouvé que $(\mathbb{R}v)^{\perp}$ est stable par A. L'endomorphisme induit est orthogonal et par hypothèse de récurrence, il est produit de réflexions σ_i par rapport à des hyperplans H_i de $(\mathbb{R}v)^{\perp}$. On note à présent R_i la réflexion de $\mathbb{R}^n$ qui coincide avec σ_i sur $(\mathbb{R}v)^{\perp}$ et qui fixe v. Alors A est le produit des R_i.

5. Par le principe de récurrence, il suffit de prouver que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}_{n-1}$ implique $\mathcal{P}_n$. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Si A admet 1 pour valeur propre, la question précédente montre qu'elle est produit de réflexions. Sinon, d'après la question 3, elle est produit d'une matrice de réflexion et d'une matrice orthogonale admettant 1 pour valeur propre. Dans tous les cas elle est donc bien produit de réflexions. Cela prouve bien $\mathcal{P}_n$.