Examen première session

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x', y', z')$ où

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 5) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine et donner la matrice A de la partie linéaire de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. En calculant les produits scalaires $(C_i|C_j)$ pour tous $1 \leq i, j \leq 3$ montrer que A est orthogonale.
3. Que vaut le déterminant de A ?
4. Décrire géométriquement A.
5. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est une droite affine dont on déterminera l'équation.
6. Décrire géométriquement f.

Exercice 2. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que le polynôme caractéristique de A est le polynôme $(2 - X)(X - 1)^2$.
2. Dire pourquoi A n'est pas diagonalisable.
3. Dire pourquoi A est trigonalisable.
4. Trigonaliser A. Donner explicitement des matrices P et T telles que $T = P^{-1}AP$.

Exercice 3. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes 1,X,X^2 et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\ell_1(P) = P(1)$$
$$\ell_2(P) = P'(1)$$
$$\ell_3(P) = \int_0^1 P(x)dx$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Exercice 4. 1. On considère l'application $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{trace}({}^tAB)$. Expliciter $\phi(A, B)$ en fonction des coefficients de A, B. En déduire que ϕ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. On considère la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Que vaut la norme de la matrice identité $I_n \in M_n(\mathbb{R})$?
3. Montrer que pour toute matrice A, on a l'inégalité
$$|\mathrm{trace}(A)| \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{trace}({}^tAA)}.$$
4. Dans quels cas a-t-on égalité dans l'inégalité précédente ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer la proposition $(\mathcal{P}_n)$ suivante : toute matrice de $O_n(\mathbb{R})$ est le produit de matrices de réflexions (c'est à dire de symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de dimension $n-1$).

1. A l'aide des résultats du cours justifier que les propositions $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs distincts **de même norme**. Montrer que la réflexion par rapport à l'orthogonal du vecteur $x - y$ envoie x sur y.
3. On suppose qu'une matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, n'admet pas 1 pour valeur propre. Montrer qu'il existe une matrice de réflexion R telle RA admette 1 pour valeur propre.
4. On suppose dans cette question que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vérfiée pour un certain entier $n \geq 3$ et on se donne $A \in O_n(\mathbb{R})$ admettant un vecteur propre v pour la valeur propre 1. Montrer que $(\mathbb{R}v)^\perp$, l'orthogonal de la droite engendrée par v, est stable par A. En déduire que A est un produit de réflexions.
5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.