Introduction à la topologie symplectique, homologie de Floer

Vincent Humilière

Notes de cours
Master 2 – Mathématiques fondamentales

Mars-Avril 2017

Table des matières

Avant propos

Ces notes reprennent de manière assez fidèle ce qui a été exposé en cours. Toutefois, contrairement au cours oral, elles présentent une lacune grave : aucun dessin n'y figure. Je m'efforce de rendre ces notes aussi utilisables que possible, mais le temps/courage manque par moment. Pour en faire une référence décente, il faudrait y ajouter, outre des dessins, plus d'exemples et d'exercices.

La plupart des démonstrations sont empruntées avec très peu de modifications à des références désormais classiques, en particulier [12], [11], [1].

Chapitre 1

Bases de géométrie symplectique, introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les bases de la géométrie symplectique : espaces vectoriels symplectiques, variétés symplectiques, formalisme hamiltonien. Nous démontrons le théorème de Darboux selon lequel les variétés symplectiques sont localement « standard ». Enfin nous abordons le problème de la rigidité symplectique et énonçons les trois théorèmes importants qui seront l'objectif de ce cours.

I Notion de variété symplectique, exemples de base

I.1 Espaces vectoriels symplectiques

Définition 1.1. *Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée Ω. La forme Ω est appelée forme symplectique.*

Exemple 1.2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'espace $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots, y_n)\}$ muni de la forme bilinéaire $\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i$, est un espace vectoriel symplectique appelé espace vectoriel symplectique standard. Pour tous vecteurs (x, y), (x', y'), la forme symplectique standard Ω_0 est donc donnée par :

$$\Omega_0((x, y), (x', y')) = y_1 x'_1 - y'_1 x_1 \; + \; \dots \; + \; y_n x'_n - y'_n x_n.$$

On peut interpréter cette forme comme suit. Dans le cas $n = 1$, c'est à dire dans $\mathbb{R}^2$, Ω_0 est (au signe près) le déterminant et mesure donc des aires de paralléllogrammes. En dimension plus grande, on pense à $\mathbb{R}^{2n}$ comme au produit $\mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$; la forme Ω_0 est la somme des contributions de chacun des facteurs $\mathbb{R}^2$, donc est une somme d'aires de parallélogrammes. ◀

Remarque 1.3. Le fait que Ω soit non-dégénérée signifie que Ω induit un isomorphisme

$$\Omega^\sharp : E \to E^*.$$

Cela a pour conséquence que pour tout sous-espace F, l'orthogonal symplectique de F, c'est-à-dire le sous espace

$$F^{\perp\Omega} = \{\xi \in E \,|\, \forall \eta \in F, \Omega(\xi,\eta) = 0\},$$

a pour codimension la dimension de F, et que $(F^{\perp\Omega})^{\perp\Omega} = F$. Attention, ils ne sont pas nécessairement supplémentaires (cf. exercice suivant) ! ◀

EXERCICE 1.4. Dans l'espace symplectique standard $\mathbb{R}^4$ introduit dans l'exemple 1.2, vérifier que :

$$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\})^{\perp\Omega_0} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\},$$
$$(\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\})^{\perp\Omega_0} = \{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}.$$

Plus généralement, montrer que $F\cap F^{\perp\Omega} = \{0\}$ si et seulement si la restriction de Ω à F est non-dégénérée.

L'exercice précédent illustre une des différences fondamentales entre les espaces symplectiques et les espaces euclidiens qui est l'existence de sous-espaces isotropes, c'est-à-dire de sous-espaces où la forme symplectique s'annule, ou autrement dit de sous-espaces F vérifiant $F \subset F^{\perp\Omega}$.

Proposition 1.5. *Tout espace vectoriel symplectique (E,Ω) admet une base symplectique, c'est à dire une base $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n)$ qui vérifie les identités : $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$,*

$$\Omega(e_i,e_j) = \Omega(f_i,f_j) = 0, \quad \Omega(f_i,e_j) = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases} \tag{1.1}$$

En particulier, tout espace symplectique est de dimension paire.

REMARQUE 1.6.
1. La matrice de la forme symplectique dans une base symplectique est la matrice par blocs de taille $n\times n$ suivante : $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ est une base symplectique pour la forme symplectique standard.

◀

Démonstration de la proposition 1.5. Nous allons faire la démonstration par récurrence sur la dimension d. Le cas $d = 0$ est trivial et le cas $d = 1$ l'est presqu'autant car il n'y a pas de forme antisymétrique non-dégénérée sur un espace de dimension 1.

Supposons maintenant la proposition démontrée pour tout espace de dimension inférieure ou égale à $d-1$, pour un certain entier $d \geqslant 2$. Soit (E,Ω) de dimension d. Alors, comme Ω est non-dégénérée, il existe deux vecteurs sur lesquels Ω ne s'annule pas. Quitte à multiplier l'un deux par une constante, on peut même supposer que ces deux vecteurs e_1, f_1 vérifient $\Omega(f_1, e_1) = 1$.

On considère maintenant l'orthogonal symplectique de l'espace $F = \langle e_1, f_1 \rangle$ engendré par ces deux vecteurs. On vérifie facilement que $F \cap F^{\perp\Omega} = \{0\}$, d'où l'on déduit que $F^{\perp\Omega}$ est un supplémentaire de F. Enfin, on vérifie que la restriction de Ω à $F^{\perp\Omega}$ est non-dégénérée : si $\xi \in F$ non nul, comme Ω est non-dégénérée sur E, il existe un vecteur η, que l'on peut écrire $\eta = ae_1 + bf_1 + \nu$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $\nu \in F^{\perp\Omega}$ tel que $0 \neq \Omega(\xi, \eta) = \Omega(\xi, \nu)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $F^{\perp\Omega}$, et en déduire une base de $(e_2, \ldots, e_n, f_2, \ldots, f_n)$ de $F^{\perp\Omega}$ vérifiant les identités (1.1). La famille $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E vérifiant ces mêmes identités. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Définition 1.7. *Une application linéaire Φ entre deux espaces vectoriels symplectiques (E, Ω) et (E', Ω') vérifiant*

$$\forall \xi, \eta \in E, \quad \Omega(\xi, \eta) = \Omega'(\Phi(\xi), \Phi(\eta))$$

est dite symplectique.

Une application linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$ dans lui-même est symplectique si et seulement si sa matrice A dans la base canonique vérifie

$$A^T J_0 A = J_0,$$

où $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme symplectique standard. Une telle matrice est également dite symplectique.

On note $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

L'ensemble $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie simple (cf. n'importe quel livre sur les groupes de Lie). On verra plus tard que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ a le même type d'homotopie que $U(n)$ et donc que son groupe fondamental est $\mathbb{Z}$.

Un corollaire immédiat de la proposition 1.5 et du point 2 de la remarque 1.6 est :

Corollaire 1.8. *Tout espace vectoriel symplectique (E, Ω) est équivalent à l'espace symplectique standard : il existe un entier $n > 0$ et une application linéaire bijective $\Phi : E \to \mathbb{R}^{2n}$ tels que*

$$\forall \xi, \eta \in E, \quad \Omega(\xi, \eta) = \Omega_0(\Phi(\xi), \Phi(\eta)).$$

Autrement dit les espaces vectoriels symplectiques sont classifiés par leur dimension.

I.2 Variétés symplectiques, exemples

Définition 1.9. *Une variété symplectique est une variété différentielle M (de classe C^∞) munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non-dégénérée.*

En particulier, en tout point x d'une variété symplectique (M, ω), l'espace tangent T_xM est un espace vectoriel symplectique pour la forme ω_x.

Les exemples fondamentaux sont les suivants.

Exemple 1.10.

1. L'espace vectoriel symplectique standard $\mathbb{R}^{2n}$ est une variété symplectique. On notera ω_0 plutôt que Ω_0 lorsqu'on pense à la variété $\mathbb{R}^{2n}$ plutôt qu'à l'espace vectoriel. Plus généralement bien sûr tout espace vectoriel symplectique est une variété symplectique.

2. Pour une 2-forme donnée, la condition d'être symplectique est locale, donc le quotient d'une variété symplectique par l'action libre et propre d'un groupe discret est à nouveau une variété symplectique. En particulier, les tores $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ munis de la forme standard induite de $\mathbb{R}^{2n}$ sont des variétés symplectiques.

3. Sur une surface une 2-forme fermée non-dégénérée n'est rien d'autre qu'une forme volume (i.e., une 2-forme qui ne s'annule pas). Par conséquent, les surfaces orientables admettent des structures symplectiques.

4. Pour toute variété différentielle N, l'espace total du fibré cotangent T^*N admet une structure symplectique canonique donnée par $\omega = d\lambda$, où λ est la 1-forme définie comme suit. Etant donnés $x \in T^*N$ et $\xi \in T_x(T^*N)$,
$$\boxed{\lambda_x(\xi) = \langle x, d\pi_x(\xi)\rangle}$$
où $\pi : T^*N \to N$ est la projection canonique.

   Ecrivons cette 1-forme en coordonnées. Si l'on choisit des coordonnées locales $q = (q_1, \ldots, q_n)$ sur N induisant des coordonnées locales $x = (q, p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ sur T^*N, un vecteur tangent $\xi \in T(T^*N)$ s'écrit dans ces mêmes coordonnées sous la forme $\xi = (s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n)$, et on a alors $d\pi_x(\xi) = (s_1, \ldots, s_n)$ donc $\lambda_x(\xi) = p_1 s_1 + \cdots + p_n s_n$. En d'autres termes,
$$\boxed{\lambda_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i}$$
On abrège souvent cette formule en écrivant : $\lambda = p\,dq$.

5. L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ admet une structure symplectique canonique induite de la structure symplectique standard de $\mathbb{C}^{n+1} =$

$\{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}^{n+1}\} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$. Avec la notation complexe, la structure canonique s'écrit $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i = \frac{1}{2i}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$.

Pour comprendre comment on obtient une forme induite sur l'espace projectif, on commence par considérer la restriction σ de ω_0 à la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$. En chaque point $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de la sphère, le noyau de σ_z est l'orthogonal symplectique de $T_z\mathbb{S}^{2n+1}$ qui est de dimension 1. Cette droite est dirigée par le vecteur iz, et est donc la droite tangente au cercle [1] paramétré par $\theta \mapsto (e^{i\theta}z_1, \ldots, e^{i\theta}z_n)$. Or l'espace projectif est le quotient de $\mathbb{S}^{n+1}$ par ces cercles et la forme σ est invariante par l'action du cercle. Le tangent au projectif est donc le quotient du tangent de $\mathbb{S}^{n+1}$ par le noyau de σ_z, qui y induit donc une forme non-dégénérée.

On peut aussi décrire la forme symplectique de l'espace projectif explicitement en utilisant les cartes usuelles. Cette forme est la partie imaginaire de la forme de Kähler de Fubini-Study (cf. [12], page 131).

Cette forme symplectique est source d'un grand nombre d'exemples de variétés symplectiques car elle induit par restriction une forme symplectique sur toute sous-variété complexe de l'espace projectif.

6. Pour tout groupe de Lie de dimension finie G, les orbites de l'action coadjointe de G sur le dual de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ portent une structure symplectique naturelle (cf. [2], page 139).

◀

On pourrait donner de nombreux autres exemples. En particulier, il est possible de construire des variétés symplectiques à partir d'anciennes. Par exemple le produit de deux variétés symplectiques est naturellement une variété symplectique ; un certain type de quotient, appelé « réduction symplectique », est une autre source de constructions.

Cependant, il y a aussi beaucoup de variétés qui n'admettent pas de structure symplectique. La proposition suivante donne deux contraintes simples :

Proposition 1.11. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors la $2n$-forme $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ne s'annule pas (c'est à dire est une forme volume). Ceci a deux conséquences sur la topologie de M :*

1. *la variété M est orientable,*
2. *la classe de cohomologie de De Rham $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ représentée par ω ne s'annule pas puisque $[\omega] \cup \cdots \cup [\omega] \neq 0$.*

Démonstration . En tout point x, la proposition 1.5 appliquée à l'espace T_xM et la forme ω_x implique qu'il suffit de vérifier que la $2n$-forme alternée $\Omega_0^{\wedge n}$ n'est pas nulle. Or on démontre facilement par récurrence que

$$\frac{1}{n!}\Omega_0^{\wedge n} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

1. Un tel cercle est appelé cercle de Hopf.

L'existence d'une forme volume implique l'orientabilité, d'où le point 1. Par ailleurs, une forme volume est non triviale en cohomologie, d'où le point 2. □

EXERCICE 1.12. Vérifier l'identité $\frac{1}{n!}\Omega_0^{\wedge n} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$.

La proposition ci-dessus implique par exemple que $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{S}^4$ n'admettent pas de structure symplectique. Il y a d'autres obstructions à être symplectique. Par exemple, on verra que toutes les variétés symplectiques admettent des structures presque complexes.

II Théorème de Darboux

Le théorème de Darboux est un énoncé fondamental. Il affirme que toutes les variétés symplectiques sont localement équivalentes (« symplectomorphe ») à l'espace symplectique standard $\mathbb{R}^{2n}$. On ne pourra donc distinguer deux variétés symplectiques de même dimension que par des invariants de nature globale. [2]

Définition 1.13. *On appelle diffeomorphisme symplectique ou symplectomorphisme un diffeomorphisme ψ entre deux variétés symplectiques (M,ω) et (M',ω') tel que*

$$\psi^*\omega' = \omega.$$

Ceci signifie que pour tout $x \in M$, l'application linéaire entre espaces vectoriels symplectiques $d\psi : T_xM \to T_{x'}M'$ est symplectique.

Théorème 1.14 (Darboux). *Pour toute variété symplectique (M,ω) de dimension $2n$ et tout point $x \in M$, il existe un diffeomorphisme symplectique entre un voisinage de x et un voisinage de 0 dans $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.*

Démonstration (Méthode « du chemin » de Moser). Soit $\phi : U \to V$ une carte de M en x, c'est-à-dire un difféomorphisme entre un voisinage U de x et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$. Grâce à la proposition 1.5, nous pouvons supposer que la différentielle en x de ϕ est une application linéaire symplectique. Nous allons déformer ϕ en un diffeomorphisme symplectique en construisant une famille de difféomorphismes $(h_t)_{t\in[0,1]}$ telle que $h_0 = \phi$ et h_1 soit symplectique dans un voisinage de x. Nous allons chercher h_t sous la forme $h_t = \psi_t^{-1} \circ \phi$ avec ψ_t un difféomorphisme défini sur un voisinage de 0.

Pour cela on considère pour tout $t \in [0,1]$, la forme $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t(\phi^{-1})^*\omega$, définie sur V. Pour que $h_1 = \psi_1^{-1} \circ \phi$ vérifie $h_1^*\omega_0 = \omega$, il suffit que ψ_t satisfasse $\omega_0 = \psi_t^*\omega_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Dérivons par rapport à t

2. On interprète parfois le théorème de Darboux en disant qu'il n'y a pas de géométrie symplectique locale, que les seuls phénomènes intéressants sont globaux.

cette relation. En notant X_t le champ de vecteur (dépendant du temps) qui engendre ψ_t, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt}(\psi_t^*\omega_t) \\ &= \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \tfrac{d}{dt}\omega_t) \\ &= \psi_t^*(d\iota_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0). \end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on a utlisé la formule « magique » de Cartan $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota \circ d$, et le fait que ω_t est fermée. D'après le lemme de Poincaré, $\omega_1 - \omega_0$, qui est fermée, admet une primitive au voisinage de 0, que l'on notera α. Le calcul précédent montre que l'on peut construire ψ_t en intégrant un champ de vecteur X_t satisfaisant la relation :

$$\iota_{X_t}\omega_t = -\alpha, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{1.2}$$

Par hypothèse, ω_t coïncide avec ω_0 à l'origine, donc il existe un voisinage de 0 sur lequel ω_t est non-dégénérée. La relation (1.2) détermine donc un unique champ de vecteur X_t (avec les notations de la remarque 1.3, on a $X_t = -(\omega_t^\sharp)^{-1}(\alpha)$). $\square$

Le théorème de Darboux nous apprend qu'il n'y a pas d'invariant local en géométrie symplectique autre que la dimension, contrairement à ce qui se passe par exemple en géométrie riemanienne, où la courbure est invariant local.

III Formalisme hamiltonien

On fixe une variété symplectique (M, ω).

Définition 1.15. *1. Le gradient symplectique (ou « champ de vecteur hamiltonien ») d'une fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$ est l'unique champ de vecteur X_F vérifiant :*

$$dF = -\iota_{X_F}\omega = \omega(\cdot, X_F).$$

2. Un hamiltonien H est une fonction lisse sur $\mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$. On notera souvent $H_t(x) = H(t,x)$.

3. Un hamiltonien qui ne dépend pas du temps t est dit autonome.

4. Le flot hamiltonien (ou l'isotopie hamiltonienne) engendrée par un hamiltonien H est l'isotopie ϕ_H^t engendrée par le champ de vecteur dépendant du temps X_{H_t}. On omettera souvent le t en notant X_H pour X_{H_t}.

5. Un difféomorphisme hamiltonien est un difféomorphisme qui est le temps-1 d'une isotopie hamiltonienne.

Equations de Hamilton Dans l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, le gradient symplectique d'un hamiltonien H s'écrit ainsi :

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right). \tag{1.3}$$

Remarquons au passage que dans chaque facteur $\mathbb{R}^2 = \{(x_i, y_i)\}$, il s'agit du gradient de H que l'on a tourné de $\frac{\pi}{2}$. Le flot hamiltonien de H est donc solution du système différentiel (les fameuses « équations de Hamilton ») :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \begin{cases} \dot{x}_i & = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i & = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}} \tag{1.4}$$

Ces équations trouvent leur origine dans la mécanique classique. En particulier, l'exemple suivant montre que les systèmes conservatifs classiques s'expriment sous forme hamiltonienne.

Exemple 1.16. On note ici $(q, p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ les coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^{2n}$, et l'on considère un Hamiltonien indépendant du temps et de la forme « énergie cinétique + énergie potentielle » :

$$H(q, p) = \tfrac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q).$$

Les équations de Hamilton deviennent $\dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i$ et $\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ d'où l'on tire une équation famillière de la mécanique newtonienne :

$$m\ddot{q} = -\mathrm{grad}\, V(q).$$

Ici, q représente la position, p la quantité de mouvement (ou « impulsion »). ◀

La « conservation de l'énergie » est donnée par la propriété suivante :

Proposition 1.17. *Soit H un hamiltonien autonome. Alors H est invariant le long de son flot ϕ_H^t.*

Démonstration . En effet $dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$, donc $\frac{d}{dt}(H \circ \phi_H^t) = 0$. □

Cette propriété permet de bien comprendre les flots hamiltoniens autonomes en dimension 2 : les orbites suivent les lignes de niveau de H.

La forme symplectique est également préservée par les systèmes hamiltoniens.

Proposition 1.18. *Pour tout hamiltonien H et tout t, on a $(\phi_H^t)^*\omega = \omega$.*

Démonstration . En effet, $\mathcal{L}_{X_H}\omega = d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H} d\omega = -d(dH) + 0 = 0$, donc $\frac{d}{dt}(\phi_H^t)^*\omega = 0$. □

EXERCICE 1.19. Soit H un hamiltonien et ψ un difféomorphisme symplectique . Montrer que le hamiltonien $(t,x) \mapsto H_t \circ \psi(x)$ engendre l'isotopie $\psi^{-1} \circ \phi_H^t \circ \psi$.

REMARQUE 1.20. Le même argument montre que l'isotopie engendrée par un champ de vecteur X préserve la forme symplectique si et seulement si la 1-forme $\iota_X\omega$ est fermée. La distinction entre symplectique et hamiltonien est donc controlée par le quotient des formes fermés par les formes exactes, c'est-à-dire $H^1(M,\mathbb{R})$.

Plus précisément, si l'on suppose pour simplifier M compacte, on peut démontrer que le groupe $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ des difféomorphismes symplectiques de M est un groupe de Lie de dimension infinie, localement modélé sur l'espace des 1-formes fermées sur M, et que l'ensemble des difféomorphismes Hamiltoniens $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ en est un sous-groupe distingué localement modelé sur l'espace des 1-formes exactes. Le quotient de la composante de l'identité $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ par $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est isomorphe à un quotient de $H^1(M,\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret (cf. [12] Chapitre 10).

De cette remarque on gardera en particulier l'idée qu'il y a beaucoup de difféomorphismes symplectiques et que parmi eux beaucoup d'entre eux sont hamiltoniens. Cette situation est très différente de la géométrie riemanienne où il y a tout au plus un groupe de dimension finie d'automorphismes et bien souvent aucun automorphisme. On exprime souvent ce fait en disant que la géométrie symplectique est plus « flexible » que la géométrie riemanienne. ◀

EXEMPLE 1.21. Sur le tore standard $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$, un champ de vecteur X constant et non nul induit une forme $\iota_X\omega$ fermée mais non-exacte. L'isotopie engendrée est donc symplectique mais non-hamiltonienne.

Plus généralement, pour toute 1-forme fermée $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n$ sur $\mathbb{T}^n$, le champ de vecteur

$$X(x,y) = (0,\ldots,0,\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x))$$

sur $\mathbb{T}^{2n}$ vérifie $\iota_X\omega(x,y) = \alpha_1(x)dx_1 + \alpha_n dx_n$. Par conséquent, X engendre une isotopie symplectique qui n'est hamiltonienne que si α est exacte.

Dans le cas particulier de $\mathbb{T}^2$, la condition α exacte signifie que le flot de X pousse la courbe $\gamma_0 = \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ sur une courbe $\gamma_t = \{(x, t\alpha(x)) \,|\, x \in \mathbb{S}^1\}$ telle que l'aire algébrique située entre γ_t et γ_0 est nulle. ◀

En fait on peut montrer que les isotopies hamiltoniennes sont exactement les isotopies symplectiques ϕ^t telles que pour toute courbe fermée γ, l'aire symplectique entre $\phi^t(\gamma)$ et γ est nulle. C'est la théorie du flux (cf [12] Chapitre 10).

IV Rigidité vs flexibilité

Dans cette partie nous énonçons trois théorèmes fondamentaux dont la démonstration forme l'objectif de ce cours. Nous accompagnons les énoncés par des considérations méta-mathématiques sur la flexibilité/rigidité en géométrie symplectique.

On a déjà vu (remarque 1.20) que la géométrie symplectique est plus flexible que la géométrie riemanienne. On peut se demander néanmoins si elle présente une certaine forme de rigidité, en essayant par exemple de la comparer à la géométrie du volume.

On entend par géométrie du volume l'étude des variétés munies d'une forme volume. Par exemple, d'après la proposition 1.11, les variétés symplectiques sont munies de la forme volume $\frac{1}{n!}\omega^n$. La géométrie du volume est connue pour être très flexible ce qui signifie qu'il y a beaucoup de difféomorphismes préservant le volume et que l'on peut faire beaucoup de choses avec. Ce principe est illustré par l'énoncé folklorique suivant.

Théorème 1.22. *Soit (M,μ) une variété munie d'une forme volume. Etant donnés deux ouverts connexes difféomorphes U et U' de M, si les volumes totaux sont égaux, c'est-à-dire si $\int_U \mu = \int_{U'} \mu$, alors il existe un difféomorphisme $\psi : M \to M$ qui préserve le volume, $\psi^*\mu = \mu$, et tel que $\psi(U) = U'$.*

Autrement dit, la seule obstruction à ce qu'il existe un difféomorphisme préservant la structure est le volume total.

IV.1 L'alternative de Gromov et le théorème de Gromov-Eliashberg

Sur une variété symplectique, les difféomorphismes qui préservent la forme symplectique préservent également le volume. On a donc une inclusion

$$\mathrm{Symp}(M,\omega) \subset \mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(\mathrm{M}, \tfrac{1}{\mathrm{n!}}\omega^{\wedge \mathrm{n}}).$$

Gromov a démontré le théorème suivant :

Théorème 1.23 (Alternative de Gromov, [9] page 346)**.** *On suppose que M est compacte de dimension $2n$ avec n impair et que $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$. Alors, si $\mathcal{G}$ est un groupe vérifiant*

$$\mathrm{Symp}(M,\omega) \subset \mathcal{G} \subset \mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(\mathrm{M}, \tfrac{1}{\mathrm{n!}}\omega^{\wedge \mathrm{n}}),$$

alors $\mathcal{G} = \mathrm{Symp}(M,\omega)$ ou $\mathcal{G} = \mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(\mathrm{M}, \frac{1}{\mathrm{n!}}\omega^{\wedge \mathrm{n}})$.

Les hypthèses faites sur M peuvent être supprimées avec l'effet de changer un peu la conclusion. Mais le principe reste le même : soit $\mathcal{G}$ n'est pas beaucoup plus gros que $\mathrm{Symp}(M,\omega)$, soit pas beaucoup plus petit que $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(\mathrm{M}, \frac{1}{\mathrm{n!}}\omega^{\wedge \mathrm{n}})$.

Le théorème précédent s'applique en particulier à l'adhérence $\overline{\mathrm{Symp}(M,\omega)}$ de $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ dans Diff(M) pour la topologie C^0. Il s'agit bien sûr d'un groupe contenant $\mathrm{Symp}(M,\omega)$. On se convainc du fait que tous ses éléments préservent le volume en se rappelant que préserver la forme volume est équivalent à préserver la mesure induite par la forme volume, et qu'une limite uniforme d'applications préservant une mesure la préserve également.

On déduit donc du théorème ci-dessus qu'il y a deux possibilités :

- soit tous les difféomorphismes préservant le volume sont limites uniformes de difféormorphismes symplectiques (Flexibilité),
- soit tout difféomorphisme qui est limite uniforme de difféomorphismes symplectiques est symplectique (Rigidité).

Théorème 1.24 (Gromov-Eliashberg, [5]). *Tout difféomorphisme qui est limite uniforme de difféomorphismes symplectiques est symplectique.*

On en déduit que la géométrie symplectique est plus rigide que la géométrie du volume.

Nous démontrerons ce théorème à la section IV.2 en utilisant une preuve différente de celle d'Eliashberg, qui consistait à utiliser l'alternative de Gromov après avoir explicité un difféomorphisme préservant le volume ne pouvant pas être approché par des difféomorphismes symplectiques.

IV.2 Non-squeezing de Gromov et capacités symplectiques

La rigidité symplectique peut aussi être étudiée par l'intermédiaire du problème du plongement : étant donnés deux ouverts U, V de $\mathbb{R}^{2n}$ (par exemple), existe-t-il un difféomorphisme symplectique envoyant U dans V. On se concentre ici sur le cas très simple où U est une boule euclidienne et V un cylindre. Plus précisément on note

$$\begin{aligned} B_r &= \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant r\}, \\ Z_R &= \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, x_1^2 + y_1^2 \leqslant R\}. \end{aligned}$$

On appellera B_r boule standard de rayon r et Z_R cylindre standard de rayon R.

Remarquons que même si r est beaucoup plus grand que R, il existe une application préservant le volume envoyant B_r dans Z_R ; par exemple l'application linéaire

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\lambda^{-n+1} x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n, \lambda^{-n+1} y_1, \lambda\, y_2, \ldots, \lambda\, y_n),$$

pour λ suffisamment grand. Le théorème (fameux) suivant montre que les difféomorphismes symplectiques ne sont pas aussi flexibles : on ne peut pas tasser une grosse boule dans un cylindre de rayon inférieur.

Théorème 1.25 (Non-Squeezing de Gromov, 1985, [8]). *S'il existe un plongement symplectique de B_r dans Z_R, alors $r \geqslant R$.*

REMARQUE 1.26. Attention, dans la définition de Z_R le choix des deux coordonnées x_1, y_1 est important. Par exemple dans $\mathbb{R}^4$, si on les remplace par x_1, x_2 le théorème de non-squeezing devient faux. En effet, l'application linéaire $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (\varepsilon\, x_1, \varepsilon\, x_2, \varepsilon^{-1}\, y_1, \varepsilon^{-1}\, y_2)$ est symplectique et envoie B_1 dans $\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant \varepsilon^2\}$. ◀

Ce théorème est connecté à la notion de capacité symplectique. En termes vagues, une capacité symplectique est une manière « symplectique » de mesurer les ensembles.

Définition 1.27 (Ekeland-Hofer, [4]). *Une capacité symplectique sur* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ *est une application qui associe à toute partie* $U \subset \mathbb{R}^{2n}$*, un nombre* $c(U) \in [0, +\infty]$*, vérifiant*

1. *si* $U \subset V$*, alors* $c(U) \leqslant c(V)$ *(*MONOTONIE*),*
2. $c(\phi(U)) = c(U)$*, pour tout plongement symplectique* $\phi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ *(*INVARIANCE SYMPLECTIQUE*),*
3. $c(\lambda U) = \lambda^2 c(U)$*, pour tout réel* $\lambda > 0$ *(*HOMOGÉNÉITÉ*),*
4. $c(B^{2n}(1)) = c(Z^{2n}(1)) = \pi$ *(*NORMALISATION*).*

L'existence d'une capacité symplectique est absolument non-triviale et est en fait équivalente au théorème de non-squeezing. En effet, si c est une capacité symplectique, et s'il existe un plongement symplectique de B_r dans Z_R alors on doit avoir

$$\pi r^2 = r^2 c(B_1) = c(B_r) \leqslant c(Z_R) = R^2 c(Z_1) = \pi R^2,$$

d'où $r \leqslant R$. Réciproquement, d'après le théorème de non-squeezing, l'application w qui a un ouvert U associe la quantité

$$w(U) = \sup\{r \,|\, B^{2n}(r) \text{ se plonge symplectiquement dans } U\},$$

que l'on étend à tous les ensembles en posant $w(V) = \inf\{w(U) \,|\, U \text{ ouvert }, V \subset U\}$, définit une capacité symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Il existe d'autres capacités symplectiques, définies en particulier via la dynamique hamiltonienne. Nous en construirons une à la fin du cours ce qui nous donnera une démonstration du théorème de non-squeezing.

En général calculer une capacité est difficile. Par un changement de coordonnées linéaires symplectiques, on peut cependant toujours calculer la capacité d'un ellipsoïde en se ramenant à l'exemple suivant :

EXEMPLE 1.28. Etant donnés des réels $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, on considère l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \,|\, \tfrac{1}{a_1^2}(x_1^2 + y_1^2) + \cdots + \tfrac{1}{a_n^2}(x_n^2 + y_n^2) \leqslant 1\}.$$

Des inclusions $B_{a_1} \subset \mathcal{E} \subset Z_{a_1}$, on déduit $c(\mathcal{E}) = \pi a_1^2$ pour toute capacité symplectique. ◀

On peut penser à la notion de capacité symplectique comme à un analogue (ayant de moins bonnes propriétés) de la notion de mesure qui soit adaptée au monde symplectique. On sait que les difféomorphismes qui préservent une forme volume sont caractérisés par le fait qu'ils préservent la mesure associée. On a une propriété analogue pour les applications linéaires symplectiques :

Proposition 1.29. *Une application linéaire inversible $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ qui préserve la capacité des ellipsoïdes est soit symplectique, soit anti-symplectique, c'est à dire vérifie $A^*\Omega_0 = \Omega_0$ ou $A^*\Omega_0 = -\Omega_0$.*

Démonstration . Commençons par remarquer qu'une matrice est (anti-)symplectique si et seulement si sa transposée l'est. En effet, de $A^T J_0 A = \pm J_0$ et $J_0^2 = -\mathrm{Id}$, on tire $-A^T = \pm J_0 A^{-1} J_0$ et donc $A J_0 A^T = \pm J_0$. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que A^T n'est ni symplectique ni anti-symplectique.

Alors, on peut trouver [3] deux vecteurs u, v de $\mathbb{R}^{2n}$ tels que $\Omega_0(A^T u, A^T v) \neq \pm\Omega_0(u, v)$. Quitte à perturber légèrement u ou v et comme A^T est inversible, on peut supposer que $\Omega_0(A^T u, A^T v) \neq 0$ et $\Omega_0(u, v) \neq 0$. Quitte à remplacer A par A^{-1}, on peut supposer que $|\Omega_0(A^T u, A^T v)| < |\Omega_0(u, v)|$. Enfin, quitte à multiplier u ou v par un scalaire on peut aussi supposer que $\Omega_0(u, v) = 1$. On a donc :

$$0 < \lambda^2 = |\Omega_0(A^T u, A^T v)| < \Omega_0(u, v) = 1.$$

La démonstration de la proposition 1.5 montre que l'on peut trouver une base symplectique $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ telle que $u_1 = u$ et $v_1 = v$. De même il existe une base symplectique $(u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)$ telle que $u'_1 = \lambda^{-1} A^T u$ et $v'_1 = \pm\lambda^{-1} A^T v$.

Etudions à présent A^T dans ces bases, autrement dit considèrons la matrice

$$B = P'^{-1} A^T P,$$

où P (resp. P') est la matrice symplectique qui envoie la base canonique $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ sur $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ (resp. $(u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)$). Par construction, $B\, e_1 = \lambda\, e_1$ et $B\, f_1 = \pm\lambda\, f_1$. La matrice de sa transposée a donc la forme d'une matrice triangulaire inférieure par blocs :

$$B^T = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda \end{smallmatrix} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

3. On peut justifier l'existence de tels vecteurs u et v de la manière suivante. Dire que A^T n'est ni symplectique ni anti-symplectique signifie que la matrice $Q = -A J_0 A^T J_0$ n'est ni l'identité ni l'opposée de l'identité. Donc, il existe un vecteur v' tel que $Qv' \neq v'$ et un vecteur v'' tel que $Qv'' \neq -v''$. Si jamais $Qv' = -v'$ et $Qv'' = v''$, alors on remarque que $Q(v' + v'') \neq \pm(v' + v'')$. Dans tous les cas, on a trouvé un vecteur w (parmi v', v'' et $v' + v''$) tels que Qw n'est ni w, ni $-w$. Un raisonnement analogue donne ensuite l'existence d'un vecteur u tel que $u^T Q w$ n'est égal ni à $u^T w$ ni à $-u^T w$. En posant $v = J_0 w$, on a donc $u^T A J_0 A^T v \neq \pm u^T J_0 v$.

On en déduit que B^T envoie le cylindre Z_1 dans le cylindre strictement plus petit Z_λ. On peut donc trouver un ellipsoïde de capacité π dont l'image par A est incluse dans un ellisoïde de capacité $\pi\lambda^2$. Contradiction. $\square$

Nous allons utiliser la proposition précédente pour déduire le théorème de Gromov-Eliashberg de l'existence d'une capacité symplectique, c'est-à-dire du non-squeezing.

Démonstration du théorème 1.24 (Gromov-Eliashberg) en admettant l'existence d'une capacité symplectique. Nous allons démontrer le résultat suivant : si (ϕ_n) est une suite de difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^{2n}$ qui converge uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme ϕ, alors en tout point x où ϕ est différentiable, $d\phi_x$ est une application linéaire symplectique.

Soit c une capacité symplectique. Commençons par démontrer que ϕ préserve la capacité des ellipsoïdes. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde (que l'on suppose sans perte de généralité centré en 0) et $\lambda < 1$. Pour n assez grand, $f_n = \phi^{-1} \circ \phi_n$ devient proche de l'identité sur tout compact donc

$$f_n(\lambda\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \subset f_n(\lambda^{-1}\mathcal{E}).$$

On en déduit les inclusions $\phi_n(\lambda\mathcal{E}) \subset \phi(\mathcal{E}) \subset \phi_n(\lambda^{-1}\mathcal{E})$ et donc l'encadrement :

$$c(\lambda\mathcal{E}) \subset c(\phi(\mathcal{E})) \subset c(\lambda^{-1}\mathcal{E}).$$

On obtient $c(\phi(\mathcal{E})) = c(\mathcal{E})$ lorsque λ tend vers 1.

Soit maintenant x un point où ϕ est différentiable. Alors la suite d'applications $x \mapsto n\phi(\frac{1}{n}x)$ converge uniformément sur tout compact vers $d\phi_x$. Le même argument que ci-dessus montre alors que $d\phi_x$ préserve également la capacité des ellipsoïdes. D'après la proposition 1.29, $d\phi_x$ est soit symplectique, soit anti-symplectique.

Pour montrer que $d\phi_x$ ne peut pas être anti-symplectique, remarquons que si jamais $d\phi_x^*\Omega_0 = -\Omega_0$, alors en appliquant ce que l'on a démontré à la suite $\phi_n \times \mathrm{Id} : \mathbb{R}^{2n+2n} \to \mathbb{R}^{2n+2n}$, on obtiendrait $(d\phi_x \times \mathrm{Id})^*(\Omega_0 \times \Omega_0) = \pm(\Omega_0 \times \Omega_0)$, et donc $(-\Omega_0) \times \Omega_0 = \pm(\Omega_0 \times \Omega_0)$, contradiction. $\square$

IV.3 La conjecture d'Arnold

La conjecture d'Arnold affirme que les difféomorphismes Hamiltoniens ont toujours des points fixes, et plus précisément :

Conjecture 1.30 (Arnold). *Sur toute variété symplectique compacte (M, ω) un difféomorphisme Hamiltonien a au moins autant de points fixes qu'une fonction doit avoir de points critiques.*

Notons Crit(M) le nombre minimal de points critiques d'une fonction $M \to \mathbb{R}$. La théorie de Morse (que l'on abordera au chapitre 2) permet de donner des minorants de ce nombre en fonction de la topologie de M. Voici des exemples de propriétés connues de Crit(M) :

- Si M est une surface compacte sans bord, $\mathrm{Crit(M)} = 2$ si M est une sphère, et $\mathrm{Crit(M)} = 3$ sinon.
- $\mathrm{Crit(T^{2n})} \geqslant \mathrm{2n+1}$ et $\mathrm{Crit(\mathbb{CP}^n)} \geqslant \mathrm{n+1}$.
- En général, $\mathrm{Crit(M)} \geqslant \mathrm{cl(M)} + 1$ où cl(M) est le plus petit entier k tel qu'il existe des classes $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in H^*(M, \mathbb{R})$ de degré au moins 1, telles que $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \neq 0$.
- En particulier, pour une variété symplectique de dimension $2n$, on a $\mathrm{Crit(M)} \geqslant \mathrm{n+1}$.

La liste de propriétés ci-dessus nous donne donc sous-réserve que la conjecture d'Arnold soit vraie, autant de minorants pour le nombre de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien.

La conjecture d'Arnold a été établie dans le cas des variétés symplectiques asphériques, c'est à dire vérifiant $\pi_2(M) = 0$.

Remarque 1.31.

1. La formule du point fixe de Lefschetz donne une condition topologique suffisante pour l'existence d'un point fixe : pour un difféomorphisme ϕ isotope à l'identité,

$$\chi(M) = \sum_{x \text{ point fixe de } \phi} \mathrm{ind(x, \phi)}.$$

Cependant, cette formule ne permet jamais de conclure à l'existence de plus d'un point fixe. Il est d'ailleurs toujours possible de trouver un difféomorphisme avec un seul point fixe sur une variété quelconque. La conjecture d'Arnold est donc une manifestation de la rigidité symplectique.

2. L'hypothèse « compacte » de la conjecture d'Arnold est nécessaire car sur toute variété non-compacte, on peut trouver une fonction sans point critique

3. La conjecture d'Arnold devient fausse si l'on remplace « hamiltonien » par « symplectique ». Par exemple, les translations sur le tore n'ont pas de points fixes.

◀

La conjecture d'Arnold admet une version « non-dégénérée » qui a elle été établie pour toute variété symplectique.

Définition 1.32. *Une fonction de Morse est une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés, c'est-à-dire la Hessienne en ces points est une forme quadratique non-dégénérée.*

On verra au chapitre 2 que les fonctions de Morse forment un ouvert dense de l'espace des fonctions muni de la topologie C^∞. On verra aussi que pour toute fonction de Morse, le nombre de points critiques est minoré par le rang de l'homologie, c'est à dire la somme des nombres de Betti de la variété (cf. théorème 2.26).

Une minoration analogue apparaît dans le cas des difféomorphismes hamiltoniens non-dégénérés, que l'on définit maintenant.

Définition 1.33. *Un diffeomorphisme ϕ est dit non-dégénéré si en chacun de ses points fixes x, la différentielle $d\phi_x$ n'admet pas 1 comme valeur propre.*

Remarque 1.34. Un difféomorphisme $\phi : M \to M$ est non-dégénéré si et seulement si son graphe $\{(x, \phi(x) \,|\, x \in M\}$ est transverse à la diagonale $\{(x,x) \,|\, x \in M\}$. ◀

On verra également que les difféomorphismes non-dégénérés forment un ouvert dense de l'espace des difféomorphismes hamiltoniens. L'un des buts principaux de ce cours sera de comprendre la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.35 (Conjecture d'Arnold non-dégénérée, Floer [6]). *Soit (M,ω) une variété symplectique compacte asphérique ($\pi_2(M) = 0$) et ϕ un difféomorphisme hamiltonien sur M. Alors le nombre de points fixes de ϕ est minoré par la somme des nombres de Betti (à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).*

L'énoncé ci-dessus a maintenant été établi pour toute variété symplectique compacte, avec une démonstration analogue mais plus compliquée algébriquement. La démonstration passe par la construction d'une théorie homologique, l'homologie de Floer. Ceci occupera une bonne partie du cours.

V La fonctionnelle d'action hamiltonienne

Dans toute cette section, on suppose que (M,ω) est une variété symplectique asphérique, c'est à dire vérifiant $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$. Cette condition inclut les surfaces de genre $g \geqslant 1$ et leurs produits, dont les tores.

On note $\mathcal{L}M$ l'espace des lacets libres contractiles lisses sur M, c'est-à-dire des applications $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ de classe C^∞ qui admettent un prolongement au disque $u : \mathbb{D}^2 \to M$ de classe C^∞.

Définition 1.36. *Etant donné un hamiltonien H sur M, supposé 1-périodique en temps, la fonctionnelle d'action hamiltonienne associée à H est l'application :*

$$\mathcal{A}_H : \quad \mathcal{L}M \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto -\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega + \int_0^1 H_t(\gamma(t))\,dt, \tag{1.5}$$

où u est un prolongement lisse de γ au disque.

L'expression (1.5) ne dépend pas du choix de u grâce à la condition $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$.

EXEMPLE 1.37. Dans le cas où M est un espace cotangent T^*N, on a $\omega = d\lambda$ et la formule de Stokes nous donne $\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma^*\lambda$. En écrivant notre lacet en coordonnées locales sous la forme $\gamma(t) = (q(t), p(t))$, on obtient la formule

$$\mathcal{A}_H = \int_0^1 (p(t)\dot{q}(t) - H_t(q(t), p(t)))\, dt.$$

On y reconnaît l'« action » de la mécanique classique. ◀

L'importance de la fonctionnelle d'action en dynamique hamiltonienne provient du résultat suivant.

Proposition 1.38. *Pour tout hamiltonien 1-périodique en temps H, les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont les orbites 1-périodiques contractiles du champ de vecteur X_H.*

Pour que cette proposition ait un sens, il faut que la différentielle de $\mathcal{A}_H$ en ait un. Il faut donc définir une structure différentiable sur $\mathcal{L}M$. Intuitivement, de la même manière qu'un point proche d'un point donné x peut être paramétré par un vecteur tangent en x, un lacet proche d'un lacet donné γ peut être paramétré par la donnée pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, d'un vecteur tangent en $\gamma(t)$, autrement dit par une section du fibré γ^*TM (dont l'espace total est $\{(t, v) \in \mathbb{S}^1 \times TM \,|\, \gamma(t) = p(v)\}$).

Expliquons plus précisément cette construction. On fixe une métrique riemannienne sur M et on considère l'application exponentielle associés, qui à un vecteur v tangent en x associe le point $\exp_x(v)$ qui est le temps 1 de l'unique géodésique partant de x avec vitesse initiale v. On sait que pour tout x, $\exp_x$ est un difféomorphisme local $(T_xM, 0) \to (M, x)$. Pour tout lacet $\gamma \in \mathcal{L}M$, on considère maintenant l'application

$$\exp_\gamma : Y \mapsto (\exp_\gamma Y : t \mapsto \exp_{\gamma(t)} Y(t)),$$

définie sur un voisinage de la section nulle dans l'espace $\Gamma(\gamma^*TM)$ des sections de γ^*TM, et prenant ses valeurs dans un voisinage de γ dans $\mathcal{L}M$.

On peut alors démontrer (sans trop de difficultés si l'on se rappelle que l'exponentielle est lisse) le lemme suivant.

Lemme 1.39. *Les applications $\exp_\gamma$ forment un atlas de $\mathcal{L}M$. La structure de variété différentiable*[4] *induite ne dépend pas de la métrique riemaniennenne choisie.*

4. Comme on ne travaille ici qu'avec des applications C^∞, l'espace $\Gamma(\gamma^*TM)$ n'est pas un espace de Banach mais un espace de Fréchet. L'espace $\mathcal{L}M$ admet donc une structure de variété Fréchet. Plus tard dans le cours, on modifiera la classe de régularité pour travailler avec des espaces de Banach.

En particulier, l'espace tangent à $\mathcal{L}M$ en γ s'identifie à $\Gamma(\gamma^*TM)$.

Démonstration de la proposition 1.38. Soient $\gamma \in \mathcal{L}M$ et $Y \in \Gamma(\gamma^*TM)$. Soit aussi u un prolongement de γ au disque. Soit $s \mapsto \tilde{\gamma}(s)$ un chemin dans $\mathcal{L}M$, défini sur un petit intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, passant par γ en 0 avec dérivée Y. Pour chaque s, $\tilde{\gamma}(s)$ est un lacet. On notera $\tilde{\gamma}(s,t)$ plutôt que $\tilde{\gamma}(s)(t)$. On prolonge également $\tilde{\gamma}$ au disque en une application $\tilde{u} :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathbb{D}^2 \to M$ obtenue pour chaque $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ en concaténant à u le cylindre $[0,s] \times [0,1] \to M$, $(\sigma, t) \mapsto \tilde{\gamma}(\sigma, t)$. On a alors

$$\int_{\mathbb{D}^2} \tilde{u}^*\omega = \int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega + \int_{[0,s]\times[0,1]} \tilde{\gamma}^*\omega = \int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega + \int_0^s \int_0^1 \omega(\tfrac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t})\, dt\, d\sigma.$$

Nous pouvons maintenant calculer la différentielle de l'action :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\gamma)(Y) &= \frac{d}{ds}\mathcal{A}_H(\tilde{\gamma})|_{s=0} \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\int_{\mathbb{D}^2} \tilde{u}^*\omega\right)|_{s=0} + \int_0^1 \frac{d}{ds}(H_t(\tilde{\gamma}(s,t))|_{s=0}\, dt. \\ &= -\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial s}|_{s=0}, \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}|_{s=0}\right) dt + \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(Y(t), X_H(t, x(t))\, dt. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(Y) = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma} - X_H(t, \gamma(t)), Y(t))\, dt. \tag{1.6}$$

On en déduit que γ est un point critique de $\mathcal{A}_H$ si et seulement si $\dot{\gamma} = X_H(t, \gamma)$. $\square$

La démonstration de la conjecture d'Arnold revient donc à minorer le nombre de points critiques de $\mathcal{A}_H$. Dans le cas des fonctions définies sur des variétés de dimension finie, des minorations du nombre de points critiques viennent de la théorie de Morse qui sera le sujet du prochain chapitre.

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui affirme que l'ensemble des valeurs critiques de l'action se comporte comme l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction définie sur un espace compact de dimension finie.

Lemme 1.40. *L'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{A}_H$ est compact et de mesure nulle.*

Démonstration . Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que l'application qui à un point fixe associe l'orbite 1-périodique correspondante est un homéomorphisme. L'ensemble des orbites 1-périodiques est donc compact, et il en est de même de son image par $\mathcal{A}_H$. Nous avons justifié que l'ensemble des valeurs critiques est compact.

Pour montrer qu'il est de mesure nulle, nous allons montrer que toute orbite périodique γ admet un voisinage dans $\mathcal{L}M$ sur lequel l'ensemble des valeurs critiques de l'action est inclus dans l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction définie sur un espace de dimension finie. Par compacité, toute valeur critique de l'action appartient à une réunion finie de tels ensembles. D'après le lemme de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de l'action sera donc de mesure nulle.

Soit donc γ une orbite de 1-périodique de H, et soit U un ouvert qui s'identifie à une boule ouverte centrée en $\gamma(0)$. A tout point p appartenant à U on associe le lacet γ_p obtenu en concaténant l'orbite $(\phi_H^t)_{[0,1]}$ avec le chemin linéaire reliant $\phi_H^1(p)$ à p[5]. On pose ensuite $h(p) = \mathcal{A}_H(\gamma_p)$. L'application h définie sur U est lisse et si x est un point critique de $\mathcal{A}_H$ alors nécessairement, $x(0)$ est un point critique de h et $h(x(0)) = \mathcal{A}_H(x)$. Donc l'ensemble des valeurs critiques de l'action sur le voisinage de γ constitué des lacets qui partent de U est inclus dans l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{A}_H$. $\square$

5. Pour être parfaitement rigoureux, ce chemin n'est pas lisse au point de recollement, mais il peut être rendu lisse en applicant des reparamétrizations temporelles adéquates. Nous passons sous silence ce point pour ne pas alourdir la démonstration.

Chapitre 2

Homologie de Morse

Nous allons voir que l'on peut comprendre la topologie d'une variété à partir de la simple donnée d'une de ses fonctions. La théorie développée permet en particulier de minorer le nombre de points critiques d'une fonction à l'aide d'invariants de nature homologique.

Ce chapitre est indépendant du précédent.

I Théorie de Morse classique

I.1 Fonctions de Morse

Soit M une variété différentiable.

Définition 2.1. *Un point critique p d'une fonction f est dit non-dégénéré si la différentielle seconde de f en p est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. On appelle indice de Morse du point p le nombre de carrés négatifs dans l'écriture canonique de la forme quadratique associé à la dérivée seconde.*

Une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés est appelée fonction de Morse.

Exercice 2.2. Vérifier que la fonction sur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 + 2y^2$ induit sur $\mathbb{RP}^2$ une fonction de Morse qui admet trois points critiques, d'indices respectifs 0, 1 et 2.

Proposition 2.3. *L'ensemble des fonctions de Morse est un ouvert dense pour la topologie C^∞.*

Démonstration . Il est clair que les fonctions de Morse forment un ouvert pour la topologie C^2 et donc pour la topologie C^∞.

Première étape : existence des fonctions de Morse. On suppose ici notre variété M plongée dans $\mathbb{R}^n$. On note d la dimension de M. Pour chaque point $p \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction « distance au carré » restreinte à M :

$$f_p : \quad M \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x-p\|^2.$$

La différentielle de f_p s'écrit :

$$df_p(x)\xi = 2(x-p)\cdot\xi.$$

Donc les points critiques sont les points x tels que $x - p \perp T_xM$.

On note $N = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \,|\, v \perp T_xM\}$ le fibré normal à M. On vérifie facilement que N est une sous-variété de $M \times \mathbb{R}^n$. On appelle *points focaux* de M les valeurs critiques de l'application $\sigma : N \to \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto x+v$. En appliquant le lemme de Sard à σ, l'existence de fonctions de Morse est conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 2.4. *Les points focaux de M sont exactement les points p tels que f_p ne soit pas de Morse.*

Démonstration . On choisit une paramétrisation locale $(u_1,\dots,u_n) \mapsto x(u_1,\dots,u_d)$ de M et une base orthonormée $v_1,\dots,v_{n-d}$ de $(T_xM)^\perp$. Ceci nous donne un paramétrage local de N

$$(u_1,\dots,u_d,t_1,\dots,t_{n-d}) \mapsto \left(x(u_1,\dots,u_d), \sum_{i=1}^{n-d} t_i v_i(u_1,\dots,u_d)\right).$$

Dans ces coordonnés, les dérivées partielles de f_p sont données par $\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = 2(x-p)\cdot\frac{\partial x}{\partial u_i}$, et la hessienne est donc la matrice de coefficients

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_j} + (x-p)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}\right). \tag{2.1}$$

Etudions à présent les dérivées partielles de σ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t_j} = v_j.$$

On considère la matrice dont les coefficients sont les produits scalaires des n vecteurs précédents avec les n vecteurs indépendants

$$\frac{\partial x}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial x}{\partial u_n}, v_1,\dots,v_{n-d}.$$

On obtient une matrice qui a le même rang que la jacobienne de σ, et qui s'écrit sous la forme d'une matrice trangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_j}\right) & * \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Comme v_k est orthogonal à $\frac{\partial x}{\partial u_j}$, on a

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(v_k \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + v_k \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Le bloc supérieur gauche de la matrice ci-dessus admet donc pour coefficients

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} - v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j},$$

et, d'après (2.1), représente la hessienne de $f_{x+v} = f_{\sigma(x,v)}$ au point x.

Or, p est une valeur régulière de σ si et seulement si pour tout x sa jacobienne en $(x, p-x)$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si pour tout x, la hessienne de f_p est inversible. $\square$

Deuxième étape : densité des fonctions de Morse. La démonstration va se déduire de la remarque suivante : lorsque $A \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$, les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{2A}(f_{(-A,0\ldots,0)}(x) - A^2) = \frac{\|x\|^2}{2A} + x_1$$

convergent vers l'application $x \mapsto x_1$ uniformément sur tout compact (et ses dérivées convergent également de manière adéquate).

Soit maintenant f une fonction sur M. On considère un plongement h de M dans $\mathbb{R}^n$ dont la première coordonnée est f (ce qui peut se construire à partir d'un plongement dans $\mathbb{R}^{n-1}$). D'après la première étape, il y a arbitrairement proche de $(-A, 0\ldots, 0)$ un point p tel que $f_p \circ h$ soit de Morse. Mais alors $\frac{1}{2A}(f_p \circ h - A^2)$ est également de Morse et est arbitrairement proche sur tout compact de f (et de même pour les dérivées). $\square$

I.2 Topologie des sous-niveaux

Soit f est une fonction de Morse sur une variété compacte M. On s'intéresse l'évolution de la topologie des sous-niveaux, c'est à dire des ensembles

$$f^a = \{x \in M \mid f(x) \leqslant a\} = f^{-1}(]-\infty, a]),$$

lorsque a parcourt $\mathbb{R}$.

Le principe général est le suivant. Lorsque a évolue, la topologie de f^a ne change pas tant que l'on ne franchit pas de valeur critique (proposition 2.5). Lorsque a franchit une valeur critique, la topologie de f^a change d'une manière déterminée seulement par l'indice du point critique correspondant (proposition 2.7).

Proposition 2.5. *Soient $a < b$ deux réels tels que l'intervalle $[a, b]$ ne contienne aucune valeur critique de f. Alors f^b est difféomorphe à f^a.*

Démonstration . On choisit une métrique riemanienne sur M, ce qui permet de définir le gradient ∇f de f. Soit χ une fonction qui vaut 1 sur $f^{-1}([a,b])$ et 0 sur l'ensemble des points critiques de f. Une telle fonction existe car ces deux compacts sont disjoints. Alors, le flot ϕ^t du champ de vecteurs

$$X = -\chi \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$$

vérifie $\frac{d}{dt}(f \circ \phi^t(x))|_{t=0} = df(x) \cdot X(x) = -1$, pour tout $x \in f^{-1}([a,b])$. Ceci implique que $\phi^{b-a}(f^b) = f^a$. $\square$

On peut remarquer que la démonstration précédente reste valide lorsque f n'est pas de Morse. Pour étudier la situation lorsqu'on franchit un point critique, nous aurons besoin du lemme suivant, dont on ne rappellera pas la démonstration, et qui est un exercice classique de calcul différentiel.

Lemme 2.6. *Si p est un point critique non-dégénéré d'indice k d'une fonction f, alors il existe des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ autour de p dans lesquels :*

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

En particulier, les points critiques non-dégénérés sont isolés. On appellera « carte de Morse en p » de telles coordonnées locales.

Proposition 2.7. *Si $f^{-1}([a,b])$ contient un unique point critique non-dégénéré d'indice k, alors f^b a le type d'homotopie de f^a auquel on a attaché une cellule de dimension k.*

Idée de la démonstration . Il suffit de comprendre le phénomène au voisinage du point critique, dans une carte de Morse. Les niveaux de la forme quadratique $-x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$ sont des hyperboloïdes. Le sous-niveau ε se rétracte sur la réunion du sous-niveau $-\varepsilon$ et du k-disque $\{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \,|\, x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leqslant \varepsilon\}$ (faire un dessin dans les cas où $k = 0, 1, 2$ et $n = 2$). On a bien attaché une k-cellule. $\square$

Ceci permet de montrer qu'une variété a le type d'homotopie d'un CW-complexe et laisse présager qu'il va être possible de calculer son homologie à partir d'une fonction de Morse.

II Le complexe de Morse-Thom-Smale-Witten

II.1 La condition de Smale et les espaces de trajectoires

On se donne une fonction de Morse f et une métrique riemannienne g sur M, compacte de dimension n. On notera $X = -\nabla f$ l'opposé du gradient et $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de X. Pour tout point critique p, l'indice de Morse de p sera noté $i(p)$.

A chaque point critique p de f, on peut associer sa variété « stable »

$$W_s(p) = \{x \in M \,|\, \phi^t(x) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p\},$$

et sa variété « instable »

$$W_u(p) = \{x \in M \,|\, \phi^t(x) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} p\}.$$

Lemme 2.8. *Les ensembles $W_u(p)$ et $W_s(p)$ (qui dépendent du choix de la métrique g) sont des sous-variétés de M homéomorphes respectivement à $\mathbb{R}^{i(p)}$ et $\mathbb{R}^{n-i(p)}$.*

Idée de la démonstration . Soit $h = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ une carte de Morse en p, de sorte que $f(x) = f(0) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$. Alors $W_u(p)$ correspond à l'espace $V_- = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. On pose $S_- = \{x \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \,|\, \|x\| = \varepsilon\}$. Pour ε assez petit, $S_- \subset V_-$. Alors, $W_u(p)$ est la réunion de $h^{-1}(V_-)$ et de l'image du plongement $]-\infty, +\infty[\times S_- \to M$, $(s, x) \mapsto \phi^s(x)$. Ceci explique pourquoi $W_u(p)$ est une sous-variété.

On en déduit également que $W_u(p)$ est obtenu en compactifiant en un point $]-\infty, +\infty[\times S_-$ le bord en $-\infty$. Ceci implique que $W_u(p)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^k$.

On raisonne de même pour $W_s(p)$. $\square$

On rappelle que deux sous-variétés V et V' sont dites *transverses* si

$$\forall x \in V \cap V', \quad T_xV + T_xV' = T_xM.$$

En particulier deux sous-variétés disjointes sont transverses. On note alors $V \pitchfork V'$. Cette notion, introduite par René Thom est très pratique pour deux raisons : deux sous-variétés en « position générale » [1] sont transverses, l'intersection de deux sous-variétés V et V' transverses est une sous-variété de dimension $\dim V + \dim V' - n$

Définition 2.9. *Nous dirons que la paire (f, g) satisfait la condition de Smale si pour tous points critiques a, b de f, les variétés $W_u(a)$ et $W_s(b)$ sont transversent.*

Exercice 2.10. Vérifier que sur une surface, la condition de Smale est équivalente au fait qu'il n'y ait pas de courbe de gradient joignant deux points critiques d'indice 1.

La proposition suivante est immédiate.

1. Autrement dit, la condition de tranversalité est ouverte et il est toujours possible de perturber l'une des deux sous-variétés pour la rendre transverse à l'autre.

Proposition 2.11. *Lorsque la condition de Smale est satisfaite alors pour tous points critiques $\mathcal{M}(a,b) = W_u(a) \cap W_s(b)$ est une sous-variété de M de dimension $i(a) - i(b)$.*

L'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{M}(a,b)$ (donnée par $s \cdot x = \phi^s(x)$) est libre et propre donc le quotient $\mathcal{M}(a,b)/\mathbb{R}$ est une sous-variété de dimension $i(a)-i(b)-1$.

On admettra le théorème suivant (pour la démonstration, cf. [1], page 37)

Théorème 2.12 (Smale, 1961). *On fixe une carte de Morse dans le voisinage de chaque point critique de f. Alors, l'ensemble des métriques riemaniennes telles que (f,g) satisfasse la condition de Smale forme un ouvert dense (pour la topologie C^∞) dans l'ensemble des métriques g qui coïncident avec la métrique standard dans chacune des cartes de Morse.*

II.2 Le complexe et sa différentielle

On fixe une paire (f,g) vérifiant la condition de Smale sur une variété compacte M de dimension n. Pour simplifier, nous allons travailler avec des coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, mais toute la théorie peut être faite avec des coefficients quelconques.

On note $C_k(f,g)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ engendré par les points critiques de f d'indice de Morse égal à k. Autrement dit, $C_k(f,g)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles de tels points critiques, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$. On remarque en particulier, si $k \notin \{0,\ldots,n\}$, alors $C_k(f,g) = \{0\}$.

Nous allons munir cette collection d'espaces vectoriels d'une structure de complexe de chaînes, en définissant une différentielle. Pour cela, nous allons utiliser la proposition suivante, que nous démontrerons à la section II.4.

Proposition 2.13. *Soient a et b deux points critiques de f. Si $i(a) = i(b)+1$, alors $\mathcal{M}(a,b)/\mathbb{R}$ est un ensemble fini.*

Définition 2.14. *Pour tout entier k, on note ∂_k l'unique application linéaire $C_k(f,g) \to C_{k-1}(f,g)$ telle que pour tout point a d'indice k,*

$$\partial_k(a) = \sum_{b \in \mathrm{Crit} f,\ i(b)=k-1} n(a,b)\, b,$$

où est le nombre d'élément de $\mathcal{M}(a,b)/\mathbb{R}$ modulo 2.

L'espace $\mathcal{M}(a,b)/\mathbb{R}$ (que l'on notera $\mathcal{L}(a,b)$) est l'espace des courbes de gradient joignant a à b. On utilise parfois le terme « espace de module des courbes de gradient », « espace de module » étant l'expression consacrée pour désigner les espaces d'objets géométriques.

Nous démontrerons à la section II.4 que ces applications linéaires forment une différentielle :

Théorème 2.15. *Pour tout entier k,*

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0.$$

On peut donc définir des groupes d'homologie comme suit :

Définition 2.16. *On définit le k-ième groupe d'homologie de Morse de la paire (f, g) comme le quotient*

$$H_k(f, g) = \ker \partial_k / \mathrm{im}\, \partial_{\mathrm{k+1}}.$$

On peut s'entrainer à calculer ces groupes d'homologie pour des fonctions de Morses simples sur les surfaces. Comme on va le voir, on doit retrouver l'homologie de la surface, quelle que soit la fonction.

II.3 Compacité de l'espace des trajectoires

Les résultats de cette section ne nécessitent pas la condition de Smale.

On note $\mathcal{N}$ l'espace de toutes les trajectoires du champ de vecteur $X = -\nabla f$. On a donc :

$$\mathcal{N} = \{\gamma : \mathbb{R} \to M \,|\, \dot\gamma = X \circ \gamma\}.$$

Lemme 2.17. *Toutes les trajectoires de X convergent en $+\infty$ et $-\infty$ vers des points critiques.*

Démonstration . Soit $\gamma(t) = \phi^t(x)$ une trajectoire. Nous allons en étudier la convergence en $+\infty$. La fonction $t \mapsto f(\phi^t(x))$ est décroissante et minorée. Sa dérivée (qui vaut $df(X \circ \phi^t(x)) = -\|\nabla f\|^2(\phi^t(x))$) admet donc une limite nulle en $+\infty$.

Par ailleurs, par compacité, $\phi^t(x)$ admet une valeur d'adhérence b en $+\infty$. D'après ce qui précède, on a $\nabla f(b) = 0$. Ceci prouve que b est un point critique. D'après le lemme 2.6, une orbite ayant un point critique comme valeur d'adhérence converge (une orbite qui entre dans une carte de Morse soit converge vers le point critique, soit passe sous le niveau critique et ne revient donc pas à proximité [2]).

On raisonne de même en $-\infty$. $\square$

On déduit donc du lemme précédent :

$$\mathcal{N} = \bigcup_{a,b \,\in\, \mathrm{Crit}(H)} \mathcal{N}(a, b).$$

2. On a utilisé la condition « Morse » pour racourcir la démonstration, mais le lemme reste vrai sans cette condition

Remarque 2.18. Le théorème de Cauchy-Lipschitz (et sa version sur la dépendance en les conditions initiales) implique que si l'on munit $\mathcal{N}$ de la topologie C^∞_{loc}, alors l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev} : \gamma \mapsto \gamma(0), \quad \mathcal{N} \to \mathrm{M}$$

est un homéomorphisme. En particulier, l'espace des trajectoires $\mathcal{N}$ est compact.

Notons aussi au passage que l'application d'évaluation ev donne un homéomorphisme entre $\mathcal{N}(a,b)$ et $\mathcal{M}(a,b) = W_u(a) \cap W_s(b)$. ◀

L'action de $\mathbb{R}$ sur M par le flot de X correspond à l'action par translation sur la variable sur $\mathcal{N}$:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathcal{N}, \quad s \cdot \gamma = \gamma(\cdot + s)$$

Proposition 2.19. *On munit $\mathcal{N}$ de la topologie C^∞_{loc}. On suppose que $\gamma_n \in \mathcal{N}(a,b)$ converge vers un certain $\gamma \in \mathcal{N}$. Alors, quitte à prendre une sous-suite, il existe*

- *des points critiques $a_0 = a, a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1} = b$,*
- *pour tout $k \in \{0, \ldots, \ell\}$, une suite de réels $(s^k_n)_n$ et une trajectoire $\gamma^k \in \mathcal{N}(a_k, a_{k+1})$,*

tels que $s^k_n \cdot \gamma_n$ converge vers γ^k.

De plus, γ est l'un des γ^k (à translation près sur la variable) s'il n'est pas constant, et l'un des a_k s'il l'est.

Dans l'énoncé qui précéde, on voit que, dans le quotient $\mathcal{N}/\mathbb{R}$, chacun des γ^k est valeur d'adhérence de γ_n.

Nous allons donner la démonstration avec l'hypothèse supplémentaire que la fonction prend des valeurs distinctes sur des points critiques distinctes. Cela simplifie un peu l'argument, et par ailleurs ce n'est pas une hypothèse dramatique car elle génériquement vérifiée (on peut l'obtenir facilement en ajoutant à une fonction de Morse donnée des petites fonctions plateau supportées au voisinage des points critiques).

Démonstration . Nous allons construire les a_k et γ_k par induction sur k.

On commence par choisir une valeur régulière $c_1 < f(a)$ et telle qu'il n'y ait pas de valeur critique dans l'intervalle $[c_1, f(a)[$. On note s^1_n l'unique réel tel que $f(\gamma_n(s^1_n)) = c_1$. Par compacité de $\mathcal{N}$, quitte à prendre une sous-suite, $s^1_n \cdot \gamma_n$ converge vers une trajectoire que l'on notera γ^1. On note a_0, a_1 les points critiques tels que $\gamma^1 \in \mathcal{N}(a_0, a_1)$. Par construction,

$$f(a_0) = \sup_t \lim_n f(\gamma_n(s^1_n + t)), \quad \text{et} \quad f(a_1) = \inf_t \lim_n f(\gamma_n(s^1_n + t)).$$

En particulier, la première identité implique $c_1 \leqslant f(a_0) \leqslant f(a)$ et donc $a = a_0$ d'après nos hypothèses.

Passons à l'étape suivante. Comme précédemment, on choisit $c_2 < f(a_1)$ et telle qu'il n'y ait pas de valeur critique dans l'intervalle $[c_2, f(a_1)[$ et on note s_n^2 l'unique réel tel que $f(\gamma_n(s_n^2)) = c_2$. Quitte à prendre une sous-suite, $s_n^2 \cdot \gamma_n$ converge vers une trajectoire que l'on notera γ^2. On note a_1', a_2 les points critiques tels que $\gamma^2 \in \mathcal{N}(a_1', a_2)$. Nous allons prouver que $a_1' = a_1$.

Remarquons d'abord que γ^2 intersecte le niveau c_2, ce que ne fait pas γ^1. Cela implique d'une part que γ^1 et γ^2 n'ont pas la même image et d'autre part que $f(a_1') > c_2$. Comme $[c_2, f(a_1)[$ ne contient pas de valeur critique, on a donc $f(a_1') \geqslant f(a_1)$.

Remarquons maintenant que la suite $(s_n^2 - s_n^1)$ n'est pas majorée. En effet, si elle l'était, alors elle aurait une valeur d'adhérence s (n'oublions pas qu'elle est positive) et $\gamma^2 = s \cdot \gamma^1$ aurait la même image que γ^1. Par conséquent, pour tout réel T, on a pour n assez grand $s_n^2 - T > s_n^1 + T$ et donc :

$$f(\gamma_n(s_n^2 - T)) < f(\gamma_n(s_n^1 + T)).$$

D'où, $f(\gamma^2(-T)) < f(\gamma^1(T))$. En faisant tendre T vers l'infini, on obtient $f(a_1') \leqslant f(a_1)$ et donc $f(a_1) = f(a_1')$.

Comme dans notre définition de fonction de Morse, les valeurs critiques de points critiques distincts sont distinctes, on en déduit que $a_1 = a_1'$. La démonstration de l'égalité $a = a_0$ est analogue.

On procède de même pour les étapes suivantes pour construire $a_3, \ldots, a_{\ell+1}$ et $\gamma^3, \ldots, \gamma^\ell$. Un argument similaire à ce qui précède permet de montrer que $a_{\ell+1} = b$.

Il nous reste à démontrer la dernière affirmation.

Supposons que pour un certain entier k, on ait $f(\gamma(0)) \in]f(a_{k+1}), f(a_k)[$. Alors la suite (s_n^k) est bornée. En effet, supposons (par exemple) qu'elle converge vers $+\infty$. Alors pour tout T et pour n assez grand, $0 < s_n^k + T$ donc $f(\gamma_n(0)) > f(s_n^k \cdot \gamma_n(T))$. En passant à la limite, $f(\gamma(0)) \geqslant a_k$, contradiction. La suite (s_n^k) est donc bornée et on en déduit que $\gamma = \gamma^k$ à translation près.

Supposons enfin que pour un certain entier k, on ait $f(\gamma(0)) = f(a_k)$. Alors, l'argument précédent montre que $s_n^{k-1} \to +\infty$ est impossible. La suite (s_n^{k-1}) ne peut pas non plus être bornée car on aurait alors $\gamma = \gamma^{k-1}$ à translation près. On en déduit donc que nécessairement s_n^{k-1} tend vers $-\infty$. De même, s_n^k tend vers $+\infty$. On en déduit comme précédemment que $f(\gamma)$ est constante égale $f(a_k)$ et donc que $\gamma = a_k$. $\square$

La proposition précédente permet de construire une compactification explicite de l'espace des courbes joignant a à b.

Définition 2.20 (Espace des courbes de gradient brisées)**.** *On note $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{M}(a, b)/\mathbb{R} = \mathcal{N}(a, b)/\mathbb{R}$ l'espace des courbes de gradient de a à b. On appel-*

lera courbe brisée de a à b les éléments de l'ensemble.

$$\overline{\mathcal{L}}(a,b) = \bigcup_{a_i \in \mathrm{Crit} f} \mathcal{L}(a,a_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(a_\ell, b)$$

On munit $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ de la topologie dont une base de voisinages est constituée des ensembles $\mathcal{W}(\gamma, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ suivants. Pour toute courbe brisée $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell) \in \mathcal{L}(a,a_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(a_\ell, b)$, on peut choisir des cartes de Morse autour de chacun des a_i, les points d'entrée et de sortie des courbes γ_i et γ_{i+1} ont alors, dans leur niveau respectif, des voisinages U_i^+ et U_i^-. On note $\mathbf{U}^+$ et $\mathbf{U}^-$ la famille des U_i^+ et U_i^-. On définit alors $\mathcal{W}(\gamma, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ comme l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \overline{\mathcal{L}}(a,b)$ pour lesquels il existe des entiers $0 < i_0 < i_1 < \cdots < i_k = \ell - 1$ tels que $\lambda_j \in \mathcal{L}(a_{i_j}, a_{i_{j+1}})$, pour tout $j = 0, \ldots, k$, et λ_j sort de la carte en a_{i_j} par l'intérieur de $U_{i_j}^-$ et entre dans la carte en $a_{i_{j+1}}^+$ par l'intérieur de $U_{i_{j+1}}^+$.

Malgré l'apparente complication de sa définition, cette topologie est intuitivement simple : un voisinage d'une courbe brisée est l'ensemble des courbes brisées qui ne passent pas loin !

Comme conséquence directe de la compacité de $\mathcal{N}$ et de la proposition 2.19, nous obtenons :

Corollaire 2.21. *Toute suite à valeur dans $\mathcal{L}(a,b)$ admet une sous-suite qui converge vers un élément de $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ pour la topologie précédente.*

II.4 Les espaces de courbes de gradient comme variétés à bord

Commençons par signaler cette conséquence élémentaire de la condition de Smale :

Remarque 2.22. On suppose la condition de Smale vérifiée. Alors, s'il existe une courbe de gradient joignant a à b alors

$$i(b) \leqslant i(a) - 1.$$

En effet, s'il existe une telle courbe de gradient, alors cela signifie que $\mathcal{M}(a,b) = W_u(a) \cap W_s(b)$ est une variété non-vide et de dimension $i(a) - i(b)$. Par ailleurs, comme $\mathbb{R}$ agit librement sur $\mathcal{M}(a,b)$, cette dimension doit être au moins 1. ◀

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition permettant de définir la différentielle de Morse.

Démonstration de la proposition 2.13. D'après la remarque précédente, l'espace des courbes $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ est réduit à $\mathcal{L}(a,b)$. On déduit alors du corollaire 2.21 que $\mathcal{L}(a,b)$ est compact. □

Pour démontrer l'identité $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, nous aurons besoin de comprendre aussi le cas où $i(b) = i(a) - 2$.

Proposition 2.23. *On suppose que la paire (f, g) vérifie la condition de Smale. Alors pour tous points critiques a, b tels que $i(b) = i(a) - 2$, l'espace $\mathcal{L}(a, b)$ peut se compactifier en une variété (topologique) à bord de dimension 1, dont le bord est en bijection avec l'ensemble des courbes de gradient de a à b brisées en un point, c'est-à-dire l'ensemble*

$$\bigcup_{c \in \mathrm{Crit}(f),\ i(c) = i(a) - 1} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b).$$

REMARQUE 2.24. Plus généralement, on peut montrer que pour tous a, b (sans la condition d'indice) l'espace $\mathcal{L}(a, b)$ se compactifie en l'espace $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ qui admet une structure de variété « à bord et coins ». ◀

Nous pouvons maintenant en déduire la démonstration de $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, c'est à dire du théorème 2.15.

Démonstration du théorème 2.15. L'application linéaire $\partial_{k-1} \circ \partial_k$ est obtenue comme un produit matriciel. Pour tout point critique d'indice k, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(a) &= \partial_{k-1} \left(\sum_{i(c)=k-1} n(a, c)\, c \right) \\
&= \sum_{i(c)=k-1} n(a, c)\, \partial_{k-1}(c) \\
&= \sum_{i(c)=k-1} n(a, c) \sum_{i(b)=k-2} n(c, b)\, b \\
&= \sum_{i(b)=k-2} \left(\sum_{i(c)=k-1} n(a, c) n(c, b) \right) b
\end{aligned}$$

Or, l'entier $\sum_{i(c)=k-1} n(a, c)n(c, b)$ est égal au nombre de courbes brisées joignant a à b modulo 2. Comme ces courbes brisées forment le bord d'une variété compacte à bord de dimension 1, elles sont en nombre pair. Ceci prouve $\partial_{k-1} \circ \partial_k(a) = 0$ pour tout point critique a. □

Démonstration de la proposition 2.23. Pour chaque courbe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ brisée en un point c, nous allons construire une application continue injective $\psi_\gamma : [0, \delta[\to \overline{\mathcal{L}}(a, b)$, telle que $\psi_\gamma(0) = \gamma$, $\psi_\gamma(s) \in \mathcal{L}(a, b)$ pour tout $s \in]0, \delta[$, et enfin telle que si $\gamma_n \in \mathcal{L}(a, b)$ converge vers γ alors γ_n appartient à l'image de ψ_γ pour n assez grand.

L'existence de ces applications montrera d'abord que tous les points de $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ peuvent être approchés par des points de $\mathcal{L}(a, b)$, autrement dit $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ est bien l'adhérence de $\mathcal{L}(a, b)$, et est compact d'après le corollaire 2.21. Ensuite, ces applications ψ_γ constitueront bien sûr nos cartes au bord de $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$.

Nous allons travailler dans une carte de Morse autour du point de brisure c. On note k l'indice de c. Les indices de a et b sont donc $k+1$ et $k-1$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on note $V_\pm$ les intersections des niveaux $f(c) \pm \varepsilon$ avec la carte de Morse. On note aussi

$$S_+ = V_+ \cap W_s(c) \simeq \mathbb{S}^{n-k-1}, \quad S_- = V_- \cap W_u(c) \simeq \mathbb{S}^{k-1}.$$

La condition de Smale étant vérifiée, $W_u(a) \pitchfork W_s(c)$ donc $W_u(a) \cap S_+$ est un ensemble fini, parmi lesquels le point $a_1 = S_+ \cap \gamma_1$.

Soit D un voisinage de a_1 dans $W_u(a) \cap V_+$, qui est de dimension k (intersection de $W_u(a)$ avec une hypersurface). On note Φ l'application $V_+ \setminus S_+ \to V_- \setminus S_-$ obtenue en suivant le gradient.

Lemme 2.25. *$\Phi(D \setminus \{a_1\}) \cup S_-$ est une sous-variété à bord de dimension k, dont le bord est S_-.*

L'image de Φ est un ouvert de $W_u(a) \cap V_-$, donc par la condition de Smale, $\mathrm{Im}(\Phi) \pitchfork \mathrm{W_s(b)}$. Par ailleurs, on a aussi $S_- \pitchfork W_s(b)$ donc l'intersection $(\Phi(D \setminus \{a_1\}) \cup S_-) \cap W_s(b)$ est une sous-variété à bord de dimension 1 dont le bord est donné par $S_- \cap W_s(b)$.

Ce bord contient en particulier le point $a_2 = S_- \cap \gamma_2$. Soit $\chi : [0, \delta[\to (\Phi(D \setminus \{a_1\}) \cup S_-) \cap W_s(b)$ un paramétrage tel que $\chi(0) = a_2$.

Alors $\psi_\gamma = \phi^{-1} \circ \chi :]0, \delta[\to (D \setminus \{a_1\}) \cap W_s(b)$ est l'application recherchée car elle s'étend à $[0, \delta[$ en posant $\psi(0) = a_1$. $\square$

III Homologie de Morse et homologie cellulaire

Dans cette partie nous expliquons pourquoi (mais sans détails) l'homologie de Morse d'une paire vérifiant la condition de Smale est isomorphe à l'homologie cellulaire de la variété de base. Plus précisément, la donnée des variétés instables de chacun des points critiques donnent une structure de CW-complexe à la variété. Les complexes (pas seulement leurs homologies) de Morse et cellulaires obtenus sont alors isomorphes. Nous suivrons de près l'exposition de la version anglaise de [1].

Comme la dimension d'un complexe est supérieure à la dimension de son homologie et comme le complexe de Morse est engendré par les points critiques, on en déduit :

Théorème 2.26. *Toute fonction de Morse sur une variété compacte M a au moins autant de points critiques que la somme de ses nombres de Betti à coefficients $\mathbb{Z}/2$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} \dim H_k(M, \mathbb{Z}/2)$.*

III.1 Rappels sur l'homologie cellulaire

On commence par rappeler la notion de décomposition cellulaire d'un espace (ce qui lui donne une structure de « CW-complexe »).

Définition 2.27. *Une décomposition cellulaire d'un espace topologique séparé X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de X (appelées cellules) vérifiant :*

- *pour toute cellule $e \in \mathcal{E}$, e est homéomorphe à une boule ouverte,*
- *$\mathcal{E}$ forme une partition de X,*
- *en notant $X^{(k)}$ la réunion des cellules de dimension $\leqslant k$ (que l'on appelle k-squelette de la décomposition), il existe pour toute cellule e de dimension k, une application continue*

$$\Phi_e : (\mathbb{B}_k, \mathbb{S}_{k-1}) \to (X^{(k-1)} \cup e, X^{(k-1)}),$$

appelée application d'attachement, qui induit un homéomorphisme entre $\mathbb{B}_k \setminus \mathbb{S}_{k-1}$ et e.

Remarquons que pour tout k le quotient $X^{(k)}/X^{(k-1)}$, c'est-à-dire l'espace obtenu en partant du k-squelette puis en écrasant le $k-1$-squelette sur un point, est homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k, chaque sphère correspondant à une k-cellule.

Etant donnée une variété compacte, on rappelle que le degré (modulo 2) d'une application lisse $f : M \to M$ est le nombre (modulo 2) d'antécédents d'une valeur régulière. Ce nombre ne dépend pas du choix de la valeur régulière. Ce nombre s'exprime de manière homologique en utilisant l'action de f_* de f sur l'homologie et le fait que $H_n(M, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$. Le degré de f s'étend alors aux fonctions continues en posant $f_* = \deg(f)\,\mathrm{Id}_{H_n(M,\mathbb{Z}/2)}$.

Définition 2.28 (Complexe cellulaire)**.** *Etant donnée une décomposition cellulaire, pour chaque entier m, on note K_m le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel engendré par les cellules de dimension m, et on définit une différentielle en posant*

$$\partial_m(c) = \sum_d N(c,d)\, d,$$

où pour toutes m-cellule c et $m-1$-cellule d, le scalaire $N(c,d)$ est obtenu comme suit.

La restriction de l'application d'attachement Φ_c à la sphère induit une application (encore notée Φ_c)

$$\Phi_c : \mathbb{S}^{m-1} \to X^{(m-1)} \to X^{(m-1)}/X^{(m-2)}.$$

Comme remarqué précédemment, $X^{(m-1)}/X^{(m-2)}$ est isomorphe à un bouquet de $m-1$-sphères dont l'une correspond à la cellule d. En prenant le *quotient consistant à écraser toutes les autres sphères, on obtient une application $\Psi_d : X^{(m-1)}/X^{(m-2)} \to \mathbb{S}^{m-1}$. Le scalaire $N(c,d)$ est le degré de l'application $\Psi_d \circ \Phi_c : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.*

Pour un calcul concret de $N(c,d)$, on choisit un point (en position générale) sur d et on compte à combien de points du bord de c il correspond.

Théorème 2.29. *Les applications ∂_* forment une différentielle sur K_*. Les groupes d'homologie obtenus ainsi ne dépendent pas de la décomposition et sont isomorphes à l'homologie singulière de X.*

III.2 Décomposition cellulaire issue d'une fonction de Morse

On fixe une fonction de Morse sur une variété compacte M et une métrique riemannienne g telle que (f,g) vérifie la consition de Smale. Nous allons donner des éléments d'explication au fait suivant :

Proposition 2.30. *L'ensemble des variétés instables des points critiques de f forme une décomposition cellulaire de M.*

Nous avons déjà vu (cf. lemme 2.8) que les variétés instables $W_u(p)$ des points critiques sont homéomorphes à des boules ouvertes. Nous savons également qu'elles forment une partition de M. Il reste donc à justifier l'existence d'applications d'attachement.

Nous avons vu qu'il est possible de compactifier les espaces $\mathcal{L}(a,b)$ en

$$\overline{\mathcal{L}}(a,b) = \bigcup_{a_i \in \mathrm{Crit} f} \mathcal{L}(a,a_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(a_\ell, b)$$

En laissant libre le point final b, on peut construire de manière analogue une compactification des variétés instables $W_u(a)$ en

$$\begin{aligned} \overline{W_u}(a) &= W_u(a) \cup \bigcup_{a_i \in \mathrm{Crit} f} \mathcal{L}(a,a_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(a_{\ell-1}, a_\ell) \times W_u(a_\ell) \\ &= W_u(a) \cup \bigcup_{b \in \mathrm{Crit} f} \overline{\mathcal{L}}(a,b) \times W_u(b). \end{aligned}$$

On peut alors montrer :

Lemme 2.31. *$\overline{W_u}(a)$ est homéomorphe à une boule fermée.*

En utilisant l'identification $(\mathbb{B}_m, \mathbb{S}_{m-1}) = (\overline{W_u}(c), \bigcup_d \overline{\mathcal{L}}(c,d) \times W_u(d))$, l'application d'attachement Φ_c est l'application qui agit comme l'inclusion sur $W_u(c)$ et sur les points du bord comme l'application canonique

$$\overline{\mathcal{L}}(c,d) \times W_u(d) \to W_u(d). \tag{2.2}$$

L'ensemble des variétés instables $W_u(c)$, munie de ces applications d'attachement donne une décomposition cellulaire de M.

III.3 Homologie de Morse = homologie cellulaire

Le théorème 2.26 est conséquence immédiate du théorème suivant :

Théorème 2.32. *Pour toute paire (f, g) vérifiant la condition de Smale, l'application qui à un point critique c de f associe sa variété instable $W_u(c)$ induit un isomorphisme*

$$\Upsilon : C_* \to K_*,$$

où C_* désigne le complexe de Morse de la paire (f, g) et K_* le complexe cellulaire associée à la décomposition cellulaire induite par (f, g). Cet isomorphisme commute aux différentielles,

$$\partial_* \circ \Upsilon = \Upsilon \circ \partial_*,$$

donc induit un isomorphisme entre l'homologie de Morse de (f, g) et l'homologie cellulaire de la variété.

Ce théorème est une conséquence de ce qui a été dit précédemment. Pour c et d de différence d'indice 1, les nombres $N(W_u(c), W_u(d))$ donnant la différentielle du complexe cellulaire s'obtiennent en comptant le nombre d'antécédents d'un élément « général » de $W_u(d)$ par l'application d'attachement(2.2). Il s'agit donc du nombre de points (modulo 2) dans $\mathcal{L}(c, d)$, c'est à dire $n(c, d)$.

Chapitre 3

Homologie de Floer

L'homologie de Floer est l'homologie de Morse de la fonctionnelle d'action hamiltonien , définie sur l'espace des lacets. Si l'intuition est bien celle-ci, la dimension infinie de l'espace des lacets rend la réalité de la construction bien plus délicate.

I Préparatifs

On fixe M une variété symplectique vérifiant $\pi_2(M) = 0$.

Nous ne considèrerons que des hamiltoniens 1-périodiques en temps,

$$\forall x \in M, t \in \mathbb{R}, H_{t+1}(x) = H_t(x),$$

ce qui implique que le flot ϕ_H^t vérifie $\phi_H^{t+1} = \phi_H^t \circ \phi_H^1$. On pensera donc aux hamiltoniens comme à des fonctions $H : \mathbb{S}^1 \times M \to \mathbb{R}$. Cette hypothèse est sans conséquence sur la démonstration de la conjecture d'Arnold, grâce à la remarque suivante.

Remarque 3.1. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 1-périodique, lisse et strictement croissante sur $]0,1[$, qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{3}[$ et 1 sur $]\frac{2}{3}, 1[$. Alors pour tout Hamiltonien $H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$, le hamiltonien $\tilde{H}$ défini par

$$\tilde{H}(t, x) = \rho'(t) H(\rho(t), x),$$

est lisse, 1-périodique et vérifie $\phi_{\tilde{H}}^1 = \phi_H^1$. Par conséquent, tout difféomorphisme hamiltonien peut être engendré par un hamiltonien 1-périodique. ◀

I.1 Hamiltoniens non-dégénérés

La notion de fonction de Morse est ici remplacée par la notion de hamiltonien non-dégénéré, dont on reproduit ici la définition

Définition 3.2. *Un diffeomorphisme ϕ est dit non-dégénéré si en chacun de ses points fixes x, la différentielle $d\phi_x$ n'admet pas 1 comme valeur propre. Un hamiltonien H est dit non-dégénéré si ϕ_H^1 est non-dégénéré.*

Nous avions déjà fait la remarque suivante.

REMARQUE 3.3. Un difféomorphisme $\phi : M \to M$ est non-dégénéré si et seulement si son graphe $\{(x, \phi(x)) \mid x \in M\}$ est transverse à la diagonale $\{(x, x) \mid x \in M\}$. En conséquence, un difféomorphisme non-dégénéré admet un nombre fini de points fixes. ◀

Des exemples d'hamiltoniens non-dégénérés sont fournis par les fonctions de Morse suffisamment petites en norme C^2.

Proposition 3.4. *Un hamiltonien autonome suffisamment petit en topologie C^2 n'admet pas d'orbite 1-périodique autre que ses points critiques. De plus, s'il est de Morse alors il est non-dégénéré.*

Démonstration . Comme le champ de vecteur X_H de notre hamiltonien est petit en topologie C^1, ses orbites 1-périodiques restent dans des cartes de Darboux. Il suffit donc de démontrer la proposition dans $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$.

Soit donc $x : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^n$ une orbite périodique d'un hamiltonien autonome. La formule de Parceval appliquée au développement en série de Fourier de $\dot{x}$ et $\ddot{x}$, et le fait que $\dot{x}$ est de moyenne nulle, donnent l'inégalité :

$$\|\dot{x}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \|\ddot{x}\|_{L^2}.$$

En écrivant ensuite $\ddot{x}(t) = dX_H(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$, on obtient une contradiction dès que $\|dX_H\|_{L^2} < 2\pi$.

Etudions maintenant la non-dégénérescence des points fixes. Soit p un point critique de H. On sait que la différentielle $d\phi_H^1(p)$ est la résolvante au temps 1 de l'équation linéarisée $\dot{v} = dX_H(p) \cdot v$. Or on se convainc facilement que $dX_H(p) = -J_0 \mathrm{Hess_p H}$. On peut donc écrire $d\phi_H^1(p) = \exp(-J_0 \mathrm{Hess_p H})$. On voit que 1 ne peut pas ête valeur propre de $d\phi_H^1(p)$ car nos hypothèses impliquent que $-J_0 \mathrm{Hess_p H}$ n'admet pas de valeur propre dans $2\pi i\mathbb{Z}$. □

Comme pour les fonctions de Morse, on a un résultat de généricité :

Proposition 3.5. *L'ensemble des hamiltoniens non-dégénérés est un ouvert dense pour la topologie C^2 dans l'espace de tous les hamiltoniens périodiques.*

Démonstration . Il est clair qu'un tel ensemble est ouvert. Nous allons montrer, à l'aide du théorème de transversalité de Thom, que l'on peut toujours déformer un difféomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$ en un difféomorphisme symplectique non-dégénéré. On se convaincra facilement que l'on peut en déduire la proposition à l'aide de cartes de Darboux et de partitions de l'unité.

Le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ va reposer sur la notion de fonction génératrice. Remarquons d'abord qu'un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^{2n}$ est symplectique si et seulement si la forme symplectique $(-\Omega_0) \oplus \Omega_0$ de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ s'annule sur son graphe $\Gamma_\phi =$

$\{(z,\phi(z))\,|\,z \in \mathbb{R}^{2n}\} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$. Considérons maintenant l'application linéaire symplectique

$$\Psi : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to T^*\mathbb{R}^{2n},\ (x,y;X,Y) \mapsto (x,Y;Y-y,x-X).$$

Elle envoie la diagonale de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ sur la section nulle. Soit maintenant S une fonction sur $\mathbb{R}^{2n}$, que l'on suppose petite pour la topologie C^2. Le graphe de sa différentielle $\{(x,Y;\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial Y})\,|\,(x,Y) \in \mathbb{R}^{2n}\}$ est une sous-variété de $T^*\mathbb{R}^{2n}$ sur laquelle la forme symplectique s'annule. Par conséquent, $\Psi^{-1}(\text{graphe}(\text{dS}))$ est le graphe d'un difféomorphisme symplectique. On dit alors que S en est une fonction génératrice. Un chemin de fonctions S_t partant de $S_0 = 0$ donne naissance à une isotopie symplectique. En fait, il y a une correspondance bijective entre fonctions C^2-petites et difféomorphismes symplectiques C^1-proches de l'identité.

D'après le théorème de transversalité de Thom, l'ensemble des fonctions S dont la différentielle est transverse à la sous-variété $\Psi(\Gamma_\phi)$ est dense en topologie C^∞. On peut donc trouver des difféomorphismes hamiltoniens arbitrairement proches de l'identité dont le graphe est transverse à Γ_ϕ. En composant ϕ par l'inverse d'un tel diffeomorphisme, on obtient un difféomorphisme symplectique proche de ϕ et non-dégénéré. $\square$

I.2 Structures presque complexes et gradient de la fonctionnelle d'action

De la même manière que pour faire la théorie de Morse nous avions besoin d'une métrique riemannienne, la théorie de Floer requiert une donnée auxiliaire : une structure presque complexe calibrée.

Définition 3.6.

- *Une structure complexe sur un espace vectoriel est un endomorphisme J vérifiant $J^2 = -\mathrm{Id}$.*
- *Une structure complexe J sur un espace vectoriel symplectique (E,Ω) est dite calibrée si elle vérifie :*
  - $\forall x \in E \setminus \{0\},\quad \Omega(x,Jx) > 0,$
  - $\forall x,y \in E,\quad \Omega(Jx,Jy) = \Omega(x,y).$

  Autrement dit, $\Omega(\cdot,J\cdot)$ est un produit scalaire pour lequel J est une isométrie.
- *Une structure presque complexe sur une variété est la donnée d'une section lisse J du fibré des endomorphismes de TM, telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$ (autrement dit, pour tout x, J_x est une structure complexe sur T_xM).*
- *Une structure presque complexe calibrée sur une variété symplectique (M,ω) est une structure presque complexe J, telle que J_x est calibrée pour chaque x.*

L'exemple suivant (combiné avec la proposition 1.5) montre que les structures complexes calibrées existent.

Exemple 3.7. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

est une structure complexe calibrée par la forme symplectique standard Ω_0. De plus, la métrique riemanienne $\Omega_0(\cdot, J\cdot)$ n'est autre que le produit scalaire standard. Ceci se vérifie facilement (dans $\mathbb{R}^2$ pour alléger les notations) :

$$\Omega_0((x,y), J(x',y')) = \Omega_0((x,y),(y',-x')) = y\,y' + x\,x'.$$

◀

Proposition 3.8. *Pour toute variété symplectique, l'ensemble des structures presque-complexes calibrées est non-vide et contractile.*

Démonstration . Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique. Nous allons construire une application surjective qui à un produit scalaire g associe une structure complexe J calibrée par Ω.

Pour tout produit scalaire, soit A_g l'endomorphisme antisymétrique donné par $g(\cdot, A_g\cdot) = \Omega(\cdot,\cdot)$. La décomposition polaire de A_g donne un endomorphisme symétrique S_g et une isométrie J_g telles que $S_g^2 = A_g A_g^T$ et $A_g = -S_g J_g$. On sait que toutes ces matrices peuvent être construites de manière lisse par rapport à g. Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous n'écrivons plus les indices g.

Vérifions que J est une structure complexe calibrée. En utilisant $J^T = J^{-1}$ (J est orthogonale) et $A^T = -A$,

$$(J^{-1}SJ)^2 = J^{-1}S^2J = J^TS^2J = (-A^T)(-A) = AA^T.$$

Par unicité de la racine carré, on en déduit $J^{-1}SJ = S$ et autrement dit J et S commutent. D'où $S^2J^2 = (SJ)^2 = A^2 = -S^2$, et donc $J^2 = -\mathrm{Id}$. Enfin,

$$\omega(\cdot, J\cdot) = g(\cdot, AJ\cdot) = g(\cdot, S\cdot) = g(\cdot, S\cdot)$$

donne bien une métrique riemannienne.

On a donc construit une application lisse $\Psi : g \mapsto J$, de l'ensemble des produits scalaires vers l'ensemble des structures complexes calibrées. Réciproquement, on dispose de l'application $\Phi : J \mapsto \omega(\cdot, J\cdot)$. L'application Φ n'a pas de raison d'être surjective, mais $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ (vérification facile), ce qui est suffisant pour montrer la contractilité. En effet, pour construire une homotopie entre J_0 et J_1, on utilise l'homotopie $\Psi((1-t)\Phi(J_0) + t\Phi(J_1))$.

Enfin, l'espace des structures presques complexes calibrées par une forme symplectique ω est donc l'espace des sections d'un fibré à fibres contractiles. Il est donc non-vide et contractile. □

Une structure presque complexe calibrée permet de définir une métrique sur l'espace des lacets contractiles $\mathcal{L}M$. On fixe une telle structure J. La métrique riemanienne induite sera notée $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. On définit une métrique sur $\mathcal{L}M$, en posant pour tous champs de vecteurs Y, Z, le long d'un lacet γ,

$$\langle Z, Y\rangle = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(Z(t), J\,Y(t))\,dt.$$

A l'aide de l'écriture de la différentielle de l'action déjà établie (cf formule (1.6)), nous pouvons écrire le gradient de $\mathcal{A}_H$ pour cette métrique. Par définition,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\gamma), Y\rangle &= d\mathcal{A}_H(\gamma)(Y)\\ &= \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma - X_H(t,\gamma(t)), Y(t))\,dt.\\ &= \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(J\,\dot\gamma - J\,X_H(t,\gamma(t)), J\,Y(t))\,dt.\end{aligned}$$

On en déduit : $\operatorname{grad}\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\gamma) = \mathrm{J}\,\dot\gamma - \mathrm{J}\,\mathrm{X_H}\circ\gamma = \mathrm{J}\,\dot\gamma + \nabla\mathrm{H}\circ\gamma$.

Comme pour la théorie de Morse, nous allons nous intéresser aux trajectoires d'anti-gradient, c'est à dire aux applications $s \mapsto u(s)$, $\mathbb{R} \to \mathcal{L}M$ vérifiant l'équation $\frac{du}{ds} + \operatorname{grad}\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\mathrm{u}) = 0$. De telles applications u peuvent aussi être vues comme des applications sur le cylindre $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$, en posant $u(s,t) = u(s)(t)$. L'équation devient alors :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial s} + J\,\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla H_t(u) = 0}. \tag{3.1}$$

Cette équation est appelée *équation de Floer*.

Remarque 3.9. Cette équation a trois cas particuliers remarquables :

1. Si u ne dépend pas de t, c'est-à-dire si c'est un lacet constant pour chaque s, alors u est une ligne de gradient de H.
2. Si u ne dépend pas de s, c'est une orbite périodique du champ de vecteur $X_H = J\,\nabla H$, ce qui n'est pas surprenant vue la proposition 1.38, puisque c'est un zero du gradient de l'action.
3. Si le hamiltonien est nul, u est solution de l'équation de Cauchy Riemann
$$\overline{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial s} + J\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$
Autrement dit, u est une courbe J-holomorphe.[1] L'opérateur de Floer peut donc être vu comme une perturbation de l'opérateur de Cauchy-

1. Une courbe « J-holomorphe » ou « pseudo-holomorphe » sur le cylindre standard $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ est une application $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\to M$ dont la différentielle en tout point préserve les structures complexes. Autrement dit, $du\circ j = J\circ du$, où j est la structure complexe standard sur le cylindre, c'est à dire celle vérifiant $j(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial}{\partial t}$ et $j(\frac{\partial}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial s}$. On vérifie facilement que la relation $du\circ j = J\circ du$ est équivalente à la relation $\frac{\partial u}{\partial s} + J\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Riemann. Par abus de langage, on utilise parfois le terme « courbe holomorphe » pour les solutions de l'équation de Floer.

◀

II Aperçu de la construction de l'homologie de Floer

La construction de l'homologie de Floer est analogue à la construction de l'homologie de Morse. Nous allons associer à toute orbite non-dégénérée γ un indice $i_{CZ}(\gamma)$, appelé indice de Conley-Zehnder, qui jouera le rôle de l'indice de Morse. Cette construction nécessitera une hypothèse supplémentaire, impliquée par $\pi_2(M) = 0$. Cet indice permet d'introduire des espaces vectoriels

$$CF_k(H, J) = \bigoplus_{\substack{\gamma \text{ orbite 1-périodique,} \\ i_{CZ}(\gamma) = k}} \mathbb{Z}/2\,\gamma.$$

Pour définir une différentielle sur ces espaces vectoriels, on introduit les espaces de solutions de l'équation de Floer suivant, pour a, b deux orbites 1-périodiques contractiles de H,

$$\mathcal{N}(x, y) = \{u : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to M \mid \tfrac{\partial u}{\partial s} + J\,\tfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla H_t(u) = 0, \\ \lim_{s \to -\infty} u = x, \lim_{s \to +\infty} u = y\},$$

et les espaces de module de courbes correspondants $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{N}(x, y)/\mathbb{R}$ pour l'action de $\mathbb{R}$ par translation sur la variable s.

On définira une notion de paire (H, J) « régulière » qui jouera le rôle de la condition de Smale.

Ceci permet d'énoncer le résulat suivant.

Proposition 3.10. *Si la paire (H, J) est régulière, alors pour toutes orbites x et y 1-périodiques contractiles de H vérifiant $i_{CZ}(x) = i_{CZ}(y) + 1$, alors $\mathcal{L}(x, y)$ est un ensemble fini.*

On note $n(x, y)$ le nombre modulo 2 d'éléments dans $\mathcal{L}(x, y)$, et on définit une différentielle sur le complexe de Floer, de manière analogue à la différentielle de complexe de Morse : pour toute orbite x d'indice k,

$$\partial_k(x) = \sum_{i_{CZ}(y) = i_{CZ}(x) - 1} n(x, y)\, y. \tag{3.2}$$

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'une différentielle, c'est à dire du fait que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ est strictement la même que dans le cas Morse, une fois obtenu l'énoncé suivant :

Proposition 3.11. *Si la paire (H, J) est régulière, alors pour toutes orbites x et y 1-périodiques contractiles de H vérifiant $i_{CZ}(x) = i_{CZ}(y) + 2$, alors $\mathcal{L}(x, y)$ est une variété de dimension 1 qui admet une compactification en une variété à bord de dimension 1, dont le bord s'identifie avec l'ensemble des courbes brisées : $\bigcup_{i_{CZ}(z)=i_{CZ}(x)-1} \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y)$.*

Il faut ensuite montrer que les groupes d'homologie obtenus, c'est-à-dire les quotients

$$HF_k(H, J) = \frac{\ker(\partial_k)}{\mathrm{im}(\partial_{\mathrm{k+1}})},$$

sont isomorphes à l'homologie de la variété $H_k(M, \mathbb{Z}/2)$.

Pour ce faire, une méthode est de construire pour toutes paires régulières (H, J) et (H', J') un isomorphisme entre les groupes $HF_*(H, J)$ et $HF_*(H', J')$, puis de montrer que pour H' une fonction de Morse (autonome) suffisamment petite au sens C^2, alors les groupes d'homologie de Floer sont isomorphes aux groupes d'homologie de Morse.

A l'issue de tout ce travail, on aura bien montré le théorème 1.35 :

Théorème 3.12 (Conjecture d'Arnold non-dégénérée, Floer [6]). *Soit (M, ω) une variété symplectique compacte asphérique ($\pi_2(M) = 0$) et ϕ un difféomorphisme hamiltonien sur M. Alors le nombre de points fixes de ϕ est minoré par la dimension de $H_*(M, \mathbb{Z}/2)$.*

III Compacité de l'espace des solutions

Définition 3.13. *On définit l'énergie d'une solution de l'équation de Floer est définie par :*

$$E(u) = \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 ds\, dt.$$

Lemme 3.14. *Si $u \in \mathcal{N}(x, y)$, alors $E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y)$.*

On remarque que le fait que l'énergie soit positive est compatible avec le fait que l'action décroisse le long du gradient.

Démonstration .

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dt\, ds = -\int_{-\infty}^{+\infty} -\|\mathrm{grad}\,\mathcal{A}_\mathrm{H}\|^2 \mathrm{ds} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds}\mathcal{A}_H(u(s))ds. \end{aligned}$$

□

Définition 3.15. *On note $\mathcal{N}$ l'espace de toutes les solutions C^∞ contractiles de l'équation de Floer qui sont d'énergie finie.*

La nature « elliptique » de l'opérateur de Cauchy-Riemann permet de montrer l'énoncé fondamental suivant, que l'on admettra (cf. [1], chapitre 12) :

Proposition 3.16 (Régularité elliptique)**.** *Toute solution de l'équation de Floer dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}_{loc}$, avec $p > 2$, est de classe C^∞. De plus, les topologies C^0_{loc} et C^∞_{loc} coïncident sur $\mathcal{N}$.*

Remarque 3.17. L'espace $W^{1,p}_{loc}$ des fonctions localement L^p et dont la dérivée est localement L^p, contient en particulier les fonctions lipschitziennes. Un des intérets de la condtion $p > 2$ est que toute fonction $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, M)$ est continue, ce qui permet de l'étudier dans une carte. ◀

La condition d'énergie finie va permettre de compenser l'absence de compacité de l'espace des lacets pour montrer les deux théorèmes fondamentaux suivants.

Théorème 3.18. *On suppose que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$. Alors, $\mathcal{N}$ est compact pour la topologie $C^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, M)$.*

Théorème 3.19. *On suppose que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$ et que H est non-dégénéré. Alors, tout élément de $\mathcal{N}$ converge vers des points critiques pour $s \to \pm\infty$.*

Le lemme suivant ne requiert pas d'hypothèse de non-dégénérescence.

Lemme 3.20. *Soit $u \in \mathcal{N}$. Alors, il existe deux orbites x et y de H telles que*

$$\lim_{s \to -\infty} \mathcal{A}_H(u(s)) = \mathcal{A}_H(x), \quad \lim_{s \to +\infty} \mathcal{A}_H(u(s)) = \mathcal{A}_H(y).$$

Démonstration . Nous allons faire le raisonnement pour $s \to +\infty$, celui pour $s \to -\infty$ étant bien sûr analogue.

Première étape : $u(s)$ admet une valeur d'adhérence. Comme u est d'énergie finie, la fonction $s \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} |\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)|^2 dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\|\frac{\partial u}{\partial s}(s_k)\|_{L^2}$ tende vers 0.

Comme le gradient de H est borné, l'équation de Floer implique que $\|\frac{\partial u}{\partial t}(s_k)\|_{L^2}$ est également borné. L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique

$$|u(s_k, t') - u(s_k, t)| \leqslant \|\tfrac{\partial u}{\partial t}(s_k)\|_{L^2} \sqrt{|t' - t|},$$

ce qui prouve que la famille $u(s_k)$ est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli, une sous-suite de $u(s_k)$, que l'on notera u_k converge uniformément vers un lacet continu y.

Deuxième étape : cette valeur d'adhérence est une orbite de H. Quitte à plonger M dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^m$, on peut écrire

$$\begin{aligned} y(t)-y(0) - \int_0^t X_H(\tau, y(\tau))\, d\tau \\ &= \lim_{k\to\infty} u_k(t) - u_k(0) - \int_0^t X_H(\tau, u_k(\tau))\, d\tau \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_0^t (\dot{u_k}(\tau) - X_H(\tau, u_k(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Or, la limite ci-dessus est nulle car $|\dot{u_k} - X_H(u_k)|$ est une sous-suite de $|\frac{\partial u}{\partial s}(s_k)|$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\int_0^t \left|\frac{\partial u}{\partial s}(s_k)\right| d\tau \leqslant \sqrt{t}\left\|\frac{\partial u}{\partial s}(s_k)\right\|_{L^2},$$

qui tend vers 0.

On en déduit que $y(t) - y(0) = \int_0^t X_H(\tau, y(\tau))\, d\tau$, et donc que y est une orbite de H.

Les actions convergent également. Il nous reste à montrer que $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{A}_H(u(s)) = \mathcal{A}_H(y)$. Comme la fonction $s \mapsto \mathcal{A}_H(u(s))$ est décroissante, de montrer que $\mathcal{A}_H(u_k)$ converge vers $\mathcal{A}_H(y)$.

Il est clair que $\int_0^1 H_t(u_k)\, dt$ converge vers $\int_0^1 H_t(y)\, dt$, mais l'autre terme de l'action est un peu plus délicat. On choisit des prolongements au disque $\tilde{u_k}$ de u_k et $\tilde{y}$ de y. Grâce à l'hypothèse $\langle\omega, \pi_2(M)\rangle = 0$, la différence $\int \tilde{u_k}^*\omega - \int \tilde{y}^*\omega$ est l'intégrale de ω sur un cylindre bordé par u_k et y. En prenant k assez grand, on peut supposer que ce cylindre est inclus dans un ouvert où ω est exact. Soit donc λ une primitive de ω. La différence ci-dessus s'écrit d'après la formule de Stokes :

$$\int_{\mathbb{S}^1} u_k^*\lambda - y^*\lambda.$$

Pour justifier que cette différence tend vers 0, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} u_k^*\lambda - y^*\lambda &= \int_0^1 \lambda(\dot{u_k} - \dot{y}) \\ &= \int_0^1 \lambda(\dot{u_k} - X_H(u_k)) + \int_0^1 \lambda(X_H(u_k) - X_H(y)). \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend évidemment vers 0. Pour le premier, on a la majoration

$$\left|\int_0^1 \lambda(\dot{u_k} - X_H(u_k))\right| \leqslant \|\lambda\|\, \|\dot{u_k} - X_H(u_k)\|_{L^1},$$

et nous avons déjà expliqué pourquoi cette norme L^1 converge vers 0. □

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le théorème de compacité.

Démonstration du théorème 3.18. Nous allons montrer que $\operatorname{grad} \mathrm{u(s,t)}$ est uniformément borné pour u et (s,t) décrivant $\mathcal{N}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Le théorème d'Ascoli et la régularité elliptique (proposition 3.16) concluront la démonstration. [2]

Pour montrer que le gradient est uniformément borné, nous allons montrer que dans le cas contraire, apparaît une « bulle » c'est à dire une sphère J-holomorphe, ce qui est interdit par l'hypothèse $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$.

Par commodité, nous supposerons que nos applications $u \in \mathcal{N}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et sont 1-périodiques en la deuxième variable. Supposons donc que le gradient n'est pas uniformément borné. On peut alors trouver des éléments $u_k \in \mathcal{N}$ tels que $\max \|\operatorname{grad} u_k\| \to +\infty$.

Lemme 3.21 (Ekeland)**.** *Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur un espace métrique X complet. Alors pour tout $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$, il existe $x \in X$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, tels que :*

- $d(x, x_0) \leqslant 2\varepsilon_0$,
- $\varepsilon g(x) \geqslant \varepsilon_0 g(x_0)$,
- $2g(x) \geqslant \max_{B(x,\varepsilon)} g$.

Démonstration . Si jamais le couple $(x, \varepsilon) = (x_0, \varepsilon_0)$ ne convient pas, alors on choisit $x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0)$ tel que $g(x_1) > 2g(x_0)$ et on pose $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Si le couple $(x, \varepsilon) = (x_1, \varepsilon_1)$ ne convient pas, alors on choisit $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1)$ tel que $g(x_2) > 2g(x_1)$ et on pose $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, etc.

Si jamais cet algorithme ne s'arrêtait pas, on aurait construit une suite de Cauchy (x_n) telle que $g(x_n) \to +\infty$. Ceci contredirait la continuité de g au point limite de (x_n). □

Partant d'une suite de points $(s_{0,k}, t_{0,k})$ où le maximum de $\|\operatorname{grad} u_k\|$ est atteint et d'une suite $\varepsilon_{0,k}$ tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_{0,k} \|\operatorname{grad} u_k(s_{0,k}, t_{0,k})\|$ tende vers $+\infty$, le lemme ci-dessus donne une suite de points (s_k, t_k) et une suite $\varepsilon_k > 0$ tels que :

- $\varepsilon_k R_k \to +\infty$, où on note $R_k = \|\operatorname{grad} u_k(s_k, t_k)\|$,
- $2R_k \geqslant \max_{B((s_k,t_k),\varepsilon_k)} \|\operatorname{grad} u_k\|$.

Reparamétrage et convergence. Nous reparamétrons u_k de manière à ce que (s_k, t_k) apparaisse au point $(0,0)$ et que le gradient soit 1 en ce point. Concrètement, on pose

$$v_k = u_k(s_k + \tfrac{s}{R_k}, t_k + \tfrac{t}{R_k})).$$

2. Le théorème d'Ascoli implique que toute suite $u_k \in \mathcal{N}$ admet une valeur d'adhérence v au sens C^0_{loc}. Celle–ci est une application Lipschizienne, solution faible de l'équation de Floer. Par régularité elliptique, elle est donc lisse. La régularité elliptique à nouveau, donne la convergence au sens C^∞_{loc}.

On a de plus, $\|\operatorname{grad} v_k\| \leqslant 2$ sur $B(0, \varepsilon_k R_k)$. Le théorème d'Ascoli implique alors qu'une sous-suite de v_k converge vers une application v dans $C^0_{loc}(\mathbb{R}^2, M)$. Comme v_k vérifie l'équation

$$\frac{\partial v_k}{\partial s} + J(v_k)\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{1}{R_k}\nabla H(t_k + \tfrac{t}{R_k}, v_k) = 0,$$

la limite v est une fonction Lipschitzienne qui est une solution faible de l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial s} + J(v)\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Par régularité elliptique, v est de classe C^∞. Par ailleurs, $\|\operatorname{grad} v(0,0)\| = 1$ et v n'est donc pas constante.

L'énergie de v est bornée. Cela va être une conséquence des lemmes 3.14 et 3.20 et de la compacité de l'ensemble des valeur critiques de l'action, c'est-à-dire le lemme 1.40. En effet, ceux-ci impliquent que la fonctionnelle d'énergie est bornée sur $\mathcal{N}$. En particulier, l'énergie des u_k est bornée.

$$\int_{B(0,\varepsilon_k R_k)} \left|\frac{\partial v_k}{\partial s}\right|^2 = \int_{B((s_k,t_k),\varepsilon_k)} \left|\frac{\partial u_k}{\partial s}\right|^2 \leqslant E(u_k).$$

En passant à la limite quand k tend vers l'infini, on obtient grâce au lemme de Fatou que v est d'énergie finie.

Avant de finir la démonstration, faisons la remarque importante suivante :

Remarque 3.22. Pour une courbe J-holomorphe $v : \mathbb{R}^2 \to M$, l'énergie est égale à l'aire symplectique. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^*\omega = \int_{\mathbb{R}^2} \omega\left(\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) ds\,dt = \int_{\mathbb{R}^2} \omega\left(\frac{\partial v}{\partial s}, J\frac{\partial v}{\partial s}\right) ds\,dt = \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 ds\,dt.$$

Cette aire est donc finie et positive puisque v n'est pas constante. ◀

Fin de la démonstration : v forme une « bulle » J-holomorphe. Etudions la longueur de la courbe obtenue en restreignant v aux cercles de rayon r. Cette longueur s'écrit :

$$l(r) = \int_0^{2\pi} \left|\frac{d}{dt} v(r\cos t, r\sin t)\right| dt.$$

On peut majorer l'intégrande :

$$\begin{aligned}|\tfrac{d}{dt} v(r\cos t, r\sin t)| &= |r\cos t\, \tfrac{\partial v}{\partial t}(r\cos t, r\sin t) - r\sin t\, \tfrac{\partial v}{\partial s}(r\cos t, r\sin t)| \\ &= r|(\cos t - \sin t)(J\circ v - \mathrm{Id})\tfrac{\partial v}{\partial s}(r\cos t, r\sin t)| \\ &\leqslant rC|\tfrac{\partial v}{\partial s}(r\cos t, r\sin t)|.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$l(r)^2 \leqslant 2\pi \int_0^{2\pi} \left|\tfrac{d}{dt} v(r\cos t, r\sin t)\right|^2 dt \leqslant r^2 2\pi C^2 \int_0^{2\pi} |\tfrac{\partial v}{\partial s}(r\cos t, r\sin t)|^2 dt.$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{l(r)^2}{r}\,dr \leqslant 2\pi C^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} r|\tfrac{\partial v}{\partial s}(r\cos t, r\sin t)|^2\,dt\,dr \leqslant 2\pi C^2 E(v),$$

et donc que la fonction $r \mapsto \frac{l(r)^2}{r}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. La fonction $r \mapsto l(r)^2$ ne peut donc pas être minorée inférieurement par un réel strictement positif. Par conséquent, il existe une suite (r_k) tendant vers $+\infty$ telle que $l(r_k)$ tende vers 0. On visualise ainsi la « bulle » annoncée.

Pour obtenir une contradiction, nous raisonnons comme suit. Par compacité, on peut supposer que les courbes $\gamma_k = v(\partial B(0,r_k))$ s'accumulent sur un point p de M. Pour k assez grand les γ_k sont incluses dans une carte de Darboux autour de p. La formule de Stokes implique que l'aire symplectique entourée par γ_k dans la carte est arbitrairement petite. Mais la condition $\langle\omega,\pi_2(M)\rangle$ implique alors que l'aire de $v(B(0,r_k))$ est arbitrairement petite, ce qui contredit la remarque 3.22. $\square$

Nous allons maintenant utiliser le théorème 3.18, qui affirme la compacité de $\mathcal{N}$, pour montrer que les trajectoires de Floer tendent à l'infini vers des points critiques.

Démonstration du théorème 3.19. Soit (s_k) une suite de réels tendant vers $+\infty$. Le théorème 3.18 implique que pour une sous-suite s'_k de s_k, les courbes $u(s_k+\cdot)$ convergent vers une trajectoire de Floer v. On remarque alors que pour tout s fixé, d'après le lemme 3.20,

$$\mathcal{A}_H(v(s)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}_H(u(s_k+s)) = \lim_{\sigma\to\infty} \mathcal{A}_H(u(\sigma)).$$

L'action reste donc constante le long de v qui en est une trajectoire de gradient. C'est donc que v un point critique de l'action. On a donc montré que la famille $(u(s+\cdot))_{s\in\mathbb{R}}$ est compacte et que ses valeurs d'adhérence sont des orbites 1-périodiques.

Comme H est supposé non-dégénéré, ses orbites 1-périodiques sont en nombre fini. Pour tout choix de voisinages $B(y)$ de chacune de ces orbites y, on déduit de ce qui précède que pour s assez grand $u([s,+\infty[)$ est inclus dans $\bigcup_y B(y)$. Si les voisinages sont assez petits, on obtient par connexité que pour s assez grand $u([s,+\infty[)$ est inclus dans l'un des $B(y)$. L'orbite y est alors la seule valeur d'adhérence possible de $u(s+\cdot)$ pour $s\to+\infty$, elle en est donc la limite. $\square$

Comme dans le cas de la théorie de Morse, $\mathbb{R}$ agit sur les trajectoires par translation sur la variable s :

$$\forall s\in\mathbb{R}, \forall\gamma\in\mathcal{N}, \quad s\cdot u = u(\cdot+s).$$

La démonstration de la proposition 2.19 n'utilisait pas la dimension finie. Elle utilisait seulement la compacité de $\mathcal{N}$ et le fait que les trajectoires convergent vers des points critiques à l'infini. Cette démontration s'applique donc tout aussi bien ici, et nous pouvons en répéter l'énoncé :

Proposition 3.23. *On suppose H non-dégénéré et $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$. Soit $(u_n) \in \mathcal{N}(x,y)$ une suite qui converge vers un certain $u \in \mathcal{N}$. Alors, quitte à prendre une sous-suite, il existe*

- *des points critiques $x_0 = x, x_1, \ldots, x_\ell, x_{\ell+1} = y$,*
- *pour tout $k \in \{0, \ldots, \ell\}$, une suite de réels $(s_n^k)_n$ et une trajectoire $u^k \in \mathcal{N}(x_k, x_{k+1})$,*

tels que $s_n^k \cdot u_n$ converge vers u^k.

De plus, u est l'un des u^k (à translation près sur la variable) s'il n'est pas constant, et l'un des x_k s'il l'est.

IV L'indice de Conley-Zehnder

Cette partie est indépendante de presque tout ce qui précède. Nous construisons un indice associé à toute orbite hamiltonienne 1-périodique non-dégénérée et qui joue dans la théorie de Floer le rôle de l'indice de Morse dans la théorie de Morse. Comme son nom l'indique, cet indice a été introduit par Conley et Zehnder [3].

IV.1 Groupe fondamental du groupe symplectique

Appliquons la décomposition polaire à une matrice symplectique $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. La matrice $S = \sqrt{AA^T}$ est symétrique définie positive et symplectique. En effet, $-J_0 S^{-1} J_0$ est symétrique définie positive et de carré

$$(-J_0 S^{-1} J_0)^2 = -J_0 S^{-2} J_0 = -J_0 (A^T)^{-1} A^{-1} J_0 = -(-AJ_0)(-J_0 A^T) = AA^T.$$

Par unicité de la racine carré, $S = -J_0 S^{-1} J_0$ donc $S^T J_0 S = J_0$. La matrice $B = AS^{-1}$ est donc à la fois orthogonale et symplectique.

Remarque 3.24. En identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$, s'écrit

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle = x \cdot x' + y \cdot y' + i\,(y \cdot x' - x \cdot y').$$

Sa partie réelle est le produit scalaire canonique et sa partie imaginaire est la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$. Par conséquent, les matrices à la fois symplectiques et orthogonales s'identifient aux matrices unitaires :

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n, \mathbb{R}) = \mathrm{U}(n).$$

◀

La décomposition polaire permet donc de montrer :

Proposition 3.25. *Le groupe* $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *est homéomorphe au produit* $\mathrm{U}(n)\times\mathcal{S}$*, où* $\mathcal{S}$ *est l'ensemble des matrices symétriques définies positives et symplectiques.*

L'espace $\mathcal{S}$ *est contractile. Le groupe* $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *a donc le même type d'homotopie que* $\mathrm{U}(n)$*. En particulier,* $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))\simeq\mathbb{Z}$*, et un tel isomorphisme est induit par l'application*

$$\rho:\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})\to\mathbb{S}^1,\quad A\mapsto \det_{\mathbb{C}}\left(A\left(\sqrt{AA^T}\right)^{-1}\right).$$

Remarque 3.26. Le polynôme caractéristique d'une matrice symplectique est symétrique : pour toute matrice $A\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\det(A-X\mathrm{Id})&=\det(A^T-X\mathrm{Id})=\det(-JA^{-1}J-X\mathrm{Id})=\det(-A^{-1}+X\mathrm{Id})\\&=X^{2n}\det(A-\tfrac{1}{X}\mathrm{Id}).\end{aligned}$$

Comme il est par ailleurs bien sûr réel, si λ est valeur propre, alors $\overline{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\overline{\lambda}}$ aussi, avec même multiplicité. ◀

Démonstration . Montrons que $\mathcal{S}$ est contractile. Cela va reposer sur l'exercice suivant :

Exercice 3.27. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}$ sont diagonalisables dans une base symplectique $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ telle que si e_i est propre pour un certain $\lambda\in]0,+\infty[$, alors f_i est propre pour $\frac{1}{\lambda}$ (On pourra commencer par remarquer que si v est vecteur propre pour une valeur propre λ, alors J_0v est vecteur propre de valeur propre $\frac{1}{\lambda}$).

Les éléments de $\mathcal{S}$ s'écrivent donc dans une base symplectique comme exponentielle d'une matrice diagonale, avec des coefficients soit nuls, soit venant par paires $\mu,-\mu$. Réciproquement, l'exponentielle d'une telle matrice est symétrique et symplectique. On obtient donc une rétraction sur l'identité en considérant

$$(S,t)\mapsto\exp(t\log S).$$

La preuve du fait que l'application $\det_{\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme entre le groupe fondamental de $\mathrm{U}(n)$ et celui du cercle, c'est-à-dire $\mathbb{Z}$, peut être trouvée par exemple dans [7]. □

IV.2 Indice de Maslov d'un chemin de matrice symplectiques

On considère l'hypersurface (singulière)

$$\Sigma=\{A\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})\mid\det(A-I)=0\}.$$

On veut associer un entier à tout chemin de matrices reliant l'identité à un point hors de Σ.

Lemme 3.28 (Conley-Zehnder, [3]). *Le complémentaire* Sp^* *de* Σ *a deux composantes connexes* $\mathrm{Sp}^+ = \{A \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \mid \det(A - I) > 0\}$ *et* $\mathrm{Sp}^- = \{A \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \mid \det(A - I) < 0\}$. *Chacune des inclusions* $\mathrm{Sp}^\pm \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *induit un morphisme trivial sur le groupe fondamental.*

Nous admettrons ce résultat. Etudions ce qui se passe en dimension 2.

Exemple 3.29. En dimension 2 (c'est-à-dire si $n = 1$), on a $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $ad - bc = 1$. C'est une variété de dimension 3, qui se rétracte sur le cercle $U(1)$. L'hypersurface Σ est donnée par l'équation $a + d = 2$ elle est régulière sauf au point Id.

L'ouvert Sp^* admet au moins deux composantes connexes données par $a + d > 2$ et $a + d < 2$ (qui correspondent exactement à Sp^- et Sp^+). Pour voir que ces deux parties sont connexes, on utilise notre compréhension des classes de similitude :

- Les matrices vérifiant $a + d > 2$ sont toutes semblables à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$, donc peuvent être connectées entre elles dans Sp^-.
- Les matrices vérifiant $a + d < 2$ sont toutes semblables à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0$, ou $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ avec θ non-congru à 0 modulo 2π, ou encore $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -a \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, et peuvent être connectées à $-\mathrm{Id}$ dans Sp^+.

◀

On fixe deux points bases dans Sp^+ et Sp^-. Prenons par exemple,

$$W^+ = -\mathrm{Id} \quad \text{et} \quad W^- = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice $A \in \mathrm{Sp}^\pm$, on choisit un chemin α_A, reliant A à au point base correspondant $W^\pm$.

Définition 3.30. *Pour tout chemin* $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *partant de l'identité et tel que* $\gamma(1) \in \mathrm{Sp}^*$, *on considère le chemin concaténé* $\hat{\gamma} = \gamma * \alpha_{\gamma(1)}$. *L'indice de Maslov* $\mu(\gamma)$ *de* γ *est le double du nombre d'enroulements de l'application* $\rho \circ \hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{S}^1$.

Autrement dit, $\mu(\gamma)$ *est le réel* $\frac{1}{\pi}(\Delta(1) - \Delta(0))$, *où* $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ *relève* $\rho \circ \hat{\gamma}$ *au moyen de l'exponentielle* $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto \exp t$ *(i.e.* $\exp \circ \Delta = \rho \circ \hat{\gamma}$.*)*

Les propriétés de l'indice se résument dans la proposition suivante.

Proposition 3.31.
1. *L'indice de Maslov est un entier,*
2. *Deux chemins joignant l'identité à un point de* Sp^* *sont homotopes parmi de tels chemins si et seulement s'ils ont le même indice de Maslov.*

3. *Le signe de* $\det(\gamma(1) - \mathrm{Id})$ *est* $(-1)^{\mu(\gamma)-n}$.

4. *Si* S *est une matrice symétrique inversible de norme* $\|S\| < 2\pi$ *et si* $\gamma(t) = \exp(tJS)$*,* $\mu(\gamma) = \mathrm{ind(S) - n}$ *où* $\mathrm{ind(S)}$ *désigne le nombre de valeurs propres négatives de* S*.*

Démonstration . On vérifie facilement que $\rho(W^+) = (-1)^n$ et $\rho(W^-) = (-1)^{n-1}$. On en déduit que $\mu(\gamma)$ est un entier (ce qui prouve le premier point) et que $\mu(\gamma)$ a la même parité que n si et seulement si $\gamma(1) \in \mathrm{Sp}^+$.

Pour le deuxième point, remarquons d'abord que, d'après le lemme 3.28, deux chemins γ_1 et γ_2 sont homotopes parmis les chemins de Id à Sp^*, si et seulement si les chemins $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ ont même extrémité et sont homotopes à extrémités fixées. D'après la proposition 3.25, ceci équivaut à la condition que $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ ont même extrémité et que $\rho\circ(\hat{\gamma}_1 * \overline{\hat{\gamma}_2})$ a un nombre d'enroulement nul, c'est-à-dire à la condition que $\rho\circ\hat{\gamma}_1$ et $\rho\circ\hat{\gamma}_2$ ont même nombre d'enroulement. Ceci justifie le deuxième point.

Par connexité, le signe de $\det(\gamma(1)-\mathrm{Id})$ est le même que celui de $\det(\hat{\gamma}(1)-\mathrm{Id})$. Or on a vu que ce déterminant est ± 1 et qu'il est positif si et seulement si $\mu(\gamma)$ et n ont même parité. Ceci prouve le troisième point.

Démontrons le quatrième point. La condition $\|S\| < 2\pi$ implique que S n'admet pas 1 pour valeur propre. En diagonalisant S dans une base orthonormée directe on peut construire[3] une famille à 1-paramètre de matrices symétriques n'ayant jamais 1 pour valeur propre et joignant S à une matrice diagonale ayant des blocs diagonaux de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix}\right)$. L'indice de Maslov de $\exp(tJS)$ sera donc obtenu en sommant les contributions de chacun de ces blocs diagonaux.

La matrice $\exp(tJ\left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\pi t & \sin\pi t \\ -\sin\pi t & \cos\pi t \end{smallmatrix}\right)$ est la rotation d'angle $-\pi t$. La contribution à l'indice est donc -1. De même la contribution à l'indice du chemin $\exp(tJ\left(\begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix}\right))$ est 1. Enfin, la contribution de $\exp(tJ\left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{ch}\,\pi t & -\mathrm{sh}\,\pi t \\ -\mathrm{sh}\,\pi t & \mathrm{ch}\,\pi t \end{smallmatrix}\right)$ est nulle puisque cette matrice appartient à $\mathcal{S}$ (i.e. est symétrique et symplectique). L'indice de S est donc égal à la moitié de la différence entre son nombre de valeurs propres négatives et son nombre de valeurs propres positives, ce qui est bien égal à $\mathrm{ind(S) - n}$. $\square$

Exemple 3.32. Pour tout entier k, on considère la matrice diagonale par blocs S_k qui vaut

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & \\ & & & \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & \\ & & & & \begin{smallmatrix} (n-k-1)\pi & 0 \\ 0 & (n-k-1)\pi \end{smallmatrix} \end{pmatrix},$$

3. On commence par déformer la matrice conjuguante sur l'identité.

si k a la même parité que n, et

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} & & \\ & & & & \begin{smallmatrix} (n-k-2)\pi & 0 \\ 0 & (n-k-2)\pi \end{smallmatrix} \end{pmatrix},$$

sinon, où l'on pense à ces matrices comme écrites dans les coordonnées $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Alors le chemin $t \mapsto \exp(tJ_0S_k)$, c'est-à-dire qui n'est autre que l'isotopie hamiltonienne engendrée par S_k, est d'indice de Maslov k. ◀

IV.3 L'indice de Conley-Zehnder

Nous pouvons à présent définir l'indice de Conley-Zehnder d'une orbite 1-périodique non-dégénérée.

Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ une orbite 1-périodique d'un Hamiltonien non-dégénéré H. On prolonge γ en une application $u : \mathbb{D}^2 \to M$. Comme $\mathbb{D}^2$ est contractile, le fibré u^*TM est trivialisable et deux trivialisations données sont homotopes. Dans une telle trivialisation, le flot linéarisé $d\phi_H^t(\gamma(0))$ correspond à un chemin de matrices symplectiques $A(t)$ joignant l'identité à une matrice dans Sp^*. Dans une autre trivialisation, le chemin obtenu sera homotope au premier. Le choix de u détermine donc la classe d'homotopie du chemin $A(t)$.

Définition 3.33. *L'indice de Conley-Zehnder de γ, noté $i_{CZ}(\gamma)$, pour le prolongement u est par définition l'indice de Maslov du chemin $A(t)$.*

Le point 4 de la proposition 3.31 implique immédiatement le proposition suivante.

Proposition 3.34. *Soit H un hamiltonien autonome et x un point critique non-dégénéré de H. On suppose que dans une carte de Darboux $\|\mathrm{Hess}_x(H)\| < 2\pi$. Alors, l'indice de Conley-Zehnder de x (pour le prolongement trivial) vu comme une orbite 1-périodique de H (non-dégénérée d'après 3.4) et l'indice de Morse de x vu comme un point critique de H sont reliés par la formule :*

$$i_{CZ}(x) = i(x) - n.$$

Remarque 3.35. Sous l'hypothèse $\pi_2(M) = 0$, tout fibré symplectique sur $\mathbb{S}^2$ est trivialisable. Etant donnés deux prolongements u, u' d'une même orbite γ, le fibré $(u\sharp\overline{u'})^*TM$ est alors trivialisable et on en déduit alors que l'indice de Conley-Zehnder de γ ne dépend pas du prolongement u.

En réalité, la « bonne » condition assurant que w^*TM est trivialisable pour toute application $w : \mathbb{S}^2 \to M$ est

$$\langle c_1(TM), \pi_2(M) \rangle = \{0\},$$

où $c_1(TM)$ désigne la première classe de Chern du fibré complexe TM. ◀

V L'opérateur de Floer linéarisé : propriété « Fredholm » et conséquences

On suppose ici à nouveau que $\pi_2(M) = 0$.

V.1 L'opérateur de Floer linéarisé

On considère l'opérateur de Floer

$$\mathcal{F} : C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, M) \to C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, M), \quad u \mapsto \frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla H_t(u).$$

Nous allons devoir travailler avec des espaces de Banach. Pour cela nous devons quitter le contexte des applications C^∞ et considérer certains espaces de Sobolev que nous introduisons maintenant.

Remarque 3.36. Nous n'avons pas démontré le fait suivant : pour tout $u \in \mathcal{M}(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ converge exponentiellement vers 0 en $\pm\infty$ (cf. [1], page 267). ◀

Définition 3.37. *Pour $p > 2$, on note $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ l'ensemble des applications de la forme*

$$(s, t) \mapsto \exp_{w(s,t)} Y(s, t),$$

où w est une application C^∞ telle que $\lim_{-\infty} w = x$, $\lim_{+\infty} w = y$ et $\frac{\partial w}{\partial s}$ converge exponentiellement vers 0 en $\pm\infty$, et où Y est une section du fibré w^*TM de classe $W^{1,p}$.

La condition $p > 2$ implique que les applications $W^{1,p}$ définies sur un espace de dimension 2 sont continues. La remarque qui précède implique que $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ contient un voisinage $W^{1,p}$ de $\mathcal{M}(x, y)$. Dans le cas où M serait $\mathbb{R}^{2n}$, l'espace $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des applications $W^{1,p}$ qui convergent vers x et y en $\pm\infty$.

L'espace $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ admet une structure de variété de Banach modelée sur $W^{1,p}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$. On obtient des cartes à partir d'une trivialisation de u^*TM (ce qui existe car le cylindre u se prolonge à une sphère) : en effet d'une telle trivialisation, on déduit une base symplectique $Z_1, \dots, Z_{2n} \in T_{u(s,t)}M$ et une carte :

$$W^{1,p}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{P}^{1,p}(x, y), \quad (y_1, \dots, y_{2n}) \mapsto \exp_u(\sum y_i Z_i).$$

L'opérateur de Floer s'étend en un opérateur, toujours noté $\mathcal{F}$, défini par

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \to L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, TM), \quad u \mapsto \frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla H_t(u).$$

Pour calculer sa différentielle, on écrit (quitte à supposer que l'on est dans une carte)

$$\mathcal{F}(u + Y) = \frac{\partial(u + Y)}{\partial s} + J(u + Y)\frac{\partial(u + Y)}{\partial t} + \nabla_{u+Y} H_t.$$

La partie linéaire en Y est alors :

$$d\mathcal{F}_u(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J(u)\frac{\partial Y}{\partial t} + dJ_u(Y)\frac{\partial u}{\partial t} + d(\nabla_u H_t)Y.$$

On voit que $d\mathcal{F}_u$ est somme de l'opérateur $\overline{\partial}$, qui est d'ordre 1, et d'un opérateur d'ordre 0 ($dJ_u(Y)\frac{\partial u}{\partial t} + d(\nabla_u H_t)Y$ ne dérive pas Y). En poursuivant le calcul, on peut montrer (cf. [1], section 8.4) :

Proposition 3.38. *Si u est solution de l'équation de Floer, alors $d\mathcal{F}_u : W^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n}) \to L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$ est la somme de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial s} + J\frac{\partial}{\partial t}$ et d'un opérateur de multiplication par une matrice $S(s,t)$ qui tend vers une matrice symétrique $S^{\pm}(t)$ lorsque s tend vers $\pm\infty$, et qui vérifie* $\lim_{\pm\infty} \frac{\partial S}{\partial s} = 0$.

De plus, les équations $\frac{\partial Y}{\partial t} = JS^{\pm}(t)Y$ sont les équations linéarisées de $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$ le long des orbites x et y.

V.2 Opérateurs de Fredholm

Nous collectons ici quelques propriétés utiles des opérateurs de Fredholm.

Définition 3.39. *Un opérateur (c'est-à-dire une application linéaire continue) $L : E \to F$ entre espaces de Banach est appelé opérateur de Fredholm si son noyau* $\ker L$ *et son co-noyau* $\mathrm{Coker} L = F \,/\, \mathrm{Im}\, L$ *sont de dimension finie. Son indice de Fredholm est alors par définition :*

$$\mathrm{Ind}\, L = \dim\ker L - \dim \mathrm{Coker}\, L.$$

L'indice a énormément de propriétés. Remarquons d'abord qu'un opérateur bijectif est automatiquement de Fredholm et d'indice nul. Le théorème du rang affirme également que l'indice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est nul. On vérifie aussi facilement que pour tous opérateurs de Fredholm L_0, L_1, la somme directe $L_0 \oplus L_1$ est de Fredholm d'indice $\mathrm{Ind}(L_0 \oplus L_1) = \mathrm{Ind}\, L_0 + \mathrm{Ind}\, L_1$.

Le résultat suivant est fondamental. Il affirme que l'espace des opérateurs de Fredholm forme un ouvert, sur lequel l'indice est une fonction localement constante (ce que ne serait pas la dimension du noyau ni du co-noyau). En particulier, l'indice est invariant par homotopie.

Théorème 3.40. *Soit $L : E \to F$ un opérateur de Fredholm. Alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tout opérateur $u : E \to F$, de norme $\|u\| < \varepsilon$, $L + u$ soit un opérateur de Fredholm, de même indice que L.*

On peut aussi définir des applications de Fredholm entre variétés de Banach.

Définition 3.41. *On dit qu'une application différentiable $\mathcal{F}$ entre variétés de Banach E et F est de Fredholm si sa différentielle est en tout point un opérateur de Fredholm $d\mathcal{F}_x : T_xE \to T_xF$. D'après le théorème qui précède, si E est connexe, l'indice ne dépend pas de x et on le note* $\operatorname{Ind}\mathcal{F}$.

Le théorème d'inversion locale permet de démontrer :

Théorème 3.42. *Soit $\mathcal{F} : E \to F$ une application de Fredholm et soit $y \in F$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{F}^{-1}(y), \quad d\mathcal{F}_x : T_xE \to T_xF$$

est surjective. Alors $\mathcal{F}^{-1}(y)$ est une variété de dimension $\operatorname{Ind}\mathcal{F}$ *et son espace tangent en x est* $\ker d\mathcal{F}_x$.

V.3 L'opérateur de Floer linéarisé est de Fredholm

Dans cette partie et la suivante, l'hypothèse $p > 1$ est suffisante.

D'après la proposition 3.38, le fait que l'opérateur de Floer soit de Fredholm découle de l'énoncé suivant. On note $S^{\pm}(t) = \lim_{s\to\pm\infty} S(s,t)$, et $R^{\pm}(t)$ la résolvante de l'équation $\dot{R} = J_0 S^{\pm} R$.

Proposition 3.43. *On suppose que* $\det(\mathrm{Id} - R_1^{\pm}) \neq 0$*, autrement dit que* $R_1^{\pm} \in \mathrm{Sp}^*$*. Alors, $L = \overline{\partial} + S(s,t) : W^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) \to L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ est un opérateur de Fredholm.*

Idée de la démonstration . Cela repose sur la régularité elliptique et plus précisément sur l'inégalité de Calderon-Zygmund qui permet de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall Y \in W^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}), \quad \|Y\|_{W^{1,p}} \leqslant C(\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}).$$

Il faut ensuite rafiner cette inégalité pour remplacer le terme $\|Y\|_{L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)}$ dans le membre de droite par $\|Y\|_{L^p([-A,A]\times\mathbb{S}^1)}$ pour A assez grand. C'est la partie la plus difficile.

Comme l'inclusion $W^{1,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) \to L^p([-A,A]\times\mathbb{S}^1)$ est compacte (Théorème de Rellich), on peut appliquer le lemme suivant pour montrer que le noyau de L est de dimension finie.

Lemme 3.44. *Soient E, F, G trois espaces de Banach, $L : E \to F$ un opérateur de Fredholm, $K : F \to G$ un opérateur compact. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leqslant C(\|L(x)\|_F + \|K(x)\|_G).$$

Alors le noyau de L est de dimension finie.

Démonstration . Pour montrer que le noyau est de dimension finie, on montre que sa boule unité est compacte. Pour $\|x_k\| \leqslant 1$ et $L(x_k) = 0$, on a $\|x_k\| \leqslant \|K(x_k)\|$. Comme K est compact, $K(x_k)$ admet une sous-suite qui converge, donc x_k admet une sous-suite qui est de Cauchy donc converge. □

Enfin, il reste à démontrer que le co-noyau est aussi de dimension finie. Pour cela on considère l'adjoint $L^* : W^{1,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n}) \to L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{2n})$ de L, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Il satisfait également les conditions du lemme précédent [4]. Son noyau, qui s'identifie au co-noyau de L, est donc de dimension finie. □

V.4 Indice de l'opérateur de Floer et indice de Conley-Zehnder

Nous allons calculer l'indice de l'opérateur L considéré dans la proposition 3.43, dont on reprend les notations. Notre but est de donner des éléments d'explication du théorème suivant :

Théorème 3.45. *L'indice de l'opérateur L est $\mu(R^-(t)) - \mu(R^+(t))$.*

La proposition 3.43 et le théorème 3.45 impliquent alors :

Corollaire 3.46. *Pour tout $u \in \mathcal{M}(x, y)$, l'opérateur de Floer $d\mathcal{F}_u$ linéarisé en u est un opérateur de Fredholm d'indice $i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y)$.*

Nous allons utiliser le fait que l'indice est invariant par petite perturbation et par homotopie, c'est-à-dire le théorème 3.40.

La première étape (que nous ne détaillerons pas) est de remplacer $S(s,t)$ par une autre matrice $S(s,t)$ qui ne dépend pas de s au voisinage de l'infini (et y vaut $S^{\pm}(t)$). D'après le théorème 3.40, ce changement n'affecte pas l'indice car S est petite au voisinage de l'infini.

La deuxième étape (que nous ne détaillerons pas plus) est de remplacer $S(s,t)$ obtenu dans la première étape par $S(s)$ qui

- comme la notation le suggère, ne dépend pas de t,
- est homotope à $S(t,s)$,
- n'est formé que de matrices diagonales,
- est constant au voisinage de $\pm\infty$ et y coïncide avec les matrices $S_{k^\pm}$ de l'exemple 3.32 avec $k^{\pm} = \mu(R^{\pm}(t))$.

L'idée est de partir d'homotopies entre les chemins $R^{\pm}(t)$ et $\exp(tJ_0S_{k^\pm})$, ce qui est possible d'après le point 2 de la proposition 3.31, puisque ces chemins ont même indice de Maslov. On utilise ensuite ces homotopies pour déformer

4. On peut vérifier que l'adjoint s'écrit $L^*X = -\frac{\partial X}{\partial s} + J\frac{\partial X}{\partial t} + S^TX$.

$S(s,t)$ vers un $S(s)$ comme annoncé. L'invariance de l'indice par déformation finit l'argument.

Il ne reste maintenant plus qu'à calculer explicitement l'indice de l'opérateur $\overline{\partial} + S(s)$, avec $S(s)$ comme ci-dessus, et montrer que l'on obtient $k^- - k^+$.

Lemme 3.47. *Soit* $S(s) = \left(\begin{smallmatrix} a_1(s) & 0 \\ 0 & a_2(s) \end{smallmatrix}\right)$*, où* $a_i(s)$ *stationne à des valeurs* $a_i^\pm \notin 2\pi\mathbb{Z}$ *près de* $\pm\infty$*. Alors pour l'opérateur* $F : W^{1,p}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \to L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$*, donné par*

$$F(Y) = \overline{\partial} Y + S(s) Y,$$

on a

$$\begin{aligned} \dim\ker F = 2\sharp\{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \max(a_1^-, a_2^-) < 2\pi\ell < \min(a_1^+, a_2^+) \\ + \sharp\{i \in \{1,2\} \mid a_i^- < 0 < a_i^+\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Coker} F = 2\sharp\{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \max(a_1^+, a_2^+) < 2\pi\ell < \min(a_1^-, a_2^-) \\ + \sharp\{i \in \{1,2\} \mid a_i^+ < 0 < a_i^-\}, \end{aligned}$$

Vérifions, au moins dans certains cas, que ce lemme permet bien de montrer la formule $\mathrm{Ind}\, L = k^- - k^+$ souhaitée. Les matrices de l'exemple 3.32 sont de deux types différents, et il y a donc quatre cas possibles pour le couple de matrice $S_{k^\pm}$. Vérifions le cas où les matrices sont toutes les deux de la forme

$$S_{k^\pm} = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & & \\ & & & \begin{smallmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{smallmatrix} & \\ & & & & \begin{smallmatrix} (n-k^\pm-1)\pi & 0 \\ 0 & (n-k^\pm-1)\pi \end{smallmatrix} \end{pmatrix}.$$

Les autres cas se vérifient de manière similaire.

L'additivité de l'indice de Fredholm implique que l'on peut étudier séparément chacun des facteurs de dimension 2. D'après le lemme 3.47, l'indice est nul lorsque $a_1^+ = a_1^- = a_2^+ = a_2^-$. Seul le dernier facteur contribue donc à l'indice. On a alors, toujours d'après le lemme 3.47,

$$\begin{aligned} \dim\ker L &= 2\sharp\{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid n-1-k^- < 2\pi\ell < n-1-k^+\} \\ &\qquad + 2 \text{ si } n-1-k^- < 0 < n-1-k^+, \\ &= 2\sharp\{\ell \in \mathbb{Z} \mid n-1-k^- < 2\pi\ell < n-1-k^+\} \\ &= \begin{cases} k^- - k^+ & \text{si } k^- > k^+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

De même,

$$\dim \mathrm{Coker} L = \begin{cases} k^+ - k^- & \text{si } k^+ > k^-, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas $\mathrm{Ind}\, L = k^- - k^+$.

Démonstration du lemme 3.47. On cherche les $Y \in W^{1,p}$ vérifiant $\overline{\partial} Y + SY = 0$. On fait un changement de variable de manière à se ramener à un opérateur de Cauchy-Riemann non perturbé.

Pour cela, on pose $Z = \exp(\int_0^s S(\sigma)\, d\sigma)\, Y$. On vérifie facilement que Y est solution si et seulement si Z est solution de $\overline{\partial} Z = 0$. Notons que pour s proche $\pm\infty$, $\int_0^s S(\sigma)\, d\sigma = s \left(\begin{smallmatrix} a_1^\pm & 0 \\ 0 & a_2^\pm \end{smallmatrix}\right) + \text{Constante}$.

Le théorème de Laurent sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ implique que les solutions sont développables sous la forme :

$$Z(s+it) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{(s+it)2\pi\ell},$$

que l'on peut réécrire en notations réelles :

$$Z(s,t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{2\pi s \ell} \left(\alpha_\ell \begin{pmatrix} \cos(2\pi\ell t) \\ \sin(2\pi\ell t) \end{pmatrix} + \beta_\ell \begin{pmatrix} -\sin(2\pi\ell t) \\ \cos(2\pi\ell t) \end{pmatrix} \right),$$

Pour s proche de $\pm\infty$, on a donc

$$Y(s,t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} e^{(2\pi\ell - a_1^\pm)s + K} (\alpha_\ell \cos(2\pi\ell t) - \beta_\ell \sin(2\pi\ell t)) \\ e^{(2\pi\ell - a_2^\pm)s + K'} (\alpha_\ell \sin(2\pi\ell t) + \beta_\ell \cos(2\pi\ell t)) \end{pmatrix}$$

Pour que Y appartienne à L^p, on voit qu'il faut que les conditions suivantes soient réunies :

- pour $\ell \neq 0$, ou bien $\alpha_\ell = \beta_\ell = 0$ ou bien on a les quatre inégalités $2\pi\ell - a_1^- > 0$, $2\pi\ell - a_2^- > 0$, $2\pi\ell - a_1^+ < 0$, $2\pi\ell - a_2^+ > 0$.
- pour $\ell = 0$, ($\alpha_0 = 0$ ou $a_1^- < 0$) et ($\beta_0 = 0$ ou $a_2^- < 0$) et ($\alpha_0 = 0$ ou $a_1^+ > 0$) et et ($\beta_0 = 0$ ou $a_2^+ > 0$).

Réciproquement, lorsque ces conditions sont vérifiées, Y appartient à $W^{1,p}$. Le nombre de degrés de liberté obéit bien aux conclusions du lemme 3.47. □

VI Transversalité

Définition 3.48. *Soit H un hamiltonien non dégénéré. Nous dirons que la paire (H, J) est régulière si pour toute courbe de Floer u contractile et* *d'energie finie, c'est-à-dire $u \in \mathcal{N}$, la différentielle de l'opérateur de Floer en u*

$$d\mathcal{F}_u : \mathcal{P}^{1,p}(x,y) \to L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, TM),$$

est surjective.

D'après le théorème 3.42, si (H,J) est régulière, alors $\mathcal{N}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(0)$ est une variété différentielle dont la dimension est l'indice de $\mathcal{F}$, c'est à dire $i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y)$ d'après le théorème 3.45. Avec le théorème de compacité des espaces de modules, la proposition 3.10 est démontrée. En conséquence, si (H,J) est régulière, la différentielle de Floer (cf. formule (3.2)) est bien définie.

Le théorème suivant affirme que presque toute paire (H,J) est régulière, et donc que la différentielle de Floer est bien définie pour presque toute paire (H,J). Il existe plusieurs énoncés possibles dans la littérature. Comme une grande partie de ce cours, le suivant est tiré de [1].

Théorème 3.49. *Pour tout hamiltonien non-dégénéré H_0 et toute structure presque complexe calibrée J, il existe un espace de Banach $\mathcal{H} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M, \mathbb{R})$, dense dans $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M, \mathbb{R})$ pour la topologie C^1, et une intersection dénombrable d'ouverts denses $\mathcal{H}_{\mathrm{reg}}$ inclus dans un voisinage de 0 de $\mathcal{H}$, tel que pour tout $h \in \mathcal{H}_{\mathrm{reg}}$, $H = H_0 + h$ est non-dégénéré et la paire (H,J) est régulière.*

En particulier, on peut trouver aussi proche que l'on souhaite de H_0 au sens C^1 un hamiltonien H tel que la paire (H,J) soit régulière. [5]

VII Invariance de l'homologie de Floer

Les groupes d'homologie de Floer s'avèrent être indépendents des choix de hamiltonien H et de structure presque complexe J. Nous expliquons (sans démonstration) dans cette partie comment de tels isomorphismes sont construits.

Soient (H^a, J^a) et (H^b, J^b) deux paires régulières au sens de la définition 3.48. Comme l'espace des structures presques complexes calibrées est contractile, on peut trouver une homotopie $\Gamma = (H,J)$ entre ces deux paires. Plus précisément, il s'agit d'applications $H : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times M \to \mathbb{R}$ et $J : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(TM)$ telles que $J(s)$ est presque complexe calibrée pour tout s, et pour un certain $R > 0$, $(H(s,\cdot,\cdot), J(s))$ coïncide avec (H^a, J^a) pour $s \leqslant -R$ et avec (H^b, J^b) pour $s \geqslant R$. Nous utiliserons les notations $H_{s,t}$ et J_s pour $H(s,t,\cdot)$ et $J(s)$.

On considère l'« équation de Floer à paramètre » suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_s(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u H_{s,t} = 0. \tag{3.3}$$

5. Un tel hamiltonien aura le même nombre de points fixes que H_0.

où comme pour l'équation de Floer, $u : (s,t) \mapsto u(s,t)$ est une application $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to M$. De manière analogue à la définition de $\mathcal{N}$, on note $\mathcal{N}^\Gamma$ l'espace des solutions contractiles et d'énérgie finie de l'équation de Floer. De manière analogue aux théorèmes 3.18 et 3.19, $\mathcal{N}^\Gamma$ est compact et les éléments de $\mathcal{N}^\Gamma$ convergent tous à l'infini vers des orbites, de H^a en $-\infty$ et de H^b en $+\infty$. On définit pour x orbite 1-périodique de H^a et y orbite 1-périodique de H^b l'espace de modules suivant :

$$\mathcal{N}^\Gamma(x,y) = \{u \in \mathcal{N}^\Gamma \mid \lim_{s\to-\infty} u(s,t) = x(t),\ \lim_{s\to+\infty} u(s,t) = y(t)\}.$$

Contrairement au cas de l'équation de Floer non-paramétrée, il n'y a pas d'action de $\mathbb{R}$ par translation sur $\mathcal{N}^\Gamma$. On démontre de manière analogue au cas de l'équation de Floer sans paramètres :

Théorème 3.50. *Pour un choix générique de l'homotopie Γ, l'espace $\mathcal{N}^\Gamma(x,y)$ est une variété différentielle de dimension $i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y)$.*

De plus, si $i_{CZ}(x) = i_{CZ}(y)$, l'espace $\mathcal{N}^\Gamma(x,y)$ est fini. Si $i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y) = 1$, l'espace $\mathcal{N}^\Gamma(x,y)$ peut-être compactifié en une variété à bord de dimension 1, dont le bord s'identifie à la réunion de deux types d'ensembles de trajectoires brisées :

$$\bigcup_{i_{CZ}(z)=i_{CZ}(x)-1} \mathcal{L}_{(H^a,J^a)}(x,z) \times \mathcal{N}^\Gamma(z,y) \quad \cup \quad \bigcup_{i_{CZ}(z)=i_{CZ}(x)} \mathcal{N}^\Gamma(x,z) \times \mathcal{L}_{(H^b,J^b)}(z,y).$$

On appelera « homotopies régulières » les homotopies pour lesquelles les conclusions du théorème précédent sont vérifiées. Nous pouvons maintenant définir une application linéaire entre les complexes de Floer respectifs de (H^a, J^a) et (H^b, J^b), par

Définition 3.51 (Applications de « continuation » de Floer)**.** *Pour toute homotopie régulière Γ, on définit pour tout entier k une application linéaire $\Phi^\Gamma : CF_k(H^a, J^a) \to CF_k(H^b, J^b)$ par la formule*

$$\Phi^\Gamma(x) = \sum_{i_{CZ}(y)=i_{CZ}(x)} n^\Gamma(x,y)\, y,$$

où $n^\Gamma(x,y)$ est le nombre d'éléments modulo 2 de $\mathcal{N}^\Gamma(x,y)$.

On a alors l'énoncé suivant :

Proposition 3.52. *L'application Φ^Γ vérifie*

$$\partial_{(H^b,J^b)} \circ \Phi^\Gamma = \Phi^\Gamma \circ \partial_{(H^a,J^a)},$$

et induit donc un morphisme entre les groupes d'homologie de Floer $HF(H^a, J^a)$ et $HF(H^b, J^b)$, que l'on note encore Φ^Γ.

Démonstration . C'est une application facile du théorème 3.50, et est tout à fait semblable à la démonstration du fait que $\partial \circ \partial = 0$. En effet, d'après le théorème 3.50, pour $i_{CZ}(z) = i_{CZ}(x) - 1$, la compactification de $\mathcal{N}^\Gamma$ admet un nombre pair d'éléments dans son bord (comme toutes les variétés à bord de dimension 1). Or le nombre d'éléments de son bord est égal à

$$\sum_{i_{CZ}(y)=i_{CZ}(x)-1} n_{(H^b,J^b)}(x,y)\, n^\Gamma(y,z) + \sum_{i_{CZ}(y)=i_{CZ}(x)} n^\Gamma(x,y)\, n_{(H^a,J^a)}(x,y),$$

c'est-à-dire, modulo 2, le coefficient selon z du vecteur $\partial_{(H^b,J^b)} \circ \Phi^\Gamma(x) - \Phi^\Gamma \circ \partial_{(H^a,J^a)}(x)$. □

On peut ensuite établir les résultats suivants :

Proposition 3.53. *1. L'homotopie constante reliant une paire régulière (H,J) à elle-même est régulière et le morphisme correspondant est l'identité.*

2. Le morphisme Φ^Γ induit en homologie est indépendant de l'homotopie régulière.

3. Si Γ est une homotopie régulière entre (H^a,J^a) et (H^b,J^b), Γ' une homotopie régulière entre (H^b,J^b) et (H^c,J^c), et Γ'' une homotopie régulière entre (H^a,J^a) et (H^c,J^c) alors on a en homologie :

$$\Phi^{\Gamma'} \circ \Phi^\Gamma = \Phi^{\Gamma''}.$$

On déduit de cette proposition :

Corollaire 3.54. *Le morphisme de continuation entre deux paires régulières (H^a,J^a) et (H^b,J^b) est un isomorphisme dont l'inverse est le morphisme de continuation entre (H^b,J^b) et (H^a,J^a).*

L'homologie de Floer est donc un invariant de la variété symplectique, qui ne dépend d'aucun choix auxiliaire.

VIII De Floer à Morse

Nous avons déjà remarqué qu'un hamiltonien autonome et de Morse suffisamment petit au sens C^2 est non-dégénéré et que ses orbites 1-périodiques se réduisent à ses points fixes (cf. proposition 3.4). Nous avons également montré (proposition 3.34) que les indices de Morse et de Conley-Zehnder sont reliés par la formule :

$$i_{CZ}(x) = i_{\text{Morse}}(x) - n.$$

On peut aller plus loin et démontrer :

Théorème 3.55. *Si H est hamiltonien autonome suffisamment petit au sens C^2, alors pour un choix générique de structure presque complexe calibrée J, la paire (H, J) est régulière et la paire (H, g) vérifie la condition de Smale. On a alors un isomorphisme de complexes de chaines :*

$$CF_*(H, J) = C_{*+n}(H, g).$$

Avec le corollaire 3.54 et le théorème 2.32, on en déduit :

Corollaire 3.56. *Pour toute paire régulière (H, J), l'homologie de Floer $HF(H, J)$ est isomorphe à l'homologie de M.*

Chapitre 4

Sélecteurs d'action et capacité de Hofer-Zehnder

L'homologie de Floer peut servir à bien d'autres choses qu'à compter des orbites périodiques. Dans ce chapitre, nous présentons une application à la démonstration du théorème de non-squeezing de Gromov (théorème 1.25).

Nous allons associer à tout hamiltonien H d'une variété symplectique asphérique (M, ω) et toute classe d'homologie $\alpha \in (M, \omega)$ une valeur critique de l'action $c(\alpha, H)$, qui dépend continuement de H. Ces invariants ont énormément de propriétés et nous permettront de construire une capacité symplectique. Leur définition est une idée due à Viterbo [14]. La construction que nous suivons, via l'homologie de Floer, est due à Schwarz [13].

I Sélecteurs de valeurs critiques

En guise de préliminaires, nous abordons le problème analogue en dimension finie : comment associer de manière continue à toute fonction f sur M, une valeur critique de f.

Il y a plusieurs solutions faciles à ce problème : $f \mapsto \max(f)$ ou $f \mapsto \min(f)$. Cependant ces définitions ne s'étendent pas directement au cas de la fonctionnelle d'action, qui n'est ni majorée, ni minorée. Le maximum/minimum de l'ensemble des valeurs critiques de l'action ne se comporte pas non plus de manière continue. Cependant, la définition suivante sera facile à étendre à la fonctionnelle d'action.

Définition 4.1. *Pour $\alpha \in H_*(M, \mathbb{Z}/2) \setminus \{0\}$ une classe d'homologie non-nulle et pour $f \in C^0(M)$, on pose*

$$\rho(\alpha, f) = \min_{[\sigma]=\alpha} \max_{|\sigma|} f,$$

où $|\sigma|$ désigne le support du cycle σ qui représente α.

REMARQUE 4.2. Il y autant de façons de comprendre la définition ci-dessus qu'il y a de manières de construire l'homologie. En particulier les deux cas suivants sont intéressants :

1. Si l'on pense à α comme à une classe d'homologie singulière, le support de σ est la réunion des images des simplexes qui composent σ.
2. Si f est de Morse et α est une classe d'homologie de morse, le support de σ est l'ensemble des points critiques de f qui composent σ.

◀

EXEMPLE 4.3. On suppose M connexe. Dans le cas où α est la classe fondamentale de M, $\rho(\alpha, f) = \max(f)$. En effet, seule M toute entière peut représenter la classe fondamentale.

Dans le cas où α est la classe d'un point, $\rho(\alpha, f) = \min(f)$. En effet, tous les points de M représentent cette classe. ◀

REMARQUE 4.4. La définition de $\rho(\alpha, f)$ est strictement équivalente à la formule suivante :

$$\rho(\alpha, f) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \operatorname{Im}(\iota_*^\lambda)\},$$

où $\iota_*^\lambda : H_*(f^\lambda) \to H_*(M)$ désigne l'application induite en homologie par l'inclusion du sous-niveau f^λ. ◀

Proposition 4.5. *Pour toute fonction lisse f, $\rho(\alpha, f)$ est une valeur critique de f. L'application $C^0(M) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \rho(\alpha, f)$ est Lipschitzienne pour la norme uniforme.*

Démonstration . Le fait que $\rho(\alpha, f)$ soit une valeur critique de f découle immédiatement de la proposition 2.5 : la topologie des sous-niveau change au niveau $\rho(\alpha, f)$, c'est donc une valeur critique.

Pour démontrer la continuité, on remarque que l'inclusion $g^{\lambda+\max(f-g)} \subset f^\lambda$ induit un morphisme $H_*(g^{\lambda+\max(f-g)}) \to H_*(f^\lambda)$, compatible avec les morphismes ι_*^λ de f et g respectivement. On en déduit l'inégalité $\rho(\alpha, f) \leqslant \rho(\alpha, g) + \max(f - g)$. On termine la démonstration en échangeant les rôles de g et f. $\square$

II Sélecteurs d'action

La construction des sélecteurs de valeurs critiques de la section précédente se généralise très bien au cas de la fonctionnelle d'action dans le cas de l'homologie de Floer.

Commençons par remarquer que l'homologie de Floer d'un hamiltonien (H, J) est naturellement munie d'une filtration par l'action :

Définition 4.6 (Complexe de Floer filtré). *Soit (H,J) une paire régulière. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $CF_*^\lambda(H,J)$ le sous-espace vectoriel de $CF_*(H,J)$ engendré par les orbites 1-périodique de H dont l'action est inférieure ou égale à λ.*

Comme l'action décroît le long des courbes de Floer, la différentielle de Floer laisse invariant chacun des $CF_*^\lambda(H,J)$ et y induit une structure de complexe de chaîne. On note $HF_*^\lambda(H,J)$ l'homologie correspondante.

L'inclusion des complexes induit un morphisme

$$i_\lambda : HF_*^\lambda(H,J) \to HF_*(H,J) \simeq H_{*+n}(H,J).$$

Suivant la remarque 4.4, on pose la définition suivante.

Définition 4.7. *Pour toute classe d'homologie $\alpha \in H_*(M) \setminus \{0\}$, et toute paire régulière (H,J), on pose*

$$c(\alpha, H) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \in \mathrm{Im}(i_\lambda)\},$$

A priori, cette définition dépend de J, mais on verra plus bas qu'elle n'en dépendra pas.

EXERCICE 4.8. Vérifier que $c(\alpha,H)$ peut aussi s'écrire sous forme de min-max :

$$c(\alpha, H) = \min_{[\sigma]=\alpha} \max_{|\sigma|} \mathcal{A}_H,$$

où σ est un cycle du complexe de Floer de (H,J) représentant α, donc une combinaison linéaire formelle d'orbites, et $|\sigma|$ est l'ensemble des orbites le composant.

Voici une première propriété très importante.

Proposition 4.9. *Pour toutes paires régulières (H^a,J^a), (H^b,J^b) et toute classe d'homologie α, on a les inégalités suivantes :*

$$\int_0^1 \min(H_t^b - H_t^a)dt \leqslant c(\alpha, H^b) - c(\alpha, H^a) \leqslant \int_0^1 \max(H^b - H^a)dt.$$

En particulier, $c(\alpha,H)$ ne dépend pas de J et dépend de manière croissante et lipschitzienne de H.

Démonstration . Etudions de quelle manière se comportent les applications de continuation Φ (cf. définition 3.51 vis à vis de la filtration par l'action.

Soit $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ une application lisse qui vaut 0 au voisinage de $-\infty$ et 1 au voisinage de $+\infty$. On peut choisir une homotopie régulière $\Gamma = (H,J)$ de

(H^a, J^a) à (H^b, J^b) telle que $H_{s,t}$ soit arbitrairement proche de l'application $H^a_t + \beta(s)(H^b_t - H^a_t)$. Alors pour tout $u \in \mathcal{N}^\Gamma(x,y)$, l'énergie de u s'écrit :

$$\begin{aligned}
E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial s}\right\|^2 dt\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, -J_s\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_{s,t}\right\rangle dt\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_{s,t}}\right) dt\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 u^*\omega\,dt\,ds - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 dH_{s,t}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\,dt\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1} u^*\omega - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{d}{ds}(H_{s,t}\circ u)\,dt\,ds + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{\partial H_{s,t}}{\partial s}\circ u\,dt\,ds \\
&= \mathcal{A}_{H^a}(x) - \mathcal{A}_{H^b}(y) + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{\partial H_{s,t}}{\partial s}\circ u\,dt\,ds.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir Γ pour que $\frac{\partial H_{s,t}}{\partial s}\circ u$ soit uniformément à distance plus petite que ε de $\beta'(s)(H^b_t - H^a_t)$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}\beta'(s)\,ds = 1$, on en déduit l'inégalité :

$$0 \leqslant E(u) \leqslant \mathcal{A}_{H^a}(x) - \mathcal{A}_{H^b}(y) + \int_0^1 \max(H^b_t - H^a_t)\,dt + \varepsilon,$$

et donc

$$\mathcal{A}_{H^b}(y) \leqslant \mathcal{A}_{H^a}(x) + \int_0^1 \max(H^b_t - H^a_t)\,dt + \varepsilon.$$

On en déduit l'inclusion

$$\Phi^\Gamma(CF^\lambda_*(H^a, J^a)) \subset CF^{\lambda+\delta}_*(H^b, J^b),$$

où $\delta = \int_0^1 \max(H^b_t - H^a_t)\,dt + \varepsilon$.

D'après la proposition 3.53, on peut écrire en homologie :

$$i^{(H^b,J^b)}_{\lambda+\delta}\circ\Phi^\Gamma|_{CF^\lambda_*(H^a,J^a)} = i^{(H^a,J^a)}_\lambda.$$

Par conséquent, si α est dans l'image de $i^{(H^a,J^a)}_\lambda$, alors α est dans l'image de $i^{(H^b,J^b)}_{\lambda+\delta}$. On en déduit $c(\alpha, H^b) \leqslant c(\alpha, H^a) + \delta$. On termine la démonstration de l'inégalité de droite de l'énoncé en faisant tendre ε vers 0.

L'autre inégalité s'obtient de manière similaire. □

Remarque 4.10. Comme l'application $c(\alpha,\cdot)$ est uniformément continue sur l'ensemble des hamiltoniens non-dégnénérés, munis de la norme uniforme, elle s'étend à l'ensemble de tous les hamiltonien même dégénérés.

Par ailleurs, elle ne dépend d'aucun choix de structure presque complexe calibrée. ◀

Les propriétés énoncées dans la proposition suivante désoulent de ce qui précède pour les hamiltoniens non-dégénérés, et s'étendent naturellement à tout hamiltonien par passage à la limite.

Proposition 4.11. *1. Pour tout hamiltonien H, $c(\alpha, H)$ appartient à l'ensemble des valeurs critiques de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$.*

2. L'application $c(\alpha, \cdot)$ est continue et croissante sur l'espace $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M, \mathbb{R})$ munit de la topologie de la convergence uniforme.

3. Si H est une fonction suffisamment petite au sens C^2, alors $c(\alpha, H) = \rho(\alpha, H)$. En particulier, $c([M], H) = \max(H)$.

III Une capacité symplectique

Nous dirons qu'un hamiltonien autonome est « lent » s'il n'a pas orbite périodique de période plus petite que 1 autre que ses point critiques. Nous avons vu (proposition 3.4) qu'un hamiltonien suffisamment petit au sens C^2 est lent.

Cette notion permet de définir une capacité symplectique due à Hofer et Zehnder (cf. [10]).

Définition 4.12. *Pour tout ouvert U d'une variété symplectique (M, ω), on note*

$$C(U) = \sup\{\max H \mid H \textit{ autonome lent à support compact inclus dans } U\}.$$

Pour $A \subset M$ une partie quelconque, on pose $C(A) = \inf\{C(U) \mid A \subset U\}$.

Théorème 4.13. *L'application C définie sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^{2n}$ est une capacité symplectique, autrement dit :*

1. *si $U \subset V$, alors $C(U) \leqslant C(V)$,*
2. *$C(\psi(U)) = C(U)$, pour tout plongement symplectique $\psi : U \to \mathbb{R}^{2n}$,*
3. *$C(\lambda U) = \lambda^2 C(U)$, pour tout réel $\lambda > 0$,*
4. *$C(B^{2n}(1)) = C(Z^{2n}(1)) = \pi$.*

Démonstration . Le premier point est évident puisque pour des ouverts $U \subset V$, un hamiltonien autonome et lent supporté dans U est également un hamiltonien autonome et lent supporté dans V.

Le second point est conséquence du fait suivant : si H_t est un hamiltonien engendrant l'isotopie ϕ_H^t et si ψ est un difféomorphisme symplectique, alors $H_t \circ \psi$ engendre l'isotopie $\psi^{-1} \circ \phi_H^t \circ \psi$. En effet celui-ci implique que H

est lent si et seulement si $H \circ \psi$ est lent également. Pour démontrer cette assertion, on calcule :

$$\frac{d}{dt}\psi^{-1} \circ \phi_H^t \circ \psi|_{t=0} = \psi_*^{-1} X_H,$$

d'une part, et $d(H \circ \psi) = \psi^* dH = \psi^*(-\iota_{X_H}\omega) = -\omega(\psi_*^{-1} X_H, \cdot)$ d'autre part.

Le troisième point se démontre de manière similaire. Il est conséquence du fait suivant : en notant g_s l'application $x \mapsto sx$, alors pour tout hamiltonien H_t, le hamiltonien $s^2 H_t(g_s(x))$ engendre $g_s^{-1} \circ \phi_H^t \circ g_s$. Ce fait se démontre de manière analogue au précédent, en utilisant que $g_s^*\omega = s^2\omega$.

Le quatrième point va nous demander un peu plus de travail. Commençons par établir la minoration $C(B^{2n}(1)) \geqslant \pi$. Pour cela, il nous faut construire des hamiltoniens lents supportés dans $B^{2n}(1)$ et dont le maximum approche la valeur π.

On considère des hamiltoniens de la forme $H(z) = f(\pi\|z\|^2)$ où $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une application lisse, à support dans $[0, \pi]$ et plate au voisinage de 0. Ils sont biens supportés dans $B^{2n}(1)$. Le gradient symplectique s'écrit alors

$$\begin{aligned} X_H(z) &= 2\pi f'(\pi\|z\|^2)\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y_n\frac{\partial}{\partial x_n} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1} - \cdots - x_n\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \\ &= -2\pi f'(\pi\|z\|^2)\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

Les points critiques de H sont sur les sphères dont le rayon correspond aux valeurs où f' s'annule. On voit également que pour $-1 < f' < 1$, on n'a pas d'orbite périodique non-triviale de période $\leqslant 1$, autrement dit H est lent. Comme il est possible de trouver de telles fonctions ayant un maximum aussi proche que l'on veut de π, on obtient bien l'inégalité $C(B^{2n}(1)) \geqslant \pi$.

Nous allons maintenant montrer que pour tout hamiltonien autonome et lent dont le support est inclus dans le cylindre $Z^{2n}(1)$ vérifie $\max H \leqslant \pi$. Cela terminera la démonstration. Nous allons avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 4.14. *On note $[M]$ la classe fondamentale de M, supposée asphérique. Pour tout hamiltonien H autonome et lent, on a :*

$$c([M], H) = \max H.$$

Lemme 4.15. *Soit H un hamiltonien autonome*[1] *à support dans un ouvert U de M, supposée compacte asphérique, et K un hamiltonien vérifiant $\phi_K^1(U) \cap U = \emptyset$, alors*

$$c([M], H) \leqslant \int_0^1 (\max K_t - \min K_t)\, dt.$$

1. Dans ce lemme comme dans le précédent, la condition « autonome » n'est pas vraiment nécessaire.

Les deux lemmes réunis, on obtient l'énoncé suivant, connu sous le nom d'« inégalité énergie-capacité ».

Corollaire 4.16. *Pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^{2n}$ et tout hamiltonien K à support compact de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\phi_K^1(U) \cap U = \emptyset$, alors*

$$C(U) \leqslant \int_0^1 (\max K_t - \min K_t)\, dt.$$

Démonstration . Il suffit de plonger la réunion de U et du support de K dans une variété symplectique compacte asphérique suffisamment grande, par exemple un tore, puis d'appliquer les deux lemmes précédents. □

Revenons à notre estimation de la capacité du cylindre. Commençons par remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, le disque de rayon (et donc d'aire π) de $\mathbb{R}^2$ est symplectomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans le rectangle $R_\varepsilon = [0,1] \times [0, \pi + \varepsilon]$. C'est une application du théorème 1.22. On peut donc plonger symplectiquement $Z^{2n}(1)$ dans le produit $Z_\varepsilon = R_\varepsilon \times \mathbb{R}^{2n-2}$.

Soit K un hamiltonien qui coïncide avec $(\pi + \varepsilon)x_1$ sur un voisinage de Z_ε. Son champ de vecteur hamiltonien X_K coïncide avec $(\pi + \varepsilon)\frac{\partial}{\partial y_1}$ au voisinage de Z_ε, donc vérifie $\phi_K^1(Z_\varepsilon) \cap Z_\varepsilon = \emptyset$. En multipliant par une fonction plateau appropriée, un tel hamiltonien peut être construit à support compact et vérifiant :

$$\int_0^1 (\max K_t - \min K_t)\, dt \leqslant \pi + 2\varepsilon.$$

On déduit donc de l'inégalité énergie-capacité les inégalités suivantes pour tout ε :

$$C(Z^{2n}(1)) \leqslant C(Z_\varepsilon) \leqslant \int_0^1 (\max K_t - \min K_t)\, dt \leqslant \pi + 2\varepsilon.$$

□

Enfin, il nous reste à montrer les deux lemmes. Nous appellerons *spectre* de H et nous noterons $\mathrm{spec}(H)$ l'ensemble des valeurs critiques de $\mathcal{A}_H$. Nous avons vu au lemme 1.40 que $\mathrm{spec}(H)$ est un compact de mesure nulle, donc en particulier totalement discontinu. Nous savons également que $c(\alpha, H) \in \mathrm{spec}(H)$.

Démonstration du lemme 4.14. Soit H un hamiltonien autonome et lent. Pour chaque $s \in (0,1]$, on considère le hamiltonien sH, dont le flot est ϕ_H^{st}. Chaque sH est lent donc l'ensemble des orbites 1-périodiques de sH se réduit aux points critiques de sH (et donc de H). L'ensemble des orbites 1-périodiques est donc indépendant de s. De plus, les valeurs de l'action correspondantes sont les valeurs de sH en ces points. Autrement dit, $\mathrm{spec}(sH) = s\,\mathrm{spec}(H)$.

Considérons la fonction $\rho : s \mapsto \frac{1}{s}c([M], sH)$, $]0,1] \to \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, elle est continue et prend ses valeurs dans spec(H) qui est totalement discontinu. Elle est donc constante. Mais, d'après le point 3 de la proposition 4.11, on a $\rho(s) = \max(H)$ pour s suffisamment petit. On en déduit $\rho(1) = \max(H)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

EXERCICE 4.17. Soit H un hamiltonien et soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse croissante telle que $\chi(t+1) = \chi(t)+1$ pour tout t. Vérifier que le hamiltonien $G_t = \chi'(t)H_{\chi(t)}$ engendre le flot reparamétré : $\phi_H^{\chi(t)}$ et que $\operatorname{spec} G = \operatorname{spec} H$. En considérant une déformation de χ vers l'identité, en déduire que $c([M], G) = c([M], H)$.

Démonstration du lemme 4.15. Comme dans la démonstration du lemme précédent, nous considérons le Hamiltonien sH, puis nous introduisons le Hamiltonien F_s qui est la concaténation de K et de sH. Pour rendre ce hamiltonien lisse, il nous faut effectuer une reparamétrisation temporelle : soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lisse croissante telle que $\chi(t) = k$ au voisinage de k et telle que χ' est 1-périodique. On pose

$$F_s(t,x) = \begin{cases} s2\chi'(2t)H(x), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2\chi'(2t-1)K(\chi(2t-1), x), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ce hamiltonien a été conçu pour que $\phi^1_{F_s} = \phi^1_K \circ \phi^s_H$. La condition ϕ^1_K implique que tous les points fixes de ϕ^1_K sont dans le complémentaire de U. Comme H est à support dans U, on en déduit que $\phi^1_{F_s}$ a les mêmes points fixes que ϕ^1_K. Les orbites 1-périodiques de F_s sont obtenues en concaténant une orbite de K à un chemin constant. Elles ont donc les mêmes actions que les orbites de K. On a donc pour tout s, $\operatorname{spec}(F_s) = \operatorname{spec}(K)$.

Comme $s \mapsto c([M], F_s)$ est continue et prend ses valeurs dans l'ensemble totalement discontinu spec(K), on en déduit que $c([M], F_s)$ reste constante. Donc en particulier,

$$c([M], F_1) = c([M], K).$$

Nous pouvons maintenant conclure grâce aux inégalités de la proposition 4.11 (étendues à des hamiltoniens quelconques). En posant

$$G(t,x) = \begin{cases} 2\chi'(2t)H(x), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

on a d'une part $\int_0^1 \min K_t \, dt \leqslant c([M], F_1) - c([M], G)$ et $c([M], F_1) = c([M], K) \leqslant \int_0^1 \max K_t \, dt$ d'autre part. Comme par ailleurs, l'exercice 4.17 affirme que $c([M], G) = c([M], H)$, on en déduit l'inégalité voulue : $c([M], H) \leqslant \int_0^1 (\max K_t - \min K_t) \, dt$. $\square$

Bibliographie

[1] M. Audin and M. Damian. *Morse theory and Floer homology.* Universitext. Springer, London ; EDP Sciences, Les Ulis, 2014. Translated from the 2010 French original by Reinie Erné.

[2] A. Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[3] C. Conley and E. Zehnder. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(2) :207–253, 1984.

[4] I. Ekeland and H. Hofer. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. *Math. Z.*, 200(3) :355–378, 1989.

[5] Y. M. Eliashberg. A theorem on the structure of wave fronts and its application in symplectic topology. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(3) :65–72, 96, 1987.

[6] A. Floer. The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 :775–813, 1988.

[7] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris, 1971.

[8] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.

[9] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[10] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[11] F. Laudenbach. Symplectic geometry and Floer homology. In *Symplectic geometry and Floer homology. A survey of the Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology*, volume 7 of *Ensaios Mat.*, pages 1–50. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 2004.

[12] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1998.

[13] M. Schwarz. On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds. *Pacific J. Math.*, 193(2) :419–461, 2000.

[14] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Annalen*, 292 :685–710, 1992.