UPSN - SU
M2 Math fonda.
Introduction aux systèmes dynamiques 2021-2022

Dynamique topologique

Exercise 1. Soient X un ensemble et $f : X \to X$ une application. On suppose que $x \in X$ est un point périodique de f, de période $p \geq 1$.

(i) Vérifier que tout point $y \in \mathcal{O}^+(x)$ est aussi un point périodique de f, de période p.

(ii) Etant donné un entier $n \geq 1$, vérifier que x est aussi un point périodique de f^n, et exprimer la période de x pour l'application f^n en fonction de n et p.

Exercise 2. (i) Montrer qu'un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir de point périodique de période $p \geq 3$.

(ii) Montrer qu'un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ croissant et sans point fixe est conjugué à la translation $x \mapsto x + 1$.

Exercise 3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ possédant un point fixe $p \in U$.

(i) Montrer que si $||Df(p)|| < 1$ alors tout point x assez proche de p vérifie $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p$.

(ii) Qu'obtient-on si $||Df(p)|| > 1$?

Exercise 4. Soient X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue. Vérifier que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\omega(x)$ est non vide et globalement invariant (c'est à dire vérifie $f(\omega(x)) = \omega(x)$).

Exercise 5. Soient X un espace topologique et $f : X \to X$ une application continue. Vérifier que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) f est transitive;

(b) Tout ouvert $U \subset X$ vérifiant $f^{-1}(U) \subset U$ est vide ou dense dans X.

Exercise 6. Soient X un espace topologique et $f : X \to X$ une application continue.
(i) Vérifier que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) f est minimale;

(b) Les seuls fermés $F \subset X$ positivement invariants sont $\emptyset$ et X;

(c) $\forall x \in X \quad \omega(x) = X$;

(d) pour tout ouvert non vide $U \subset X$ on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U) = X$.

(ii) Donner un résultat similaire pour la minimalité d'un homéomorphisme de X.

Exercise 7. Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue. On dit qu'un fermé $F \subset X$ est *positivement minimal* s'il vérifie

(i) $F \neq \emptyset$;

(ii) F est positivement invariant;

(iii) aucun fermé $F' \subsetneqq F$ ne satisfait (i) et (ii).

Montrer à l'aide du lemme de Zorn qu'il existe un fermé positivement minimal puis en déduire que f admet au moins un point positivement récurrent (ce qui est connu sous le nom de lemme de récurrence de Birkhoff).

Exercise 8. Soit X un espace topologique séparé non compact et contenant un compact K d'intérieur non vide (par exemple un espace topologique séparé non compact et localement compact). Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : X \to X$ minimale. On raisonne par l'absurde et on suppose par la suite que $f : X \to X$ est continue et minimale.

(i) Vérifier que l'on définit une fonction $n : X \to \mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall x \in X \quad n(x) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^n(x) \in \mathrm{Int}(K)\big\}.$$

(ii) Montrer que la fonction n est bornée sur K.

(iii) Montrer qu'il existe un compact non vide $L \subset X$ positivement invariant par f puis en déduire une contradiction.

Exercise 9. Soit X un espace topologique et $f : X \to X$ une application continue. Montrer que si $\Omega(f) = X$ alors $\Omega(f^n) = X$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercise 10. Soient (X, d) un espace métrique $f : X \to X$ une application continue préservant la distance.
(i) Montrer que: f transitive $\Leftrightarrow$ f minimale.

(ii) Si X n'est pas réduit à un point, vérifier que f n'est pas topologiquement mélangeante.

Exercise 11. On note $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ le tore de dimension n et $R_\theta : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ l'application définie par $R_\theta(z) = (e^{2\pi i\theta_1}\, z_1, \ldots, e^{2\pi i\theta_n}\, z_n)$. où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Discuter l'existence de points périodiques.

(ii) Montrer qu'il y a equivalence entre R_θ est transitive si et seulement si elle est minimale si et seulement si les réels $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ sont indépendant sur $\mathbb{Q}$.

Exercise 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mu x(1-x)$ avec $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

(i) Pour $I = [0, 1]$, dessiner le graphe de f ainsi que les ensembles $K_1 = I \cap f^{-1}(I)$, $K_2 = I \cap f^{-1}(I) \cap f^{-2}(I)$.

(ii) On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(I)$, autrement dit K est l'ensemble des points x tels que $\mathcal{O}^+(x) \subset I$. Le but de cette question est de montrer que K est un ensemble de Cantor, i.e. un compact non vide sans point isolé et dont toute composante connexe est réduite à un point.

a) Vérifier que K est un compact invariant non vide.

b) Montrer que K ne contient aucun intervalle non réduit à un point. *Indication:* Vérifier et utiliser le fait que $|f'(x)| > 1$ pour tout $x \in K_1$.

c) Montrer que K est sans point isolé.

(iii)

On note I_0, I_1 les deux intervalles constituant K_1 en convenant que $0 \in I_0, 1 \in I_1$. Pour tout $x \in K$ (donc $f^n(x) \in K_1$ pour tout $n \geq 0$) on pose

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{si } f^n(x) \in I_1 \end{cases}$$

puis $S(x) = \big(s_n(x)\big)_{n\geq 0} \in \Sigma_2^+$.

Démontrer que l'application $S : K \to \Sigma_2^+$ ainsi définie est une conjugaison entre le système dynamique $(K, f|_K)$ et le shift (Σ_2^+, σ).

Exercise 13. On désigne par $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Étant donné un entier $p \geq 2$, on considère $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $f(z) = z^p$ et le décalage $\sigma : \Sigma_p^+ \to \Sigma_p^+$ avec $\Sigma_p^+ = \{0, 1, \cdots, p-1\}^{\mathbb{N}}$.

(i) a) Montrer que l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \Sigma_p^+ & \to & \mathbb{S}^1 \\ (x_i)_{i\geq 0} & \mapsto & e^{2i\pi \sum_{i=0}^{\infty} x_i/p^{i+1}} \end{array}$$

est une semi-conjugaison de (Σ_p^+, σ) à $(\mathbb{S}^1, f)$.

b) Que peut-on en déduire sur le système dynamique $(\mathbb{S}^1, f)$?

(ii) a) Retrouver la densité de $\mathrm{Per}(f)$ en résolvant l'équation $f^n(z) = z$.

b) $\mathrm{Rec}(f)$ est-il fermé ?