UPSN - SU
M2 Math fonda.
Introduction aux systèmes dynamiques 2021-2022

Théorie Ergodique

Exercise 1. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une application mesurable possédant un point périodique x de période n. Vérifier que $\mu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$ est une mesure de probabilité invariante et ergodique pour f.

Exercise 2. On note σ le décalage unilatéral sur $\Sigma_p^+ = A^{\mathbb{N}}$, avec $A = \{0, \cdots, p-1\}$ (p entier ≥ 2), $\nu = (\frac{1}{p}, \cdots, \frac{1}{p})$ la mesure de probabilité uniforme sur A et $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ la mesure de probabilité produit sur Σ_p^+. Soient $\varphi : \Sigma_p^+ \to \mathbb{R}$ et $h : \Sigma_p^+ \to \mathbb{T}$ les applications définies respectivement par

$$\varphi\big((x_n)_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{p^{n+1}}, \qquad h = \exp\circ(2i\pi \times \varphi).$$

(i) Calculer $\mu\Big(\varphi^{-1}\big(\big[\frac{k}{p^l}, \frac{k+1}{p^l}\big[\big)\Big)$ pour $l \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \cdots, p^l - 1\}$.
(ii) Prouver à l'aide du (i) que $h_*\mu$ est la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

Exercise 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $f : X \to X$ mesurable préservant μ. Montrer que toutes les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) μ est ergodique;

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad f^{-1}(A) \subset A \Rightarrow \mu(A) \in \{0; 1\}$;

(iii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad A = f^{-1}(A)\, \mu\text{-ps} \Rightarrow \mu(A) \in \{0; 1\}$;

(iv) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) > 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(A)\right) = 1$;

(v) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \Big(\mu(A) > 0 \text{ et } \mu(B) > 0\Big) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Exercise 4. Soient X un espace topologique possédant une base dénombrable d'ouverts (par exemple un espace métrique séparable) muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}_X$, μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}_X)$ et $f : X \to X$ préservant la mesure μ. Montrer que si f est ergodique pour μ alors on a $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = \mathrm{Supp}(\mu)$ pour μ-presque tout $x \in X$.

Exercise 5. On note $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ le tore de dimension n et $R_\theta : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ l'application définie par $R_\theta(z) = (e^{2\pi i\theta_1} z_1, \ldots, e^{2\pi i\theta_n} z_n)$. où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il y a equivalence entre:

– R_θ est transitive;
– R_θ est minimale;
– les réels $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ sont indépendant sur $\mathbb{Q}$;
– la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^n$ est ergodique pour R_θ.

Exercise 6. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $f : X \to X$ une application ergodique pour μ et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$. On définit une application $n_A : X \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ en posant $n_A(x) = +\infty$ si $f^n(x) \in X \setminus A$ pour tout $n \geq 1$ et sinon

$$n_A(x) = \inf \ \big\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, f^n(x) \in A\big\}.$$

On pose aussi pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \Big\{x \in A \,\Big|\, n_A(x) = n\Big\} \qquad \text{et} \qquad B_n = \Big\{x \in X\backslash A \,\Big|\, n_A(x) = n\Big\}.$$

(i) Montrer que $\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n \cup B_n\Big) = 1$.

(ii) Montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\mu(B_n) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B_{n+1}) \qquad \text{puis} \qquad \mu(B_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

(iii) Déduire des questions précédentes que l'on a $\int_A n_A d\mu = 1$. Interprétez ce résultat (connu sous le nom de lemme de Kac).

Exercise 7. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ.
(i) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : f^n ergodique $\Rightarrow f$ ergodique . Que pensez-vous de la réciproque ?

(ii) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : f^n mélangeante $\Leftrightarrow f$ mélangeante .

Exercise 8. (i) Le cercle unité $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ est muni de sa σ-algèbre borélienne et on définit l'application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ par $p(x) = e^{2i\pi x}$.

a) Justifier que si une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}$ est invariante par toutes les rotations alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \{0, \cdots, 2^n - 1\}$, l'arc de cercle $A_n^m = p\big(\big[\frac{m}{2^n}; \frac{m+1}{2^n}\big[\big)$ vérifie $\mu(A_n^m) = \frac{1}{2^n}$.

b) En déduire que la mesure de Haar-Lebesgue normalisée est la seule mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}$ invariante par toutes les rotations.

(ii) On note $\mathbb{T}^n = (\mathbb{T})^n$ le tore de dimension n et on appelle rotation (généralisée) de $\mathbb{T}^n$ toute application $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ de la forme $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto \big(R_{\theta_1}(z_1), \cdots, R_{\theta_n}(z_n)\big)$ où les R_{θ_i} sont des rotations de $\mathbb{T}$. Montrer que la mesure de Haar-Lebesgue normalisée est la seule mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}^n$ invariante par toutes les rotations.

(iii) Montrer que si les réels $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors l'application R_θ est uniquement ergodique.

Exercise 9. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une application mesurable. Montrer à l'aide du théorème ergodique de Birkhoff que si $\mu \neq \nu$ sont deux mesures de probabilité ergodiques pour f alors elles sont étrangères (i.e. il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 1$ et $\nu(A) = 0$).

Exercise 10. Soit k un entier ≥ 2. On dit qu'un réel $x \in [0, 1[$ est normal dans la base k s'il admet un développement $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i/k^{i+1}$ où tout entier $l \in \{0, \dots, k-1\}$ a une densité égale à $1/k$, autrement dit si

$$\forall l \in \{0, \dots, k-1\} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sharp\big\{0 \leq i \leq n-1 \,|\, x_i = l\big\} = \frac{1}{k}.$$

On désigne par μ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0, 1[$ et, pour tout réel $x \in [0, 1[$, on note $T(x) \in [0, 1[$ la partie fractionnaire de kx. (i) Montrer que l'application $T : [0, 1[\to [0, 1[$ ainsi définie préserve la mesure μ et est ergodique pour μ.

(ii) Justifier que l'ensemble X des réels $x \in [0, 1[$ admettant un unique développement $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i/k^{i+1}$ est de mesure 1.

(iii) Etant donné $l \in \{0, \dots, k-1\}$, on note χ la fonction indicatrice de l'intervalle $[\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}[$. Vérifier que l'on a pour tout $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i/k^{i+1} \in X$:

$$\chi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = l.$$

(iv) Utiliser le théorème ergodique de Birkhoff pour montrer que μ-presque tout $x \in [0, 1[$ est normal dans la base k.

Exercise 11. Le cercle unité $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique et est muni de sa σ-algèbre borélienne. On définit l'application de revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ par $p(x) = e^{2i\pi x}$ et on note μ la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.
(i) Montrer que $\log_{10}(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On notera par la suite $\alpha = \log_{10}(2)$ et R_α la rotation de $\mathbb{T}$ d'angle $2\pi\alpha$

(ii) Soit un entier $m \in \{1, 2, \cdots, 9\}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que la première décimale de 2^n est m.

(iii) Soit $A = [a, b[_{\mathbb{T}}$ un arc semi-ouvert du cercle $\mathbb{T}$.

a) Justifier l'existence de fonctions continues $\varphi_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\psi_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ (où $k \in \mathbb{N}$) vérifiant

$$\forall k \ \varphi_k \leq 1_A \leq \psi_k \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi_k \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{T}} \psi_k \, d\mu = \mu(A).$$

b) En utilisant a) et le fait que R_α est uniquement ergodique, montrer que les moyennes de Birkhoff $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A \circ R_\alpha^i$ convergent uniformement vers $\mu(A)$.

4) Montrer à l'aide du 3) que pour tout entier $m \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sharp\Big\{0 \leq i \leq n-1 \,|\, \text{la première décimale de } 2^i \text{ est } m\Big\} = \log_{10}\big(1 + \frac{1}{m}\big).$$

Exercise 12. On note $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ le cercle unité et $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ le tore de dimension 2. On munit $\mathbb{T}^2$ de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}$ et on note μ la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^2$. On définit l'application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ par $p(x,y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$. En particulier $p(x,y) = p(x',y')$ si et seulement si $(x,y) - (x',y') \in \mathbb{Z}^2$.

Pour tout $\theta = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la rotation (généralisée) $R_\theta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ est définie par $R_\theta(z_1, z_2) = (e^{2i\pi\alpha} z_1, e^{2i\pi\beta} z_2)$. Comme R_θ dépend seulement de $p(\theta)$, on la notera aussi $R_{p(\theta)}$.

On considère la base hilbertienne $\left\{e_{m,n} \,|\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu)$ donnée par

$$e_{m,n}(z_1, z_2) = z_1^m\, z_2^n, \text{ i.e. } e_{m,n}(z_1, z_2) = e^{2i\pi(mx+ny)} \quad \text{pour tout } (x,y) \in p^{-1}(\{(z_1, z_2)\}).$$

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

(i) Vérifier que:

$$p(x,y) = p(x',y') \Rightarrow p(F_A(x,y)) = p(F_A(x',y')).$$

En déduire que l'on peut définir une application continue $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ vérifiant $f_A \circ p = p \circ F_A$. (on dit que f_A est un endomorphisme linéaire du tore).

(ii) a) Vérifier que

$$p^{-1}(f_A(\mathbb{T}^2)) = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{Im}(F_A) + (m,n).$$

b) Montrer que: f_A surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(A) \neq 0$.

(iii) a) Montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2 \quad R_{f_A(p(\theta))} \circ f_A = f_A \circ R_{p(\theta)}.$$

b) Montrer que si f_A est surjective alors elle préserve la mesure μ. *Indication: utiliser a) et le fait que μ est la seule mesure de probabilité borélienne invariante par toutes les rotations.*

(iv) On suppose dans cette question que $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. En particulier f_A préserve μ.

a) Vérifier que $e_{m,n} \circ f_A = e_{m',n'}$ où $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

b) On suppose dans ce b) que les valeurs propres de A ne sont pas racine de l'unité. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Justifier que $(A^t)^j \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq (A^t)^k \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ pour tous les entiers $j \neq k$ dans $\mathbb{N}$. Puis, montrer que f_A est ergodique par rapport à μ. *Indication: les coefficients de Fourier $C_{m,n}$ d'une fonction $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu)$ vérifient $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |C_{m,n}|^2 < +\infty$.*

c) On suppose dans ce c) qu'une valeur propre λ de A est racine de l'unité: $\lambda^k = 1$ pour un entier $k \geq 1$. Justifier qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$(A^t)^k \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

On note $\begin{pmatrix} m_j \\ n_j \end{pmatrix} = (A^t)^j \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Montrer que f_A n'est pas ergodique par rapport à μ en considérant la fonction $\varphi = \sum_{j=0}^{k-1} e_{m_j, n_j}$.