UPSN - SU
M2 Math fonda.
Introduction aux systèmes dynamiques 2021-2022

Entropie topologique

Exercise 1. On considère l'application $T : z \mapsto z^p$ définie sur $\mathbb{S}^1$.

(i) Montrer sans calcul que $h(T) \leq \log p$.

(ii) Soit $\delta > 0$ un réel que l'on supposera suffisamment petit et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de $\mathbb{S}^1$ par des intervalles de longueurs toutes plus petites que δ. Montrer que $T^{-1}\mathcal{U} \vee \mathcal{U}$ est constitué d'intervalles de longueurs toutes plus petites que δ/p. Que dire de $\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\mathcal{U}$? Montrer que $\mathcal{U}$ est générateur.

(iii) Montrer que $h(T) = \log p$.

Exercise 2. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(\bigvee_{i=0}^{n} f^{-i}\mathcal{U}\right) = 0.$$

On veut montrer que X est un ensemble fini.

(i) Montrer que l'on peut supposer que $\mathcal{U}$ est fini.

(ii) Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$, où $\mathcal{V} := \bigvee_{i=1}^{k} f^{-i}\mathcal{U}$.

(iii) En déduire: (a) $\mathcal{V} \preccurlyeq f^{-1}\mathcal{V}$; (b) $\mathcal{V} \preccurlyeq f^{-i}\mathcal{V}$, $\forall i \geq 1$; (c) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(\bigvee_{i=0}^{n} f^{-i}\mathcal{V}\right) = 0$

(iv) Conclure.

Exercise 3. Donner un exemple d'homéomorphisme d'un espace compact dont l'entropie topologique est infinie.

Exercise 4. Montrer que l'entropie topologique d'un homéomorphisme de $[0, 1]$ est nulle.

Exercise 5. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Calculer l'entropie topologique de $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y + \alpha)$.

Exercise 6. Soit $T : X \to X$ une application lipschitzienne sur un espace métrique compact. L'entropie peut elle être infinie? et dans le cas où X est une variété différentiable?

Exercise 7. Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact tel que l'ensemble des points non-errants $\Omega(T)$ est fini. Montrer que $h(T) = 0$.

Exercise 8. Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. On suppose qu'il existe une famille finie $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ de parties fermées positivement invariantes (i.e. $T(X_i) \subset X_i$), telles que $X = \bigcup_{1\leq i\leq p} X_i$. Montrer que $h(T) = \sup_{1\leq i\leq p} h(T|_{X_i})$.

Exercise 9. Quelle est l'entropie de $T : z \mapsto z^2$ définie sur la sphère de Riemann ?