

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Le *h*-principe

Auteur :
Victor FOURNET

Sous la direction de :
Vincent HUMILIÈRE

1^{er} juillet 2019



Table des matières

1	Introduction	2
2	Fibré des jets	4
3	Relations différentielles et h-principe	5
3.1	Les immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2	5
3.2	h -principe	6
4	Exemples de h-principe	8
4.1	Théorème de Smale et Hirsch	8
4.2	Théorème de Nash et Kuiper	9
4.3	Existence d'une forme symplectique	10
5	Théorèmes assurant un h-principe	11
5.1	Le h -principe pour les relations $\text{Diff}(M)$ -invariante	12
5.2	Le h -principe pour les relations amples	12
6	Intégration convexe	13
6.1	Intégration convexe en dimension un	13
6.2	Intégration convexe en dimension supérieure	21
7	L'approximation holonome	23
7.1	Le théorème d'approximation holonome	23
7.2	Relation différentielle $\text{Diff}(M)$ -invariante	24
7.3	Le h -principe pour les relations $\text{Diff}(M)$ -invariantes	25
8	Applications en géométrie symplectique	25
8.1	Structure symplectique	25
8.2	Immersion lagrangienne	27

Résumé

Dans ce document, nous présentons le h -principe, et donnons plusieurs exemples d'applications. Nous allons également parler de deux théorèmes importants, celui du h -principe pour les relations amples, et celui pour les relations $\text{Diff}(M)$ -invariantes. Nous démontrons en détail le théorème pour les relations amples et donnons les détails de la construction de l'intégration convexe. Nous présentons ensuite le théorème d'approximation holonome que nous admettons, puis nous démontrons le théorème pour les relation $\text{Diff}(M)$ -invariante, et nous présentons quelques applications en géométrie symplectique. Ce texte ne prétend pas à l'originalité, en particulier nous nous inspirons en grande partie de [1, 3, 6], ainsi que de [7] pour les sections 7 et 8. Le but de ce texte est de rassembler (bien sûr de manière non-exhaustive) ce qu'on peut trouver dans la littérature anglophone et francophone sur le h -principe et de donner plus de détails quand nous le jugeons nécessaire.

1 Introduction

Le h -principe repose sur l'idée suivante. Formellement, une relation différentielle \mathcal{R} est n'importe quelle condition imposée sur les dérivées (partielles) d'une fonction. En théorie des équations aux dérivées partielles, on rencontre souvent des systèmes d'équations dit déterminés. Il y a autant d'inconnues que d'équations. Avec les conditions aux bords appropriées, on arrive souvent à obtenir un problème avec une unique solution, on peut ainsi attaquer le problème avec des techniques analytiques. En géométrie différentielle, c'est plutôt des systèmes d'inégalités que l'on va rencontrer, et il y a un nombre infini de solutions peu importe les conditions aux bords que l'on impose, et ces systèmes sont souvent "sous déterminés", il y a moins d'équations que d'inconnues. Le but du h -principe est d'étudier de tels problèmes avec des techniques d'homotopies. Si l'on prend une relation différentielle quelconque, on peut toujours remplacer cette relation par une relation algébrique en remplaçant les termes de dérivées par des nouvelles fonctions indépendantes. On appellera une solution de cette relation algébrique une solution *formelle*. L'existence d'une solution formelle est bien sûr une condition nécessaire à l'existence d'une vraie solution à la relation différentielle. Il paraît donc naturel de commencer par étudier l'existence de telles solutions. Parfois, un miracle arrive, et on peut déformer une solution formelle sur une vraie solution. S'il est possible de déformer n'importe quelle solution formelle sur une vraie solution, on dira alors que \mathcal{R} satisfait au h -principe.

Exemple. On considère l'anneau du plan euclidien

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3}{2} \right\}.$$

et les applications

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}.$$

Question : *Existe-t-il une homotopie h_t de fonction C^1 qui relie f et g telle que $d(h_t) \neq 0$, c'est-à-dire sans créer de plans horizontaux (ou verticaux) ?*

Après quelques essais, l'exercice semble impossible... En effet si on regarde d'un peu plus près les gradients de f et g , on voit que, restreints au cercle unité \mathbb{S}^1 , ils s'identifient à des lacets qui évitent l'origine $(0, 0)$. De plus $\text{grad}(f)$ tourne une fois autour de l'origine tandis que $\text{grad}(g)$ est un lacet constant. S'il existait une telle homotopie, elle induirait une homotopie entre ces deux gradients, ce qui est impossible. On peut alors se poser la question "qu'en est-il de l'existence d'une homotopie entre f et $-f$?" Cette fois-ci l'obstruction évidente de l'exemple

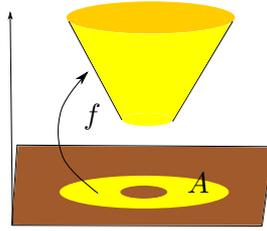


FIGURE 1 – L'application f

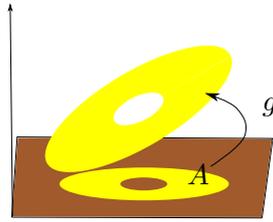


FIGURE 2 – L'application g

précédent s'évanouit car les gradients font le même nombre de tours et sont donc homotopes... On peut montrer que, cette fois ci, une telle homotopie existe bel et bien. On remarque sur ce problème quelque chose de particulier : la simple disparition d'une obstruction *homotopique* donne une réponse positive à un problème *différentiel*. Mais alors, que s'est-il passé ? Regardons les choses un peu plus en détail.

Notons \mathcal{R} la relation différentielle qui porte sur nos fonctions, c'est-à-dire le fait que la différentielle ne s'annule pas, au final, cela revient à regarder l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Une fonction $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie $dh_a \neq 0$ (i.e. $\text{grad}(h)(a) \in \mathcal{R}$) pour tout $a \in A$ est dite *solution* de notre relation différentielle \mathcal{R} , et on note $\text{Sol}(\mathcal{R})$ l'ensemble de telles fonctions. Sous cet angle, nos questions se reformulent ainsi :

Question : les fonctions f et g (respectivement f et $-f$) sont-elles dans la même composante connexe par arcs de $\text{Sol}(\mathcal{R})$?

L'espace $\text{Sol}(\mathcal{R})$ s'injecte continument dans $\Gamma(\mathcal{R}) = C^0(A, \mathcal{R})$ par l'application $J : f \mapsto \text{grad}(f)$. Ainsi une condition nécessaire pour avoir une réponse positive à notre question est que $J(f)$ et $J(g)$ (respectivement $J(f)$ et $J(-f)$) habitent dans la même composante connexe par arcs de $\Gamma(\mathcal{R})$. Cela revient à demander que les applications gradient restreintes au cercle unité fassent le même nombre de tour autour de l'origine. Donc la réponse à notre question pour f et g est négative. En revanche $J(f)$ et $J(-f)$ vivent bien dans la même composante connexe par arcs. Réciproquement, f et $-f$ vivent-elles dans la même composante connexe par arc de $\text{Sol}(\mathcal{R})$? On a vu que oui, c'est notre petit miracle (on dit que \mathcal{R} respecte le h -principe). Mais il se trouve que quelque chose de bien plus fort a lieu, l'application J est une équivalence d'homotopie, ainsi les 2 espaces sont topologiquement indiscernables (on parle alors de h -principe paramétrique).

Au bilan, nous avons une relation différentielle \mathcal{R} et une question concernant l'espace $\text{Sol}(\mathcal{R})$ des solutions de cette relation. On a constaté que cet espace se voit naturellement comme un sous-espace d'un autre espace bien plus facile à comprendre et à manipuler : $\Gamma(\mathcal{R})$. Cet espace est composé d'application $\sigma : A \rightarrow \mathcal{R}$. Parmi ces sections, certaines se voient comme le gradient d'une fonction, on dira que ces sections sont holonomes. Elles correspondent précisément à l'image de $\text{Sol}(\mathcal{R})$ par J dans $\Gamma(\mathcal{R})$. Beaucoup de questions en géométrie (et ailleurs) se formulent en terme de relation différentielle. De manière générale, les espaces $\text{Sol}(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont très différents topologiquement l'un de l'autre. On verra plusieurs formes de h -principe, certaines plus fortes que les autres. Ces versions plus fortes pourront se voir comme une façon de quantifier à quel point les espaces $\text{Sol}(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ se ressemblent d'un point de vue topologique.

2 Fibré des jets

La façon dont nous avons formulé le h -principe dans l'introduction ne se prête pas très bien aux généralisations, on va opter pour un point de vue bien plus pratique à manipuler, celui des *jets de sections*, ce qui nous donnera une définition plus précise du h -principe, il faut cependant garder à l'esprit que cette formulation échouera à prendre en compte bon nombre de situations qui peuvent être mises en lumière par l'idée de h -principe.

Définition 2.0.1. Soient E, F et B des espaces topologiques. Une fibration est la donnée d'une application continue $p : E \rightarrow B$ telle que :

- (1) Tout point $b \in B$ admet un voisinage $U \subset B$ et une application $\varphi_b : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$
- (2) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

- (3) Les applications φ_b sont des homéomorphismes.

On dira que E est un fibré au-dessus de B , et que F est une fibre au dessus de B . De plus si F est un espace vectoriel de dimension k , on dira que $p : E \rightarrow B$ est un fibré vectoriel de rang k .

Définition 2.0.2. Soit $p : X \rightarrow M$ une fibration. Une section de X est une application $\sigma : M \rightarrow X$ telle que $p \circ \sigma = \text{Id}_M$. On notera $\Gamma^r(X)$ les sections de classe C^r .

Définition 2.0.3. Soit $p : X \rightarrow M$ un fibré vectoriel, $x \in M$, et U un voisinage trivialisant de x . Soient $\sigma^1, \sigma^2 : U \rightarrow X$ des sections C^1 . On dit que $\sigma^1 \sim_x \sigma^2$ si $\sigma^1(x) = \sigma^2(x)$ et $d\sigma_x^1 = d\sigma_x^2$. On appelle les classes d'équivalences pour cette relation des *jets d'ordre 1 en x* , et on note l'espace des 1-jets $X^{(1)} = \bigcup_{x \in M} \Gamma^1(X)/\sim_x$. On notera $J : \Gamma^1(X) \rightarrow \Gamma^0(X^{(1)})$ l'application qui à une section f associe son 1-jet $j^1 f$.

Le 1-jet d'une section locale σ en x s'identifie au couple

$$j^1 \sigma(x) = (\sigma(x), d\sigma_x)$$

Proposition 2.0.1. L'espace $X^{(1)}$ s'identifie à l'espace

$$\left\{ (y, L) \mid y \in X, L \in \mathcal{L}(T_{p(y)}M, T_y X) \text{ et } dp_y \circ L = \text{Id}_{T_{p(y)}M} \right\}$$

Démonstration. Soit $x \in M$, σ une section locale en x et $j^1 \sigma(x) = (\sigma(x), d\sigma_x)$ son 1-jet, alors on a bien $\sigma(x) \in X$ et $dp_{\sigma(x)} \circ d\sigma_x = \text{Id}_{T_x M}$.

Réciproquement, soient $y \in X$ et $L \in \mathcal{L}(T_{p(y)}M, T_y X)$. On se place dans une carte centrée en y , alors la section σ définie par $\sigma(t) = y + L(t - x)$ pour tout $t \in U$ convient. □

Remarque 2.0.1. (1) Dans le cas du fibré trivial $p : M \times N \rightarrow M$, une section C^1 s'écrit sous la forme $\sigma(x) = (x, f(x))$ avec $f \in C^1(M, N)$. Dans ce cas le 1-jet de σ s'identifie au triplet $(x, f(x), df_x)$ et on peut identifier l'espace $X^{(1)}$ à l'espace

$$J^1(M, N) = \{(x, y, L) \mid x \in M, y \in N, L \in \mathcal{L}(T_x M, T_y N)\}$$

(2) La première projection

$$\begin{aligned} p^1 : X^{(1)} &\longrightarrow X \\ (y, L) &\longmapsto y \end{aligned}$$

définit une fibration, de fibre $(p^1)^{-1}(y) = \{L \in \mathcal{L}(T_{p(y)}M, T_y X) \mid dp_y \circ L = \text{Id}_{T_{p(y)}M}\}$. Ces 2 structures sont importantes, elles reviendront par la suite.

3 Relations différentielles et h -principe

Avant d'aller plus loin, considérons un exemple introductif :

3.1 Les immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2

On note $I(M, \mathbb{R}^n)$ l'espace des immersions de M dans \mathbb{R}^n . On s'intéresse à $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, i.e. les chemins fermés. Soit $\gamma \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

On définit alors son nombre de tour $N(\gamma') = \tilde{\gamma}'(1) - \tilde{\gamma}'(0)$. Alors, on définit l'indice $\text{Ind}(\gamma)$ comme étant le nombre $N(\gamma')$. On a alors le théorème :

Théorème 3.1.1 (Whitney-Graustein [10]). *L'application Ind est invariante par homotopie régulière et elle fournit une bijection :*

$$\begin{aligned} \text{Ind} : \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto \text{Ind}(\gamma). \end{aligned}$$

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.1.1 (Homotopie d'homotopie). *Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ tels que $N(\gamma'_0) = N(\gamma'_1)$, et soit $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$ une homotopie joignant γ'_0 et γ'_1 . Alors il existe une application :*

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R}) \\ (t, s) &\longmapsto H_{s,t} \end{aligned}$$

telle que $H_{0,s} = \gamma'_0$, $H_{1,s} = \gamma'_1$, $H_{t,0} = \sigma_t$ et $H_{t,1}$ est holonome.

Ici le terme "holonome" désigne le fait que $\int_0^1 H_{t,1}(u) du = 0$.

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer une version plus faible. Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$. Par homotopie radiale, on peut toujours se ramener à un chemin $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. On pose

$$V = \int_0^1 \sigma(u) du.$$

Et on pose $\forall t \in [0, 1]$, $\sigma_t = \sigma - tV$. Comme le disque unité D^2 est convexe, on a que $V \in \text{Int}(D^2)$ et on est assuré que σ_t ne passe pas par 0. De plus, on a bien que σ_1 est holonome.

Ensuite, considérons $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$ une homotopie joignant γ'_0 et γ'_1 . On peut de la même façon se ramener à un chemin $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ et d'après ce qui précède, $\forall t \in [0, 1]$, il existe une application $H_{t,s} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ et on a bien $H_{t,0} = \sigma_t$ et $H_{t,1}$ est holonome. \square

Nous avons ainsi tout ce qu'il faut pour démontrer le théorème.

Démonstration. (Théorème de Whitney-Graustein) Tout d'abord, il est clair que l'application Ind est surjective. Montrons qu'elle est injective.

Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ tels que $N(\gamma'_0) = N(\gamma'_1)$. Il existe donc une homotopie $(\sigma_t)_{t \in [0,1]}$ joignant γ'_0 et γ'_1 . D'après le lemme 3.1.1, on sait que pour tout t , le chemin σ_t est homotope à γ'_t tel que pour tout $t \in [0, 1]$, γ'_t est holonome. On pose alors

$$\begin{aligned} \Gamma_t : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \int_0^s \gamma'_t(u) du. \end{aligned}$$

Cette application passe au quotient sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} car γ'_t est holonome et donc on a bien trouvé une homotopie joignant γ_0 et γ_1 . \square

On peut même faire mieux et démontrer la proposition suivante

Proposition 3.1.1. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et*

$$\Sigma_0 : ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), \text{Sol}(\mathcal{R})).$$

Alors il existe une homotopie relative constante au dessus de $\partial[0, 1]^k$

$$\Sigma_t : ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), \text{Sol}(\mathcal{R}))$$

telle que

$$\Sigma_1 : [0, 1]^k \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{R}).$$

Pour se faire il suffit de reprendre la démonstration du théorème de Whitney-Graustein et de remplacer " $t \in [0, 1]$ " par " $t \in [0, 1]^k$ " et les cas où $t = 0$ et $t = 1$ par " $t \in \partial[0, 1]^k$ ".

3.2 h -principe

Définition 3.2.1. Soit $X \longrightarrow M$ une fibration. Une relation différentielle \mathcal{R} est un sous-ensemble de $X^{(1)}$.

Définition 3.2.2. Une section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ est appelé *solution formelle* de \mathcal{R} . Une telle section σ est dite *holonome* s'il existe $f \in \Gamma^1(X)$ telle que $\sigma = j^1 f$. On dit alors que f est une *solution* de \mathcal{R} . On note $\text{Sol}(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de \mathcal{R} .

Exemple. (1) Un système d'équation aux dérivées partielles

$$\Phi \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right) = 0$$

avec $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, et $\Phi : J^1(U, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^q$ définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y, v_1, \dots, v_m) \in X^{(1)} \mid \Phi(x, y, v_1, \dots, v_m) = 0 \right\}.$$

Ici la fibration est le fibré trivial $X = U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ et l'espace des 1-jets est $X^{(1)} = J^1(U, \mathbb{R}^n)$. On voit que chercher une solution d'un système d'EDP revient à chercher une section holonome.

(2) Reformulons l'exemple des immersions du cercle dans le plan en terme de relation différentielle. On prend le fibré $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. $X^{(1)}$ s'identifie à

$$J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \{(x, y, L) \mid x \in \mathbb{S}^1, y \in \mathbb{R}^2, L \in \mathcal{L}(T_x \mathbb{S}^1, T_y \mathbb{R}^2)\} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Une section $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ est de la forme $\sigma(x) = (x, \gamma(x))$ avec $\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ et son 1-jet $j^1\sigma(x) = (x, \gamma(x), \gamma'(x))$. La condition d'être une immersion définit donc naturellement une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = X^{(1)}.$$

Nous avons employé le terme holonome plus tôt pour désigner un chemin fermé tel que son intégrale soit aussi un chemin fermé, cela est bien cohérent avec la définition d'être holonome en terme de section. En effet si $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ est une section holonome (i. e. il existe $f \in \Gamma^1(X)$ tel que $j^1f = \sigma$), f est de la forme $f(x) = (x, \gamma(x))$ et donc $\sigma = (x, \gamma(x), \gamma'(x))$ et l'intégrale de γ' est bien un chemin fermé.

- (3) L'exemple de l'introduction se reformule également en terme de jet. Ici les applications étaient des submersions, ce qui dans le cas de fonction à valeur réelle, revient à dire que leur différentielle est non nulle. Le fibré en question est $X = A \times \mathbb{R} \rightarrow A$, et $X^{(1)}$ s'identifie à

$$J^1(A, \mathbb{R}) = A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Être une submersion définit naturellement une relation différentielle

$$\mathcal{R} = A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Définition 3.2.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $(x, y) \in X \times Y$. On dit que $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est une équivalence d'homotopie faible si elle induit un isomorphisme entre tous les groupes d'homotopies.

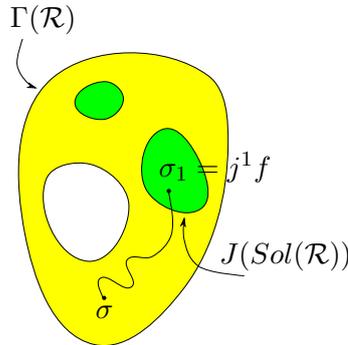


FIGURE 3 – Le h -principe

Définition 3.2.4. Soit \mathcal{R} une relation différentielle.

- (1) On dit que \mathcal{R} satisfait au h -principe si pour toute solution formelle $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie $(\sigma_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et σ_1 est holonome (i. e. $\sigma_1 \in J(\text{Sol}(\mathcal{R}))$).
- (2) On dit que \mathcal{R} satisfait au h -principe 1-paramétrique si pour toute famille de solution formelle $(\sigma_t)_{t \in [0,1]} \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = j^1f_0$ et $\sigma_1 = j^1f_1$, il existe une homotopie

$$H : [0, 1]^2 \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

telle que $H(0, t) = \sigma_t$, $H(s, 0) = \sigma_0$, $H(s, 1) = \sigma_1$ et $H(1, t) = j^1f_t$. Autrement dit, pour tout chemin de solution formelle tel que les extrémités soient holonomes, on peut toujours déformer ce chemin pour avoir un chemin holonome.

(3) On dit que \mathcal{R} satisfait au *h-principe paramétrique* si l'application

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

(4) On dit que \mathcal{R} satisfait au *h-principe local* près de $A \subset M$ si pour toute solution formelle $\sigma : \text{Op } A \longrightarrow \mathcal{R}$ il existe une homotopie $\sigma_t : \text{Op } A \longrightarrow \mathcal{R}$ telle que σ_1 est une solution de \mathcal{R} .

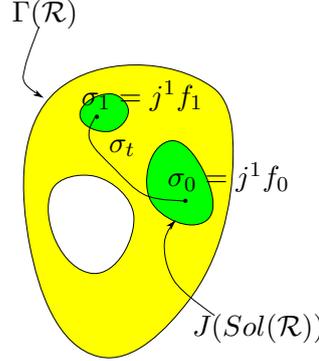


FIGURE 4 – Ici \mathcal{R} ne respecte pas le *h-principe 1-paramétrique*

Remarque. (1) Le théorème de Whitney-Graustein montre que la relation différentielle des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 satisfait au *h-principe 1-paramétrique*, et la proposition 3.1.1 montre qu'elle satisfait au *h-principe paramétrique*.

(2) Dire que \mathcal{R} satisfait au *h-principe* signifie que J induit une surjection au niveau des π_0 , tandis que dire que \mathcal{R} satisfait au *h-principe 1-paramétrique* signifie que J induit une surjection entre les π_1 et une bijection entre les π_0 .

4 Exemples de *h-principe*

Dans cette section, on donne des exemples de *h-principe* et on en déduit quelques corollaires.

4.1 Théorème de Smale et Hirsch

Théorème 4.1.1 (Smale-Hirsch [9]). *Soient M^m et N^n deux variétés. On suppose que $m < n$ ou dans le cas où $m = n$, que M est ouverte. Alors la relation différentielle \mathcal{R} des immersions satisfait au *h-principe paramétrique*.*

Corollaire 4.1 ([3]). *L'ensemble $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arc, en particulier, on peut retourner la sphère parmi les immersions.*

Démonstration. Puisque \mathcal{R} satisfait au *h-principe paramétrique*, on a

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) \simeq \pi_0(\text{Mono}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3)) \simeq \pi_2(\text{GL}_+(3, \mathbb{R})).$$

On peut justifier le dernier isomorphisme comme ceci. Soit $u \in \text{Mono}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3)$, elle induit une application dans chaque fibre :

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, u_x : x^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

L'image de u_x est le plan $u_x(x^\perp) = P_x$ muni d'une orientation induite par u_x . Soit (e_1, e_2) une base de P_x , il existe un unique vecteur v_x unitaire tel que (e_1, e_2, v_x) soit une base direct de \mathbb{R}^3 . On considère l'application $\varphi : u \mapsto U$ où $U : \mathbb{S}^2 \rightarrow \text{GL}_+(3, \mathbb{R})$ définit par $U(x) = (U_x : y \mapsto u_x(z) + \lambda v_x)$ où $y = z + \lambda x$, $z \in x^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application φ est bien bijective, donc elle induit l'isomorphisme recherché.

De plus $\text{GL}_+(3, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $SO(3) \times T_3^+$ où T_3^+ désigne les matrices triangulaires supérieures. La projection canonique $p : SO(3) \times T_3^+ \rightarrow SO(3)$ définit un rétracte par déformation (car T_3^+ est convexe donc contractile). Ainsi on a

$$\pi_2(\text{GL}_+(3, \mathbb{R})) \simeq \pi_2(SO(3)).$$

On a également un revêtement de \mathbb{S}^3 sur $SO(3)$. Finalement

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) \simeq \pi_2(\mathbb{S}^3) \simeq 0.$$

Ainsi $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arc, on peut ainsi retourner la sphère parmi les immersions. \square

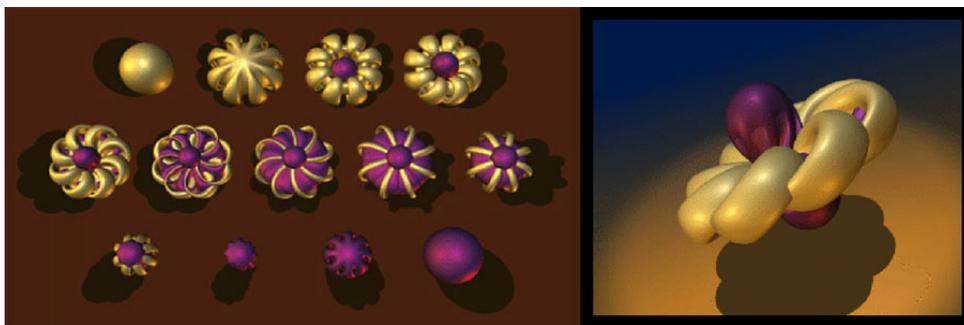


FIGURE 5 – Un retournement de la sphère [4]

Remarque 4.1.1. Il est également possible de retourner le tore parmi les immersions. En fait on peut retourner n'importe quel surface de genre g parmi les immersions.

4.2 Théorème de Nash et Kuiper

Les relations différentielles que nous avons regardé jusqu'à présent étaient toutes ouvertes, en voici une qui est fermée.

Définition 4.2.1. Soit (M^m, g) une variété riemannienne. On dit que $f : (M^m, g) \rightarrow (\mathbb{R}^q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une isométrie si $f^*\langle \cdot, \cdot \rangle = g$.

Théorème 4.2.1 (Nash-Kuiper [9]). Soit (M^m, g) une variété riemannienne et $q > m$ un entier. On définit la relation différentielle des immersions isométriques :

$$\mathcal{R}_{\text{iso}} = \{(x, y, L) \in J^1(M^m, \mathbb{R}^q) \mid L_{x,y} \in \text{Mono}_{\text{iso}}((T_x M, g_x), (\mathbb{R}^q, \langle \cdot, \cdot \rangle))\}.$$

Alors \mathcal{R}_{iso} satisfait au h -principe paramétrique.

Corollaire 4.2 ([3]). Il existe une immersion isométrique du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans \mathbb{R}^3 .

Démonstration. Puisque \mathcal{R}_{iso} satisfait au h -principe, l'application

$$J : I_{\text{iso}}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_{\text{iso}}) = \text{Mono}_{\text{iso}}(T\mathbb{T}^2, T\mathbb{R}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0 . Du fait que \mathbb{T}^2 est parallélisable (son fibré tangent est trivialisable) on a :

$$\mathcal{R}_{\text{iso}} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \text{Mono}_{\text{iso}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times V_{2,3}^{\text{o.n.}}$$

Où $V_{2,3}^{o,n} \simeq SO(3)$ est la variété de Stiefel des 2-repères orthonormés de \mathbb{R}^3 . En effet, si (v_1, v_2) est une base orthonormée globale de $T\mathbb{T}^2$, alors l'application qui à $L \in \text{Mono}_{\text{iso}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ associe $(L(v_1), L(v_2)) \in V_{2,3}^{o,n}$ permet d'identifier les 2 espaces. En particulier

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\text{iso}}) = C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$$

est non vide. Ainsi $I_{\text{iso}}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ est non vide. □



FIGURE 6 – Un plongement isométrique du tore plat [2]

Encore plus fort : l'espace $\text{Mono}(TM, TN)$ se rétracte sur $\text{Mono}_{\text{iso}}(TM, TN)$, donc tout ce qui est possible dans le monde des immersions est possible dans le monde des immersions isométriques ! Le retournement de la sphère peut ainsi être fait isométriquement, et on peut même déformer isométriquement la sphère pour la faire rentrer dans une boule de rayon arbitrairement petit.

Les deux exemples précédents sont antérieurs à l'introduction du h -principe en topologie différentielle. Voici un exemple plus récent dû à Gromov.

4.3 Existence d'une forme symplectique

Définition 4.3.1. Soit M^{2n} une variété. Une 2-forme $\alpha \in \Omega^2(M^{2n})$ est dite non dégénérée si $\forall x \in M, \alpha_x^{\wedge n} \neq 0$. Elle est dite symplectique si de plus, $d\alpha = 0$.

Soit $E = T^*M$, remarquons tout d'abord que la différentielle extérieure d est une application qui passe au quotient pour la relation des 1-jet, ainsi d est bien défini sur $E^{(1)}$. On considère la relation différentielle

$$\mathcal{R}_0 = \{\omega \in E^{(1)} \mid (d\omega)^{\wedge n} \neq 0\}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \Omega^1(M)$ est une solution de \mathcal{R}_0 (i.e. $j^1\alpha = \omega \in \mathcal{R}_0$), alors en particulier elle fournit une 2-forme $\eta = d\alpha$ qui est non dégénérée et qui vérifie $d\eta = 0$. C'est donc une forme symplectique (qui est en particulier exacte).

Théorème 4.3.1 ([5]). *Soit M^{2n} une variété ouverte. Alors la relation différentielle \mathcal{R}_0 satisfait au h -principe paramétrique.*

Corollaire 4.3 ([3]). *Soit M^{2n} une variété ouverte. Alors elle admet une forme symplectique si et seulement si elle admet une 2-forme non dégénérée.*

Démonstration. Étant donné que nous cherchons une forme symplectique, il est naturel de considérer

$$X = \{(x, \beta) \in \Lambda^2 T^*M \mid \beta \in \Lambda^2 T_x^*M, \beta^{\wedge n} \neq 0\}$$

et $\mathcal{R} = \{\eta \in X^{(1)} \mid d\eta = 0\}$. Explicitons le lien entre E et X :

Si $\alpha = \sum_{i=0}^m a_i dx_i$ est une 1-forme écrite en coordonnées, son 1-jet s'identifie aux nombres

$$j^1\alpha(x) = (x, a_1(x), \dots, a_m(x), a_{11}(x), \dots, a_{mm}(x))$$

(avec $m = 2n$ et $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$). Sa différentielle extérieure est une application linéaire sur ces nombres, on a

$$d\alpha_x = \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) dx_i \wedge dx_j.$$

Elle induit donc une application

$$\begin{aligned} d: E^{(1)} &\longrightarrow \Lambda^2 T^*M \\ \alpha &\longmapsto d\alpha \end{aligned}$$

Cette application est surjective. En fait, c'est une fibration affine, de fibre

$$d^{-1}(x, \sum_{i < j} b_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \{(x, a_i, a_{ij}) \mid a_{ij} - a_{ji} = b_{ij}\}.$$

En particulier, elle induit une suite exacte longue au niveau des π_k , et il y a équivalence d'homotopie faible entre $E^{(1)}$ et $\Lambda^2 T^*M$. De plus $\mathcal{R}_0 = d^{-1}(X)$ donc la restriction à \mathcal{R}_0 de d nous donne une équivalence d'homotopie faible entre \mathcal{R}_0 et X , et donc entre $\Gamma(\mathcal{R}_0)$ et $\Gamma(X)$. On conclut de la façon suivante. L'espace $\Gamma(X)$ est non vide si et seulement si M^{2n} admet une 2-forme non dégénérée. Puisque \mathcal{R}_0 satisfait au h -principe paramétrique, il y a une équivalence d'homotopie faible entre $\text{Sol}(\mathcal{R}_0)$ (qui nous fournit une forme symplectique) et $\Gamma(\mathcal{R}_0)$. Ainsi M^{2n} admet une forme symplectique si et seulement si elle admet une 2-forme non dégénérée. \square

Remarque. Le corollaire nous dit en particulier qu'il existe une forme symplectique exacte sur M^{2n} . C'est faux si M est compacte. En effet si ω est une forme symplectique sur M , alors $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume, en particulier sa classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(M)$ est non nulle car $[\omega^{\wedge n}] = [\omega]^{\cup n} \neq 0$, et donc $[\omega] \neq 0$ et ω n'est pas exacte. De plus, le corollaire est faux si M est compacte. En effet il existe une 2-forme non dégénérée sur \mathbb{S}^6 mais il n'y a aucune structure symplectique sur \mathbb{S}^6 car $H^2(\mathbb{S}^6) = 0$. L'existence d'une forme symplectique sur une variété compacte donnée est une question ouverte.

5 Théorèmes assurant un h -principe

On a vu dans la section précédente des exemples de relations différentielles qui respectent le h -principe. A priori, montrer qu'une relation satisfait le h -principe peut paraître très compliqué et coûteux. Il est vrai qu'en général, il est difficile de montrer qu'une relation respecte ou non le h -principe. Mais on doit quand même être un peu plus enthousiaste. Tout d'abord, on a accès à une théorie générale qui permet dans de nombreux cas d'affirmer qu'une relation différentielle satisfait au h -principe. D'autre part, le gain dépasse largement le prix payé, on obtient grâce à tout ce travail, une description homotopique de l'espace des solutions. On voit en particulier qu'une relation différentielle \mathcal{R} satisfaisant au h -principe admet une solution si et seulement si $\Gamma(\mathcal{R})$ est non vide, et la classification des solutions découle de celles des composantes de $\Gamma(\mathcal{R})$. Le problème différentiel se réduit miraculeusement à un "simple" problème homotopique ! Dans l'exemple en introduction, on a vu que la seule obstruction à pouvoir relier 2 solutions étaient le nombre de tours de l'application gradient. Pour le retournement de la sphère, on a vu qu'il n'y avait aucune obstruction car l'espace $\Gamma(\mathcal{R})$ n'a qu'une composante connexe par arc. Pour l'existence d'un plongement isométrique du tore plat, $\Gamma(\mathcal{R})$ est non vide donc automatiquement $\text{Sol}(\mathcal{R})$ est non vide, etc. On va désormais chercher à montrer que toutes ces relations respectent le h -principe au moyen de 2 théorèmes qu'on présente ici, le reste de ce document sera consacré à la démonstration de ces théorèmes et à la construction des techniques utilisées dans leurs démonstrations.

5.1 Le h -principe pour les relations $\text{Diff}(M)$ -invariante

Définition 5.1.1. Soit $X \rightarrow M$ une fibration. On considère l'action naturelle de $\text{Diff}(M)$ sur $X^{(1)}$. On dit qu'une relation différentielle \mathcal{R} est $\text{Diff}(M)$ -invariante si

$$\forall \varphi \in \text{Diff}(M), \varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

Remarque. Le terme "action naturelle" n'est pas très clair pour l'instant, nous en reparlerons ultérieurement dans la section 7.3.

Exemple (Action de $\text{Diff}(M)$ sur $J^1(M, N)$). Soit $\varphi \in \text{Diff}(M)$, alors l'action de $\text{Diff}(M)$ sur $J^1(M, N)$ est donnée par la formule :

$$\varphi_*(x, y, L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}).$$

De plus, si $f \in \Gamma(X)$, alors

$$\varphi_*(j^1 f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Remarque. La relation différentielle des immersions \mathcal{R} est $\text{Diff}(M)$ invariante, en revanche \mathcal{R}_{iso} ne l'est pas. La relation \mathcal{R}_0 est $\text{Diff}(M)$ -invariante.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.1.1 (h -principe pour les relation $\text{Diff}(M)$ -invariante [5]). *Soit M une variété ouverte, et \mathcal{R} une relation différentielle ouverte et $\text{Diff}(M)$ -invariante. Alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique.*

Remarque. Ce théorème implique le théorème de Smale-Hirsch dans le cas où $m = n$ ainsi que le théorème d'existence de forme symplectique pour les variétés ouvertes.

5.2 Le h -principe pour les relations amples

Commençons par définir ce qu'est un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ample. On notera $\text{IntConv}(A, \alpha)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α .

Définition 5.2.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que A est ample si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\text{IntConv}(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$.

Exemple. Le vide \emptyset est ample. Le complémentaire d'un sous espace vectoriel F est ample si et seulement si $\text{Codim}(F) \geq 2$.

Considérons $\mathcal{R} \subset J^1(M^m, N^n)$ une relation différentielle. Localement $J^1(M, N)$ s'identifie à

$$J^1(U, V) = U \times V \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$$

avec U et V des cartes de M et N . On notera (x, y, v_1, \dots, v_m) un élément de $J^1(U, V)$. On considère $J^1(U, V)^{\perp m} = \{(x, y, v_1, \dots, v_{m-1}) \mid x \in U, y \in V, v_i \in \mathbb{R}^n\}$ de sorte que $J^1(U, V) = J^1(U, V)^{\perp m} \times \mathbb{R}^n$. On note $p^{\perp m} : J^1(U, V) \rightarrow J^1(U, V)^{\perp m}$ la projection canonique et $\mathcal{R}_{U, V}$ l'image de \mathcal{R} par l'identification locale. Enfin si $z \in J^1(U, V)^{\perp m}$ on pose : $\mathcal{R}_z^{\perp m} = (p^{\perp})^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{U, V}$. Remarquons que $(p^{\perp})^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$, ainsi $\mathcal{R}_z^{\perp m}$ est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On peut donc définir l'amplitude pour une relation différentielle :

Définition 5.2.2. Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ une relation différentielle. On dit \mathcal{R} est ample si pour toute identification locale $J^1(U, V)$ et $\forall z \in J^1(U, V)^{\perp}$, \mathcal{R}_z est ample.

Proposition 5.2.1. *Soient M^m et N^n deux variétés. Alors la relation différentielle \mathcal{R} des immersions de M dans N est ample si $m < n$.*

Démonstration. On considère une identification locale $J^1(U, V)$. Remarquons tout d'abord que

$$(x, y, v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{R}_{U, V} \iff (v_1, \dots, v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, \dots, v_m) \in J^1(U, V)^\perp$. On peut distinguer 2 cas :

(1) (v_1, \dots, v_{m-1}) est libre.

Ainsi $v_m \in (p^\perp)^{-1}(z)$ est dans $\mathcal{R}_{U, V} \iff (v_1, \dots, v_m)$ est libre $\iff v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$. Donc $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{U, V} = \mathbb{R}^n \setminus \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ et $\text{Codim}(\text{Vect}(v_1, \dots, v_m)) = n - (m - 1) \geq 2$ donc \mathcal{R}_z est ample.

(2) (v_1, \dots, v_{m-1}) est liée.

Alors on a $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc \mathcal{R}_z est ample. \square

Théorème 5.2.1 (*h-principe pour les relations amples [5]*). *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ une relation différentielle ouverte et ample. Alors \mathcal{R} satisfait au h-principe paramétrique.*

Remarque 5.2.1. Ici on ne fait pas d'hypothèse sur M . Ce théorème implique le théorème de Smale-Hirsch dans le cas $m < n$ ainsi que le théorème de Whitney-Graustein.

Remarque. Le *h-principe* est un phénomène qui apparaît un peu partout en géométrie, que ce soit en géométrie riemannienne, en géométrie symplectique, en géométrie de contact etc... En géométrie symplectique notamment, une question qui revient souvent est le l'aspect *Rigide vs Flexible*. Et cette aspect apparaît également quand on regarde le *h-principe* en géométrie symplectique. Pour reprendre une métaphore connue, il se pourrait que les relations qui respectent le *h-principe* soient des îlots au milieu d'un océan de relation différentielle, ou au contraire, que ce soit celles qui ne le respectent pas qui constituent des îlots. La difficulté réside dans le fait que, dans un cas général, il est difficile de savoir si une relation satisfait ou non le *h-principe*, et il faut parfois développer des outils sophistiqués pour démontrer son absence. Dans ce cas on parle de rigidité, une propriété homotopique possible dans $\Gamma(\mathcal{R})$ se retrouve interdite par un argument sophistiqué. Dans le cas contraire, quand il est satisfait, la situation est dite flexible, tout ce qui n'est pas homotopiquement interdit a effectivement lieu.

6 Intégration convexe

Le but de cette section est de démontrer le théorème 5.2.1. Pour cela, on va construire une méthode puissante dû à Gromov appelée *intégration convexe*. L'ensemble de cette section est grandement inspirée de [3, 6]. Nous donnons cependant plus de détails sur la fin de la démonstration du théorème 6.1.1 pour la partie paramétrique et sur la fin de la démonstration du théorème 6.2.1 qui est n'est que esquissée dans [3] à l'aide de [6].

6.1 Intégration convexe en dimension un

L'intégration convexe repose sur le lemme suivant

Lemme 6.1.1 ([5]). *Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in \text{IntConv}(\mathcal{R}, \sigma)$. Il existe un lacet continu*

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$$

basé en σ , entourant strictement z (i.e. $z \in \text{IntConv}(\gamma(\mathbb{S}^1))$) et tel que

$$z = \int_0^1 \gamma(t) dt := \bar{\gamma}.$$

Démonstration. Du fait que $z \in \text{IntConv}(\mathcal{R}, \sigma)$, il existe un n -simplexe Δ de sommet $(y_0, \dots, y_n) \in \mathcal{R}$, tel que $z \in \text{Int}\Delta$ donc il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in]0, 1[^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k y_k = z.$$

Un lacet $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$ basé en σ et passant par les y_i entoure bien strictement z , mais rien ne nous assure que $\bar{g} = z$, pour cela on va reparamétriser g . Soient $\eta_1, \eta_2 > 0$, et (s_0, \dots, s_n) les temps tels que $g(s_k) = y_k$. Soit $f_k : I := [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que

- (1) $f_k < \eta_1$ sur $I \setminus [s_k - \eta_2, s_k + \eta_2]$
- (2) $\int_0^1 f_k(s) ds = 1$.

Posons

$$z_k = \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir η_1 et η_2 pour que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \|z_k - g(s_k)\| < \varepsilon.$$

Puisque \mathcal{R} est ouvert, et que $z \in \text{Int}\Delta$, pour ε assez petit on a

$$z \in \text{IntConv}(z_0, \dots, z_n).$$

Il existe donc $(p_0, \dots, p_n) \in]0, 1[^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1$$

et

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^n p_k z_k \\ &= \sum_{k=0}^n p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=0}^n p_k f_k(s) ds \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow I \\ t &\longmapsto \int_0^t \sum_{k=0}^n p_k f_k(s) ds \end{aligned}$$

La fonction φ est dérivable en tout t et $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$, donc c'est un difféomorphisme strictement croissant de I . D'après la formule du changement de variable on a

$$z = \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds = \int_0^1 g \circ \varphi^{-1}(t) dt.$$

Ainsi le lacet $\gamma = g \circ \varphi^{-1}$ convient. □

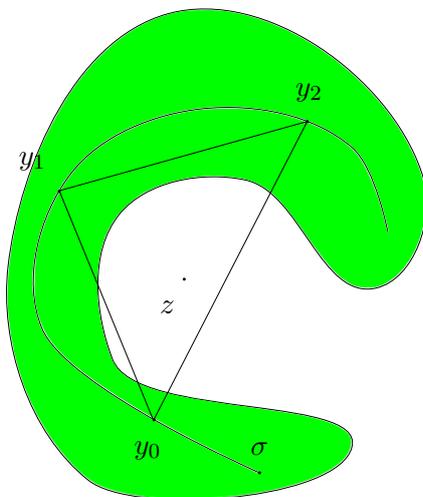


FIGURE 7 – Le lemme 6.1.1 pour $n = 2$

Remarquons que l'on peut remplacer les lacets dans le lemme par des lacets dits en *aller retour*, c'est à dire un lacet γ tel que $\gamma(t) = \gamma(1 - t)$. Ainsi γ suit un certain chemin jusqu'à $t = 1/2$ puis suit le chemin inverse.

L'idée de l'intégration convexe est d'utiliser ce lemme pour prouver des résultats de flexibilité à travers l'approximation de fonctions dont la dérivée appartient à l'enveloppe convexe d'un certain ensemble.

Notation. Si A est un sous-ensemble d'un certain espace topologique, on notera $\text{Op } A$ un voisinage ouvert de A , qui peut différer d'une ligne à l'autre.

La première étape est de muscler le lemme 6.1.1 pour en obtenir une version lisse, et à paramètre.

Proposition 6.1.1. *Soit $g : \text{Op } I^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse, et \mathcal{R} un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supposons que pour tout $x \in I^m$, $\mathcal{R}_x = \mathcal{R} \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^n)$ est connexe et que $g(x) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_x)$. Alors il existe une famille de lacets lisses $\gamma : \text{Op } I^m \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma_x(t) \in \mathcal{R}_x$ pour tout $t \in \mathbb{S}^1$ et $\overline{\gamma_x} = g(x)$ et qui entoure strictement $g(x)$.*

Soit K un fermé (donc un compact) de I^m . Si $g(x) \in \mathcal{R}_x$ pour $x \in \text{Op } K$, et que $g|_K$ s'étend en une section $\beta : I^m \rightarrow \mathcal{R}$, alors on peut de plus supposer que pour tout $x \in \text{Op } K$, γ_x est le lacet constant égal à $g(x)$.

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 6.1.2. *Sous les hypothèses de la proposition 6.1.1, soit β une section de \mathcal{R} au dessus de I^m qui étend $g|_K$. Pour toute famille de chemins en aller retour lisse γ_x basés en $\beta(x)$, définis pour $x \in \text{Op } K$, et entourant strictement $g(x)$, il existe une famille γ'_x définie pour tout $x \in I^m$, et satisfaisant $\gamma'_x = \gamma_x$ pour tout $x \in \text{Op } K$.*

Pour démontrer ce lemme, on va utiliser une propriété cruciale des chemins en aller-retour.

Lemme 6.1.3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^m , \mathcal{R} un ouvert de $U \times \mathbb{R}^n$, β une section de $\mathcal{R} \rightarrow U$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soient $\gamma^0, \gamma^1 : U \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux familles lisses de lacet en aller-retour où chaque γ_x^i est basé en $\beta(x)$ et entoure strictement $g(x)$. Alors il existe une application lisse $\gamma : I \times U \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma^t := \gamma(t, \cdot, \cdot)$ est une homotopie entre γ^0 et γ^1 , et chaque γ_x^t est un lacet basé en $\beta(x)$, à valeur dans \mathcal{R}_x et qui entoure strictement $g(x)$.

Démonstration. Un lacet γ en aller-retour à la propriété de pouvoir être contracté sur son point base, au moyen de l'homotopie

$$h_u \gamma(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} - \frac{u}{2} \text{ ou } s \geq \frac{1}{2} + \frac{u}{2} \\ \gamma(\frac{1}{2} - \frac{u}{2}) & \text{si } s \in [\frac{1}{2} - \frac{u}{2}, \frac{1}{2} + \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

Ceci ne définit pas en l'état un lacet lisse, mais on peut le reparamétriser pour obtenir un lacet lisse. La reparamétrisation ne change pas l'enveloppe convexe du lacet. Par construction, $h_u \gamma(\mathbb{S}^1) \subset \gamma(\mathbb{S}^1)$ et $h_0 \gamma = \gamma$ et $h_1 \gamma$ est constant.

Revenons à nos lacets γ^0 et γ^1 . Quitte à reparamétriser, on peut supposer que deux chemins lisses peuvent se concaténer de manière lisse. Soit $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau lisse qui vaut 0 sur $[0, 1/2]$ et qui vaut 1 en $t = 1$. On définit δ^t comme la concaténation

$$\delta^t = (h_{\rho(t)} \gamma) \# (h_{\rho(1-t)} \gamma).$$

L'enveloppe convexe de δ^t contient celle de γ^0 ou celle de γ^1 selon que t soit plus grand ou plus petit que $1/2$. Ainsi chaque δ_x^t entoure strictement $g(x)$. Pour obtenir le γ^t voulu, il suffit de reparamétriser δ^t . \square

Corollaire 6.1. Sous les hypothèses du lemme 6.1.3, si γ_x^0 et γ_x^1 sont définis pour x dans un voisinage de compacts K_0 et K_1 respectivement, basé en $\beta(x)$ et entourant strictement $g(x)$, il existe une famille γ de concaténations de chemins en aller-retour définie sur $\text{Op}(K_0 \cup K_1)$, basés en β et entourant strictement g , et telle que $\gamma = \gamma^0$ sur $\text{Op} K_0$ et $\gamma = \gamma^1$ sur $\text{Op} K_1$.

Démonstration. Pour $i = 0, 1$, soit U_i un voisinage ouvert de K_i , où γ_i est défini. Soit U'_0 un autre voisinage de K_0 telle que son adhérence \overline{U}'_0 soit compacte et contenue dans U_0 . Puisque \overline{U}'_0 et $K'_1 := K_1 \setminus (K_1 \cap U_0)$ sont des compacts disjoints de \mathbb{R}^m , il existe une fonction plateau lisse $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ qui vaut 0 sur \overline{U}'_0 et qui vaut 1 sur un voisinage de U'_1 et K'_1 .

Le lemme 6.1.3 fournit une homotopie de lacet γ^t entre γ^0 et γ^1 sur $U_0 \cap U_1$. Sur $U'_0 \cup (U_0 \cap U_1) \cup U'_1$, qui est un voisinage ouvert de $K_0 \cup K_1$, on pose

$$\gamma_x = \begin{cases} \gamma_x^0 & \text{pour } x \in U'_0 \\ \gamma_x^{\rho(x)} & \text{pour } x \in U_0 \cap U_1 \\ \gamma_x^1 & \text{pour } x \in U'_1 \end{cases}$$

qui a les propriétés désirées. \square

Démonstration (lemme 6.1.2). Commençons par deux observations. Tout d'abord, le lemme 6.1.1 nous assure que pour tout x , il existe un lacet en aller-retour γ basé en $\beta(x)$ et qui entoure strictement $g(x)$. La deuxième observation est que l'application $s \mapsto \beta(x') + (\gamma(s) - \beta(x))$ est un lacet en aller-retour basé en $\beta(x')$ et qui entoure $g(x')$ pour tout $x' \in \text{Op} x$ car \mathcal{R} est ouvert et $g(x) \in \text{IntConv}(\gamma(\mathbb{S}^1))$.

Revenons à la démonstration du lemme. Soit U_0 un ouvert qui contient K et qui est contenu dans $\text{IntConv}(\gamma(\mathbb{S}^1))$. Soit U'_0 un voisinage ouvert de K dont l'adhérence est contenue dans U_0 . Enfin, soit $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$ un recouvrement de $I^m \setminus U'_0$ par des ouverts qui n'intersectent pas K , on obtient des familles de chemins γ^i sur chaque U_i par les observations ci-dessus. On pose également $\gamma^0 = \gamma|_{U_0}$. En particulier les U_i , $i \geq 0$ couvrent tout I^m et seulement U_0 intersecte K . Soit $(K_i)_{0 \leq i \leq N}$ une famille de compacts telle que pour tout i , $K_i \subset U_i$ et qui recouvrent I^m .

En appliquant successivement le corollaire 6.1 à K_i et K_{i+1} , on obtient une famille γ' de lacets définie sur tout I^m . Puisque chaque étape préserve la famille sur $\text{Op } K_i$, et que seulement U_0 intersecte K , on a bien $\gamma' = \gamma$ sur $\text{Op } K$. \square

Il reste un dernier ingrédient à apporter pour prouver la proposition 6.1.1.

Lemme 6.1.4. *Soient E, X des variétés, $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel, $\gamma : X \times \mathbb{S}^1 \rightarrow E$ une famille de lacets (chaque γ_x est dans la fibre E_x), et soit g une section de E . Si γ_x entoure strictement $g(x)$ quand x est en dehors d'un certain compact de X , alors il existe une famille de difféomorphismes du cercle $h : X \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $\overline{\gamma_x \circ h_x} = g(x)$.*

Démonstration. On se place dans une carte cubique I^m de X . Pour tout $x \in I^m$, puisque γ_x entoure strictement $g(x)$, il existe des points $s_0, \dots, s_n \in \mathbb{S}^1$ tels que $g(x)$ est dans l'intérieur d'un n -simplexe engendré par les points $\gamma_x(s_j)$. Soient μ_0, \dots, μ_n des mesures de probabilités lisses proches de la mesure de Dirac en s_j (i.e. $\mu_j = f_j ds$ pour f_j une certaine fonction positive lisse et ds la mesure de Lebesgue, et pour toute fonction h , $\int_{\mathbb{S}^1} h d\mu_j$ est presque $h(s_j)$). On pose $p_j = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_x d\mu_j$, qqui est presque $\gamma_x(s_j)$, de sorte que $g(x) = \sum_{k=0}^n w_j p_j$ avec $w_j \in]0, 1[$.

Si x' est dans un voisinage U assez petit de x , $g(x')$ est dans l'intérieur du n -simplexe engendré par les $p_j(x') := \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_{x'} d\mu_j$. On a donc, dans U , des fonctions lisses w_j telles que $g(x') = \sum_{k=0}^n w_j(x') p_j(x')$. Par compacité de I^m , on extrait un recouvrement fini par de tels ouverts $(U^i)_{1 \leq i \leq N}$, avec les mesures μ_j^i , et les fonctions p_j^i, w_j^i correspondants. Soit $(\rho_i)_{1 \leq i \leq N}$ une partition de l'unité subordonnée aux ouverts U^i . Pour tout $x \in I^m$, on pose

$$\mu_x = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n \rho_i(x) w_j^i(x) \mu_j^i$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_x d\mu_x &= \sum_{i=1}^N \rho_i(x) \sum_{j=0}^n w_j^i(x) \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_x d\mu_j^i \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_i(x) \sum_{j=0}^n w_j^i p_j^i(x) \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_i(x) g(x) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

On pose finalement $h_x^{-1}(t) = \int_0^t d\mu_x$, et on a bien $g(x) = \overline{\gamma_x \circ h_x}$ pour tout x . \square

On peut enfin démontrer la proposition 6.1.1.

Démonstration (Proposition 6.1.1). Soit $\beta : I^m \rightarrow \mathcal{R}$ telle que $\beta|_{\text{Op } K} = g$. Soit γ^* un lacet en aller-retour qui entoure strictement l'origine dans \mathbb{R}^n . Pour x dans un voisinage ouvert U^* de K où $g = \beta$, on pose $\gamma_x = g(x) + \varepsilon \gamma^*$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'image de γ_x et son enveloppe convexe soient contenues dans \mathcal{R}_x (\mathcal{R} est ouvert et K est compact). Le lemme 6.1.2 étend cette famille en une famille qui entoure strictement $g(x)$ pour tout $x \in I^m$. Le lemme 6.1.4 donne une famille de difféomorphismes du cercle h_x telle que $\overline{\gamma_x \circ h_x} = g(x)$. Enfin, soit ρ une fonction plateau lisse qui vaut 0 sur $\text{Op } K$ et qui vaut 1 sur $\text{Op } I^m \setminus U^*$. Dans U^* , on remplace $\gamma_x \circ h_x = g(x) + \varepsilon \gamma^* \circ h_x$ par $g(x) + \varepsilon \rho(x) \gamma^* \circ h_x$. Cette opération ne modifie pas la moyenne de nos lacets, mais elle les rend constants sur $\text{Op } K$, de plus ces lacets restent dans \mathcal{R} grâce à notre choix de ε . \square

Définition 6.1.1. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que

$$f_0'(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R}).$$

Par la proposition 6.1.1, il existe une famille de lacets en aller-retour lisses $\gamma : I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$ telle que pour tout $t \in I$,

$$f'_0(t) = \int_0^1 \gamma(t, u) du.$$

On pose alors

$$F(t) = f_0(0) + \int_0^t \gamma(s, Ns) ds$$

pour $N \in \mathbb{N}^*$, et on dit que F est obtenue par *intégration convexe*.

Une première propriété cruciale de l'intégration convexe est que F peut être rendue arbitrairement proche de f_0

Remarque 6.1.1. F vérifie $F'(t) = \gamma(t, Nt) \in \mathcal{R}$, on a donc approximé f'_0 qui n'est pas à valeur dans \mathcal{R} mais dans $\text{IntConv}(\mathcal{R})$, par une fonction à valeur dans \mathcal{R} .

Proposition 6.1.2. *On a*

$$\|F - f_0\|_{C^0} < \frac{1}{N} \left(2\|\gamma\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{C^0} \right)$$

où $\|g\|_{C^0} = \sup_{x \in I} \|g(x)\|$ désigne la norme C^0 .

Démonstration. Fixons $t \in I$, $n = \lfloor Nt \rfloor$, $I_j = [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$, pour $0 \leq j \leq n-1$, $I_n = [\frac{n}{N}, t]$ et posons

$$S_j := \int_{I_j} \gamma(u, Nu) ds = \int_{I_j} \int_0^1 \gamma\left(\frac{u+j}{N}, u\right) dudx$$

et

$$s_j := \int_{I_j} f'_0(t) dt = \int_{I_j} \int_0^1 \gamma(x, u) dudx$$

de sorte que

$$F(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n S_j$$

et

$$f_0(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n s_j.$$

On obtient alors pour $0 \leq j \leq n-1$

$$\|S_j - s_j\| \leq \frac{1}{N^2} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{C^0}$$

et

$$\|S_n - s_n\| \leq \frac{2}{N} \|\gamma\|_{C^0}$$

et finalement

$$\|F(t) - f_0(t)\| \leq \frac{1}{N} \left(2\|\gamma\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{C^0} \right)$$

□

Remarquons que si on choisit f_0 telle que $f_0(0) = f_0(1)$, il n'y a pas de raison pour que $F(0) = F(1)$. Ceci peut être corrigé en modifiant un petit peu l'intégration convexe, on pose alors pour tout $t \in I$,

$$f(t) = F(t) - t(F(1) - F(0)) = f_0(0) + \int_0^t \gamma(s, Ns) ds - t \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds.$$

Proposition 6.1.3. *On a de même*

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \left(2\|\gamma\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{C^0} \right)$$

et $f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}$.

Démonstration. Du fait que $F(1) - F(0) = F(1) - f_0(0) = F(1) - f_0(1)$, on déduit que

$$\|f(t) - f_0(t)\| \leq \|F(t) - f_0(t)\| + \|F(1) - f_0(1)\| \leq 2\|F - f_0\|.$$

De plus, en dérivant f on obtient $f'(t) = F'(t) - (F(1) - F(0))$ et donc

$$\|f' - F'\|_{C^0} \leq \|F' - f_0'\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

comme \mathcal{R} est ouvert, pour N assez grand on a bien $f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}$. \square

Définition 6.1.2. On rappelle qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est ample si pour tout $a \in A$, $\text{IntConv}(A, a) = \mathbb{R}^n$. Soit $\pi : E = P \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ un fibré trivial, une partie $\mathcal{R} \subset E$ est dite ample si pour tout $p \in P$, $\mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R}$ est ample dans \mathbb{R}^n .

Remarquons que si $\mathcal{R} \subset E$ est ample, alors la condition $f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R})$ est toujours vérifiée.

On s'intéresse ici au h -principe en dimension 1. Soit X une variété compacte et connexe de dimension 1, on sait alors que X est isomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} ou I . On peut alors montrer que

Proposition 6.1.4. *Soit $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un fibré trivial et $\mathcal{R} \subset E$ un ouvert ample. Alors pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

- (1) $f' \in \Gamma(\mathcal{R})$,
- (2) f' est homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$.

Cet énoncé fait évidemment penser à un énoncé de h -principe, seulement \mathcal{R} n'est pas ici une relation différentielle. On peut néanmoins donner un sens à l'énoncé " \mathcal{R} satisfait au h -principe".

Prenons le fibré trivial $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'espace des 1-jet $X^{(1)}$ s'identifie à $J^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Ainsi, si on prend une relation différentielle $\mathcal{R}' = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{R} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, étant donné que le 1-jet d'une section $s \in \Gamma^1(X)$ s'identifie à $(x, f(x), f'(x))$, on peut facilement se convaincre que les deux situations sont identiques. Ainsi les éléments de $\text{Sol}(\mathcal{R})$ sont les f telles que $f' \in \Gamma(\mathcal{R})$. Ainsi la proposition 6.1.4 est bien un énoncé de h -principe. On peut pousser plus loin et obtenir le théorème

Théorème 6.1.1. *Soit $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un fibré trivial et $\mathcal{R} \subset E$ une relation différentielle ouverte et ample. Alors l'application*

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible, i.e \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique.

Démonstration. La première étape est de montrer que \mathcal{R} satisfait au h -principe, puis on pourra passer à la version paramétrique.

Soit $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, $(\sigma(t) = (t, s(t)))$ avec $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$, on identifiera dans la suite s et σ) et $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$. Puisque \mathcal{R} est ample, on a automatiquement que

$$f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_t, \sigma(t))$$

pour tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour N un entier assez grand, on obtient f par intégration convexe. Par la proposition 6.1.1, il existe $\gamma : I \times \mathbb{S}^1$ une famille de lacets lisses en aller-retour telle que

$$f(t) = f_0(0) + \int_0^t \gamma(s, Ns) ds - t \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds$$

et on a bien $f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}$, f est une solution de \mathcal{R} .

On veut montrer maintenant que f est homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$. Pour cela, considérons l'application

$$\begin{aligned} f_u : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto f_0(0) + \int_0^t h_u \gamma(s, Ns) ds - ut \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds \end{aligned}$$

où $h_u \gamma$ est l'homotopie de rétraction en un point vu dans le lemme 6.1.3. L'application f_u ne passe pas au quotient dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , mais sa dérivée passe bien au quotient, en effet

$$f'_u(0) = h_u \gamma(0, 0) - u \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds = \sigma(0) - u \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds$$

et

$$f'_u(1) = h_u \gamma(1, N) - \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds = \sigma(1) - \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds.$$

Étant donné que $\sigma(0) = \sigma(1)$ on a bien $f'_u(0) = f'_u(1)$, et f'_u relie σ et f' . Il reste à vérifier que $f'_u \in \Gamma(\mathcal{R})$. Puisque

$$\left\| \int_0^1 \gamma(s, Ns) ds \right\| = \|F(1) - f_0(1)\| = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

et que \mathcal{R} est ouverte, on a bien que pour N assez grand, $f'_u \in \Gamma(\mathcal{R})$. Ceci montre que \mathcal{R} satisfait au h -principe.

Pour passer au h -principe paramétrique, il faut ajouter un paramètre $\lambda \in [0, 1]^n$ à nos fonctions. On considère une famille de sections σ_λ telle que si $\lambda \in \partial[0, 1]^n$, alors σ_λ est holonome (c'est à dire qu'il existe $f_\lambda \in \text{Sol}(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_\lambda = f'_\lambda$), et une famille de fonctions f_λ^0 . Tout ce qui est fait plus haut est valide si on remplace σ par σ_λ et f par

$$f_\lambda(t) := f_\lambda^0(0) + \int_0^t \gamma_\lambda(s, Ns) ds - t \int_0^1 \gamma_\lambda(s, Ns) ds$$

et f'_u par

$$f'_{(u,\lambda)} = h_u \gamma_\lambda(t, Nt) - u \int_0^1 \gamma_\lambda(s, Ns) ds.$$

En effet on a bien $f'_{(0,\lambda)}(t) = \sigma_\lambda(t)$ et $f'_{(1,\lambda)} = f'_\lambda \in \Gamma(\mathcal{R})$. Il reste à vérifier que l'homotopie $f'_{(u,\lambda)}$ constante au-dessus de $\text{Sol}(\mathcal{R})$. On va utiliser la proposition 6.1.1 qui nous dit que au-dessus du compact $\partial[0, 1]^n$, les lacets γ_λ sont constants et égaux aux $f_\lambda^{0'}$. Ainsi on a pour $\lambda \in \partial[0, 1]^n$, et pour $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f'_{(u,\lambda)}(t) &= h_u \gamma_\lambda(t, Nt) - u \int_0^1 \gamma_\lambda(s, Ns) ds \\ &= f_\lambda^{0'}(t) - u \int_0^1 f_\lambda^{0'}(s) ds \\ &= f_\lambda^{0'}(t) - u(f_\lambda^0(1) - f_\lambda^0(0)) \\ &= f_\lambda^{0'}(t) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de u et qui est bien une solution de \mathcal{R} car γ_λ est à valeur dans \mathcal{R} . Ceci montre que \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique. \square

Remarque 6.1.2. (1) Bien sûr, on peut remplacer \mathbb{R}/\mathbb{Z} par un intervalle.

(2) Une conséquence directe de ce théorème est le théorème de Whitney-Graustein.

6.2 Intégration convexe en dimension supérieure

On va généraliser l'intégration convexe aux dimensions supérieures. On pourra ainsi montrer le théorème de h -principe pour les relations amples.

Définition 6.2.1. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arc, et $f_0 : I^m \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n$ telle que $\frac{\partial f_0}{\partial c_m}(I^m) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$. Par la proposition 6.1.1, il existe $\gamma : I^m \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$ telle que pour tout $c \in I^m$

$$\frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) = \int_0^1 \gamma(c, u) du$$

et on pose pour $c = (c_1, \dots, c_m)$

$$f(c) := f_0(c_1, \dots, c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} \gamma(c_1, \dots, c_{m-1}, s, Ns) ds$$

et on dit que f est obtenue par intégration convexe sur la m -ième variable.

Proposition 6.2.1. Soit $E = I^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow I^m$ un fibré vectoriel, $\mathcal{R} \subset E$ un ouvert, une section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $f_0 : I^m \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $c \in I^m$

$$\frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_c, \sigma(c)).$$

Alors la fonction f obtenue par intégration convexe sur la m -ième variable vérifie

- (1) $\frac{\partial f}{\partial c_m}(c) \in \mathcal{R}_c$ pour tout $c \in I^m$
- (2) $\frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c)$ est homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$
- (3) $\|f - f_0\|_{C^{1,\hat{m}}} = O(\frac{1}{N})$.

où $\|f\|_{C^{1,\hat{m}}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, \dots, \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0})$ est la norme C^1 sans le terme sur la m -ième variable.

Démonstration. Le premier point est évident, pour le deuxième point on peut utiliser l'homotopie $h_u \gamma(c, Nc_m)$. Pour le troisième point, des manipulations semblables à la proposition 6.1.2 donnent le résultat. \square

On a démontré un h -principe pour un cas particulier sur des variétés compactes de dimension 1, ce résultat se généralise aux dimensions supérieures pour n'importe quelle variété. On va démontrer le théorème de h -principe pour les relations amples vu en section 5.2.

Théorème 6.2.1 (h -principe pour les relations amples [5]). Soient M^m et N^n des variétés, et soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ une relation différentielle ouverte et ample. Alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique.

Remarque 6.2.1. La proposition 6.2.1 correspond alors à la version non paramétrique du théorème 6.2.1.

Démonstration. On va démontrer que \mathcal{R} satisfait au h -principe. On travaille d'abord sur une carte cubique I^m de M et un ouvert $V \simeq \mathbb{R}^n$ de N . Une section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n})$ a l'expression

$$\sigma(c) = (c, f_0(c), v_1(c), \dots, v_m(c)) \in \mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}.$$

En reprenant les notations de la section 5.2, on pose $\sigma^{\perp m} = p^{\perp m} \circ \sigma$, et $E = (\sigma^{\perp m})^* J^1(I^m, \mathbb{R}^n) = I^m \times \mathbb{R}^n$ le fibré tiré en arrière par $\sigma^{\perp m}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & J^1(I^m, \mathbb{R}^n) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^{\perp m} \\ I^m & \xrightarrow{\sigma^{\perp m}} & J^1(I^m, \mathbb{R}^n)^{\perp m} \end{array}$$

Soit $\mathcal{S}^m \subset E$ le tiré en arrière de $\mathcal{R}^{\perp m}$. La relation \mathcal{S}^m est aussi ouverte et ample, notons que l'application $v_m : I^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fournit une section de \mathcal{S}^m au dessus de I^m . Il existe une famille de lacets lisses en aller-retour $\gamma : I^m \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^m$ qui sont basés en $v_m(c)$ et telles que

$$\frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) = \int_0^1 \gamma(c, s) ds.$$

Soit F_1 l'application obtenue par intégration convexe de f_0 sur la m -ième variable. Par définition de \mathcal{S}^m , la section

$$c \mapsto \left(c, f_0(c), v_1(c), \dots, v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c) \right)$$

est à valeur dans $\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}$. Puisque que $\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}$ est ouvert est que F_1 est C^0 -proche de f_0 , on peut supposer (quitte à augmenter N) que

$$c \mapsto \left(c, F_1(c), v_1(c), \dots, v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c) \right)$$

est une section de $\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}$. De plus, σ est bien homotope à cette section. On répète ensuite le processus pour obtenir que

$$c \mapsto \left(c, F_1(c), v_1(c), \dots, v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right)$$

est une section de $\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}$. En utilisant le fait que F_2 et F_1 sont $C^{1, \widehat{m-1}}$ -proche, on peut supposer que

$$c \mapsto \left(c, F_2(c), v_1(c), \dots, v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_m}(c) \right)$$

est une section de $\mathcal{R}_{I^m, \mathbb{R}^n}$ et σ est bien homotope à cette section. On recommence jusqu'à obtenir une section holonome

$$c \mapsto \left(c, F(c), \frac{\partial F}{\partial c_1}(c), \dots, \frac{\partial F}{\partial c_m}(c) \right)$$

avec $F := F_m$, qui est bien homotope à σ .

On souhaite maintenant obtenir une solution définie sur tout M . Pour cela on fait une décomposition cubique de M et on applique ce qui précède sur chaque cube, le problème étant maintenant de recoller les solutions. Soient C est un cube, $K \subset C$ un compact et f_0 une solution sur un $\text{Op } K$. On cherche à construire f sur C qui étende f_0 . On doit alors modifier légèrement chaque intégration convexe F_1, \dots, F_m .

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, soient $\rho_i : C \rightarrow [0, 1]$ des fonctions plateaux lisses telles que $\rho_i(c) = 0$ si $c \in C \setminus \text{Op } K$ et $\rho_i(c) = 1$ si $c \in \text{Op}_1 K \subset \text{Op } K$. On pose alors

$$f_i := F_i + \rho_i(f_0 - F_i).$$

Soit $j \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_j} = \frac{\partial F_i}{\partial c_j} + \rho_i \left(\frac{\partial f_0}{\partial c_j} - \frac{\partial F_i}{\partial c_j} \right) + \frac{\partial \rho_i}{\partial c_j} (f_0 - F_i).$$

Puisque ρ_i est à support compact, le terme $\frac{\partial \rho_i}{\partial c_j}$ est borné pour tout j . De plus, F_i et f_0 étant $C^{1, \widehat{m-i+1}}$ -proche,

$$\|f_i - F_i\|_{C^{1, \widehat{m-i+1}}} = O\left(\frac{1}{N_i}\right)$$

où N_i est l'entier intervenant dans l'intégration convexe F_i . Le problème est que en général, il n'y a pas de raison pour que la différence

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial c_{m-i+1}} - \frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}} \right\|$$

soit petite, et c'est le terme qui est important car on veut que la section

$$c \mapsto \left(c, \frac{\partial f_i}{\partial c_{m-i+1}}(c) \right)$$

soit une solution de \mathcal{S}^m . On peut néanmoins s'en sortir, puisque \mathcal{S}^m est ouvert, et que $c \mapsto (c, \frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}}(c))$ est une solution de \mathcal{S}^m , il suffit que $\frac{\partial f_i}{\partial c_{m-i+1}}$ et $\frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}}$ soient C^0 -proches pour conclure. De plus la petitesse de

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial c_{m-i+1}} - \frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}} \right\|$$

repose sur celle de

$$\left\| \frac{\partial f_0}{\partial c_{m-i+1}} - \frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}} \right\|.$$

On va utiliser la proposition 6.1.1, qui nous assure que sur $\text{Op } K$, on peut choisir γ tel que pour tout $c \in \text{Op } K$,

$$\gamma(c, s) = \frac{\partial f_0}{\partial c_{m-i+1}}(c).$$

On obtient ainsi que $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial c_{m-i+1}} - \frac{\partial F_i}{\partial c_{m-i+1}} \right\|$ est petit. On construit ainsi par récurrence sur la décomposition cubique une solution définie sur tout M . Ceci montre que \mathcal{R} satisfait au h -principe. On passe sans problème au h -principe paramétrique en ajoutant un paramètre $\lambda \in [0, 1]^k$ et en faisant de même que pour le h -principe paramétrique en dimension 1. \square

7 L'approximation holonome

On va énoncer le théorème d'approximation holonome d'Eliashberg et Mishachev, qui dit que dans un certain sens, il y a de manière surprenante, beaucoup de sections holonomes autour de n'importe quel polyèdre $A \subset M$ avec une codimension strictement positive. Nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat, on peut trouver des démonstration dans [1, 7].

7.1 Le théorème d'approximation holonome

On pourrait d'abord se demander si on peut approcher n'importe quelle section par une section holonome. Soit $F_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$F_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1, 0, 0).$$

Il n'existe pas de section holonome qui approche F_0 . En effet si $F = j^1 f$ est une telle section, alors $f(x_1, x_2) \approx x_1$ et le théorème de Rolle implique qu'il existe des points p tels que $\partial_{x_1} f(p) \approx 1$ qui n'est pas proche de 0. Ainsi une telle section n'existe pas.

On va revoir nos exigences à la baisse. On aimerait approcher F_0 non pas sur tout \mathbb{R}^2 mais sur un voisinage d'une sous-variété A de codimension 1. Cela fonctionne avec $A = \{x_0\} \times \mathbb{R}$ mais pas $A = \mathbb{R} \times \{x_0\}$, dans le dernier l'obstruction est la même : le théorème de Rolle. La remarque fondamentale de Eliashberg et de Mishachev est qu'on peut quand même trouver une approximation holonome, non pas sur un voisinage de A mais sur un voisinage de B où B est une déformation isotopique de A .

Définition 7.1.1. Une difféotopie $h^\tau : M \rightarrow M$ est dite δ -petite si $h^0 = \text{Id}$ et si

$$\forall p \in M, \forall \tau \in [0, 1], d(h^\tau(p), p) < \delta$$

où d est une distance riemannienne sur M .

Définition 7.1.2. Soit M une variété, on dit que $A \subset M$ est un polyèdre de M si A est un sous-complexe d'une triangulation de M . Si M est ouverte, on dit c'est un *coeur* de M si pour un voisinage arbitrairement petit U de A , il existe une isotopie $\varphi_t : M \rightarrow M$ qui fixe A qui envoie M dans U .

Théorème 7.1.1 (Approximation holonome [7]). *Soit $A \subset M$ un polyèdre de codimension plus grande que 1 et $F_0 : \text{Op } A \rightarrow X^{(1)}$ une section. Alors pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il existe une difféotopie $h^\tau : M \rightarrow M$, δ -petite et une section holonome $F : \text{Op } h^1(A) \rightarrow X^{(1)}$ telle que pour tout $p \in \text{Op } h^1(A)$,*

$$d(F(p), F_0(p)) < \varepsilon.$$

7.2 Relation différentielle $\text{Diff}(M)$ -invariante

Soit $p : X \rightarrow M$ une fibration. On va noter $\text{Diff}_M X$ le groupe des difféomorphismes qui préservent les fibres $h_X : X \rightarrow X$, i.e $h_X \in \text{Diff}_M X$ si et seulement si il existe un difféomorphisme $h_M : M \rightarrow M$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_X} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{h_M} & M \end{array}$$

commute. Soit $\pi : \text{Diff}_M X \rightarrow \text{Diff } M$ la projection $h_X \mapsto h_M$. On s'intéresse au cas où il est possible d'inverser cette flèche.

Définition 7.2.1. On dit qu'une fibration $p : X \rightarrow M$ est *naturelle* s'il existe un morphisme $\Sigma : \text{Diff } M \rightarrow \text{Diff}_M X$ tel que $\pi \circ \Sigma = \text{Id}$.

Exemple. (1) Le fibré trivial $M \times N \rightarrow M$ est naturel, le morphisme Σ est donné par $\Sigma(h_M) = h_M \times \text{Id}$.

(2) Le fibré tangent $TM \rightarrow M$ est naturel, l'application Σ est donné par la différentielle $df : TM \rightarrow TM$ d'un difféomorphisme $f : M \rightarrow M$.

Un cas important est que si $X \rightarrow M$ est naturel, alors $X^{(1)} \rightarrow M$ est aussi naturel, le morphisme Σ est donné par $\Sigma^1(h) = h_*$ où h_* est donné par la formule

$$h_*(s) = j^1(\Sigma(h) \circ \bar{s})(h(v))$$

où $s \in X^{(1)}$, $v = p^1(s) \in M$, et \bar{s} est une section locale proche de v qui représente le 1-jet s . Notons que $(h^{-1})_* = (h_*)^{-1}$, on pose $h^* = h_*^{-1}$.

Définition 7.2.2. Une relation différentielle \mathcal{R} est $\text{Diff}(M)$ -invariante, si l'action $s \mapsto h_* s$ laisse \mathcal{R} invariante.

Remarque 7.2.1. (1) Notons que la définition précédente dépend du choix du morphisme Σ , ce choix est évident dans la plupart des exemples habituels.

(2) L'action $s \mapsto h_* s$ préserve les sections holonomes

$$h_*(j^1 f) = j^1 (\Sigma(h) \circ f \circ h^{-1}),$$

avec $f \in \Gamma(\mathcal{R})$, $h \in \text{Diff}(M)$. En particulier, le groupe $\text{Diff}(M)$ agit sur l'espace $\text{Sol}(\mathcal{R})$ pour une relation $\text{Diff}(M)$ -invariante.

7.3 Le h -principe pour les relations $\text{Diff}(M)$ -invariantes

On va voir que le théorème d'approximation holonome permet pour certaines relations différentielles, de montrer un h -principe local. On pourra alors montrer que ces relations satisfont au h -principe pour des variétés ouvertes.

Théorème 7.3.1 ([5]). *Soit $X \rightarrow M$ une fibration naturelle et $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$ une relation différentielle ouverte et $\text{Diff}(M)$ -invariante. Alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique local près de tout polyèdre A de codimension strictement positive.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \Gamma_{\text{Op } A}(\mathcal{R})$. Par le théorème d'approximation holonome, il existe une difféotopie $h^\tau : M \rightarrow M$ δ -petite et une section $F \in \text{Sol}_{\text{Op } A}(\mathcal{R})$ telle que $j^1 f$ est C^0 -proche de σ sur $\text{Op } h^1(A)$. On peut alors supposer que F est linéairement homotope à $\sigma|_{\text{Op } h^1(A)}$ dans \mathcal{R} par F^t . La section holonome $G \in \text{Sol}_{\text{Op } A}(\mathcal{R})$ que l'on cherche est définie par la formule $G = (h^1)^* F$. L'homotopie recherchée sur \mathcal{R} qui relie σ et G sur un voisinage de A consiste en 2 étapes, d'abord $(h^\tau)^* \sigma$, $\tau \in [0, 1]$, puis $(h^1)^* F^t$, $t \in [0, 1]$. On passe sans problème au h -principe paramétrique en rajoutant un paramètre. \square

Pour une variété M ouverte, on peut utiliser le fait qu'on peut compresser M sur un voisinage d'un polyèdre A , afin d'y appliquer le théorème précédent, puis on peut étendre le h -principe à tout M en la décompressant.

Théorème 7.3.2 ([5]). *Soit M une variété ouverte et $X \rightarrow M$ une fibration naturelle. Soit \mathcal{R} une relation différentielle ouverte et $\text{Diff}(M)$ -invariante. Alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique.*

Démonstration. Soit $F \in \Gamma(\mathcal{R})$ une solution formelle. Soit $A \subset M$ un coeur de M . Le h -principe local près de A implique l'existence d'une section $G_A \in \text{Sol}_{\text{Op } A}(\mathcal{R})$ qui est homotope à $F|_{\text{Op } A}$ dans $\text{Sol}_{\text{Op } A}(\mathcal{R})$. Soit $g^\tau : M \rightarrow M$ une isotopie qui comprime M dans un voisinage U de A tel que G_A est défini sur U . La solution G recherchée est défini par la formule $G = (g^1)^* G_A$. L'homotopie recherchée qui relie F et G consiste en deux étapes. D'abord $(g^\tau)^* F$, puis $(g^1)^* G_A^t$, où G_A^t est une homotopie qui relie $F|_{\text{Op } A}$ et G_A dans \mathcal{R} . \square

8 Applications en géométrie symplectique

On va présenter quelques applications du h -principe en géométrie symplectique.

8.1 Structure symplectique

Définition 8.1.1. (1) Soit M une variété de dimension $2n$. Une structure symplectique sur M est une 2-forme ω non dégénérée et fermée, on dit que (M, ω) est une variété symplectique et que ω est une forme symplectique. On note \mathbb{S}_{symp} l'espace des structures symplectiques sur M , et $\mathbb{S}_{\text{symp}}^a$ l'espace des structures symplectiques sur M avec pour classe de cohomologie $a \in H^2(M, \mathbb{R})$

- (2) Une structure *quasi symplectique* sur M est une structure symplectique sur son fibré tangent TM . De manière équivalente une structure quasi symplectique sur M est une 2-forme non dégénérée ω sur M . On note $\mathcal{S}_{\text{symp}}$ l'espace des structures quasi symplectiques sur M .

L'existence d'une structure quasi symplectique sur M est une condition nécessaire à l'existence d'une structure symplectique sur M . L'existence d'une homotopie dans $\mathcal{S}_{\text{symp}}$ qui relie 2 forme symplectique ω_0 et ω_1 est une condition nécessaire à l'existence d'une homotopie symplectique entre ω_0 et ω_1 . Ainsi, l'étude homotopique de la classification des structures symplectiques

sur une variété M se réduit à l'étude des propriétés homotopiques des inclusions $\mathbb{S}_{\text{symp}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\text{symp}}$ et $\mathbb{S}_{\text{symp}}^a \hookrightarrow \mathcal{S}_{\text{symp}}$.

Primitive formelle d'une forme différentielle.

La différentielle extérieure $d : \Gamma(\Lambda^{p-1}T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^p T^*M)$ peut être écrite comme la composition

$$\Gamma(\Lambda^{p-1}T^*M) \xrightarrow{J} \Gamma\left((\Lambda^{p-1}T^*M)^{(1)}\right) \xrightarrow{\tilde{D}} \Gamma(\Lambda^p T^*M)$$

où \tilde{D} est induit par le morphisme de fibré

$$(\Lambda^{p-1}T^*M)^{(1)} \xrightarrow{D} \Lambda^p T^*M$$

appelé le *symbole* de l'opérateur d . L'application D est une fibration affine. En particulier toute forme différentielle $\omega : M \longrightarrow \Lambda^p T^*M$ induit une section (qui est canonique à homotopie près) $F_\omega : M \longrightarrow (\Lambda^p T^*M)^{(1)}$ telle que $D \circ F_\omega = \omega$. On dira que F_ω est une *primitive formelle* de ω . Ainsi toute p -forme est formellement exacte. On peut alors montrer le lemme

Lemme 8.1.1. *Soit $A \subset M$ un polyèdre de codimension plus grande que 1 et ω une p -forme. Alors il existe une difféotopie arbitrairement C^0 -petite $h^\tau : M \longrightarrow M$ telle que ω peut être approchée près de $B = h^1(A)$ par une p -forme exacte $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$.*

Démonstration. Soit F_ω une primitive formelle de ω telle que $p^1 \circ F_\omega = \alpha$. Par le théorème d'approximation holonome il existe une difféotopie h^τ et une section $j^1\tilde{\alpha}$ au dessus de $B = h^1(A)$. En étendant $\tilde{\alpha}$ à tout M on obtient que $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$ est la forme exacte recherchée. \square

Soit $a \in H^p(M)$ et ω une p -forme sur M . En prenant une forme exacte $\Omega \in a$ et en appliquant le lemme précédent sur $\eta = \omega - \Omega$ et en choisissant $\tilde{\omega} = \tilde{\eta} + \Omega$, on peut montrer le lemme suivant

Lemme 8.1.2. *Pour les hypothèses du lemme 8.1.1. Soit $a \in H^p(M)$. Alors il existe une difféotopie h^τ arbitrairement petite telle que ω peut être C^0 -approximée près de $B = h^1(A)$ par une p -forme fermée $\tilde{\omega} \in a$.*

Dans la suite, M désigne une variété ouverte. Soit $\mathcal{R} \subset \Lambda^p T^*M$ une $a \in H^p(M)$, on note $\text{Clo}_a \mathcal{R}$ la sous-partie de $\Gamma(\mathcal{R})$ formée par les p -formes fermées $\omega : M \longrightarrow \mathcal{R}$ dans la classe de cohomologie a .

Proposition 8.1.1. *Soit $\mathcal{R} \subset \Lambda^p T^*M$ un ouvert $\text{Diff}(M)$ -invariant. Alors l'inclusion*

$$\text{Clo}_a \mathcal{R} \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $A \subset M$ un polyèdre de codimension plus grande que 1. Par le lemme 8.1.2 il existe une difféotopie h^τ et une p -forme fermée $\tilde{\omega} \in a$ qui est C^0 -proche de ω au dessus d'un voisinage U de $B = h^1(A)$. Ainsi au dessus de U , l'homotopie rectiligne ω_t qui relie ω et $\tilde{\omega}$ est incluse dans \mathcal{R} . Soit $g_t : V \longrightarrow V$ une difféotopie qui compresse M dans U . Alors $\bar{\omega} = (g_1^{-1})^*\tilde{\omega}$ est une section de \mathcal{R} et $\bar{\omega} \in a$. En appliquant consécutivement les homotopies $(g_t^{-1})^*\omega$ et $(g_1^{-1})^*\omega_t$ on obtient l'homotopie recherchée entre ω et $\bar{\omega}$ dans \mathcal{R} . \square

Soit M^{2n} une variété et $\mathcal{R}_{\text{symp}} \subset \Lambda^{2n} T^*M$ définit dans chaque fibre par la condition $\beta^{\wedge n} \neq 0$. Alors $\text{Clo}_a \mathcal{R}_{\text{symp}} = \mathbb{S}_{\text{symp}}^a$ et $\Gamma(\mathcal{R}_{\text{symp}}) = \mathcal{S}_{\text{symp}}$. L'ensemble $\mathcal{R}_{\text{symp}}$ est ouvert est $\text{Diff}(M)$ -invariant. On peut alors appliquer la proposition précédente et obtenir

Théorème 8.1.1 ([5]). *Soit M une variété ouverte, alors l'inclusion*

$$\mathbb{S}_{\text{symp}}^a \hookrightarrow \mathcal{S}_{\text{symp}}$$

est une équivalence d'homotopie.

8.2 Immersion lagrangienne

On va maintenant s'intéresser aux immersions lagrangiennes

Définition 8.2.1. Soit (N^{2n}, ω) une variété symplectique, une immersion $f : M^n \rightarrow N^{2n}$ est dite lagrangienne si $f^*\omega = 0$.

Il se trouve que les immersions lagrangiennes respectent le h -principe

Théorème 8.2.1 ([5]). *La relation différentielle des immersions lagrangiennes satisfait au h -principe paramétrique.*

Remarque 8.2.1. La relation différentielle des immersions lagrangiennes n'est pas ouverte, on ne peut donc pas appliquer le théorème sur les relations $\text{Diff}(M)$ -invariante. En revanche on peut essayer de se ramener au cas ouvert grâce à des arguments de *microflexibilité*.

Application : les immersions lagrangiennes du tore \mathbb{T}^n dans \mathbb{C}^n

Soit (e_1, \dots, e_n) un champ de bases sur \mathbb{T}^n et $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une application lisse. Son 1-jet s'identifie à

$$j^1 f(x) = (x, f(x), df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^n.$$

L'application f est lagrangienne si et seulement, pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, la famille $(df_x(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre et si pour tout $1 \leq i, j \leq n$

$$\omega(df_x(e_i), df_x(e_j)) = 0.$$

Autrement dit si

$$\dim \text{Vect}(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) = n$$

et

$$J\text{Vect}(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) = \text{Vect}(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n))^\perp$$

avec $\omega := \langle \cdot, J \cdot \rangle$. Soit W la sous variété de $(\mathbb{R}^{2n})^n$ définie par

$$W = \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^{2n})^n \mid \dim V = n, JV = V^\perp\}$$

où $V = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. La relation différentielle des immersions lagrangiennes est donc

$$\mathcal{R} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times W.$$

On sait que \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique, ainsi la flèche

$$\text{Sol}(\mathcal{R}) = I_{\text{Lag}}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^n) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie. Puisque cette flèche est l'identité sur le premier facteur et que \mathbb{C}^n se rétracte en un point, les espaces $\Gamma(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times W)$ et $C^0(\mathbb{T}^n, W)$ sont homotopiquement équivalents. De même W se rétracte sur

$$W_0 = \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^{2n})^n \mid (v_1, \dots, v_n) \text{ est orthonormée et } JV = V^\perp\}.$$

En fixant une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{C}^n , on peut identifier W à $U(n)$. Ainsi $I_{\text{Lag}}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^n)$ est homotopiquement équivalent à $C^0(\mathbb{T}^n, U(n))$ et la classification homotopique des immersions lagrangiennes est réduite au problème purement topologique de la classification des applications continues du tore dans $U(n)$.

Références

- [1] Vincent BORRELLI. *le h-principe ?* 2009. URL : http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Enseignement/MA2-h-principe/hprincipe_smf.pdf.
- [2] Vincent BORRELLI. *Gnash, un tore plat!* 2012. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html>.
- [3] Vincent BORRELLI. *Introduction au h-principe*. 2012. URL : <http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Enseignement/MA2-h-principe/>.
- [4] Étienne GHYS. *Les images comme symboles mathématiques*. 2009. URL : http://images.math.cnrs.fr/Les-images-comme-symboles-mathematiques?id_forum=8799.
- [5] M. GROMOV. *Partial Differential Relations*. Springer-Verlag, 1986.
- [6] Patrick MASSOT. *Introduction au h-principe de Gromov*. URL : <https://www.math.u-psud.fr/~pmassot/enseignement/h-principe/poly.pdf>.
- [7] Y. Eliashberg et N. MISHACHEV. *Introduction to the h-Principle*. American Mathematical Society, 2002.
- [8] John NASH. “ C^1 isometric embeddings”. In : *Annals of Mathematics* 60.3 (1954), p. 383-396.
- [9] Stephen SMALE. “The Classification of Immersions of Spheres in Euclidean Spaces”. In : *Annals of Mathematics* 69.2 (1959), p. 327-344.
- [10] Hassler WHITNEY. “On regular closed curves in the plane”. In : *Compositio Mathematica* 4 (1937), p. 276-284.