

Géométrie différentielle I

Cours de M2

Vincent Humilière¹

Septembre-Octobre 2026²

1. vincent.humiliere@imj-prg.fr, <https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.humiliere/>

2. Dernière révision : 11 septembre 2026

Table des matières

1	Formes différentielles et cohomologie de De Rham	2
I	Rappels rapides sur les variétés différentielles et les fibrés vectoriels	2
I.1	Cartes, atlas, variétés	2
I.2	Applications lisses entre variétés	4
I.3	Espace tangent, application tangente	4
I.4	Fibrés vectoriels	6
I.5	Sous-variétés, plongements	8
I.6	Constructions de variétés	10
I.7	Partitions de l'unité	12
II	Formes différentielles	13
II.1	Formes alternées et produits extérieurs	13
II.2	Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	15
II.3	Formes différentielles sur une variété	16
II.4	Différentielle extérieure	17
III	Intégration des formes différentielles, formule de Stokes	20
III.1	Orientation des variétés	20
III.2	Intégration des formes différentielles	21
III.3	Formule de Stokes	25
III.4	Invariance par homotopie	28
III.5	La suite exacte de Mayer-Vietoris	31
III.6	Quelques calculs	33
2	Transversalité	37
I	Notion de transversalité	37
II	Le lemme de Sard et conséquences	37
III	Les théorèmes de transversalité	43
IV	Quelques applications sympa	43
3	Théorie de Morse	44
I	Fonctions de Morse	44
II	Bases de la théorie de Morse	44
III	L'homologie de Morse	44
4	Courants de De Rham, isomorphisme Morse - De Rham	45
	Bibliographie	45

Chapitre 1

Formes différentielles et cohomologie de De Rham

Les trois premières parties de ce chapitre sont essentiellement des rappels de M1, qui sont présentés ici sans démonstration. On peut se référer au cours de M1 de géométrie différentielle [1] pour plus de détails. Ce cours de M2 commence donc véritablement avec la section IV sur la cohomologie de De Rham.

I Rappels rapides sur les variétés différentielles et les fibrés vectoriels

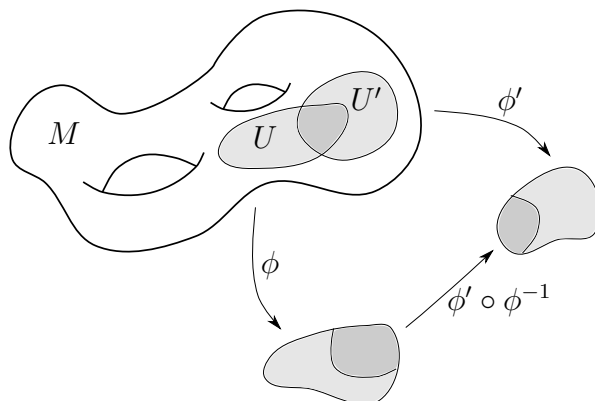
I.1 Cartes, atlas, variétés

Fixons un espace topologique M et un entier $n \geq 0$. Le mot *lisse* signifiera toujours *de classe C^∞* . Le mot *difféomorphisme* sous-entendra *difféomorphisme lisse*.

Définition 1.1 (Cartes, Atlas). Une carte de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un couple (U, ϕ) où U est un ouvert de M et ϕ est un homéomorphisme entre U et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. L'ouvert U s'appelle le domaine de la carte. Si $x \in U$ et $\phi(x) = 0$, on parle de carte en x .

Deux cartes (U, ϕ) et (U', ϕ') sont dites compatibles si l'application $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$ (que l'on appelle changement de carte) est un difféomorphisme.

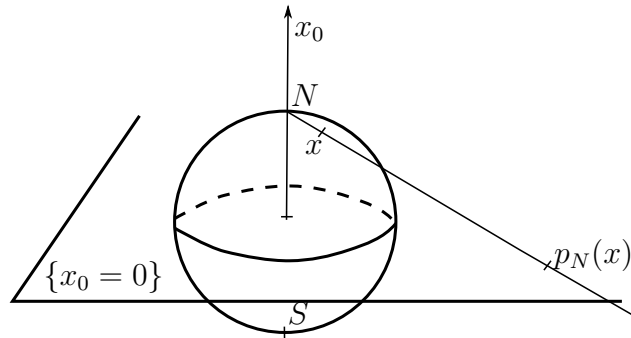
Un atlas est un ensemble de cartes deux à deux compatibles et dont les domaines recouvrent M . Deux atlas sont compatibles si leurs cartes sont deux à deux compatibles.



Exemple 1.2. (Projections stéréographiques de la sphère) On note $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ la sphère euclidienne standard de $\mathbb{R}^{n+1}$. On note $N = (1, 0, \dots, 0)$ son pôle nord et $S = (-1, 0, \dots, 0)$ son pôle sud.

La *projection stéréographique* par rapport à N est l'application p_N qui à un point $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ associe le point d'intersection de la droite passant par N et x avec l'hyperplan équatorial $x_0 = 0$.

On définit de même la projection stéréographique par rapport à S comme l'application p_S qui à un point $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ associe le point d'intersection de la droite passant par S et x avec l'hyperplan équatorial $x_0 = 0$.



Les projections stéréographiques prennent leurs valeurs dans l'hyperplan $\{(0, x_1, \dots, x_n)\}$ que l'on identifiera tout simplement à $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$. On obtient ainsi des homéomorphismes $p_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $p_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui forment un atlas de $\mathbb{S}^n$. Voir [1] pour les détails.

◀

Définition 1.3 (Variété différentielle). *Une variété différentielle (ou différentiable) de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable¹, muni d'une classe d'équivalence d'atlas de cartes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

L'espace $\mathbb{R}^n$ admet une structure canonique de variété donnée par la carte identité. Comme on l'a vu, $\mathbb{S}^n$ admet aussi une structure de variété donnée par les projections stéréographiques.

REMARQUE 1.4 (VARIÉTÉS COMME RECOLLEMENTS DE CARTES). On peut retrouver la variété à partir des images de ses cartes et des applications de changement de carte. En effet, si l'on se donne une famille d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tous $i, j \in I$, un difféomorphisme $\varphi_{ij} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$, où $V_{ij} \subset V_i$ et $V_{ji} \subset V_j$ sont des ouverts vérifiant $V_{ii} = V_i$, satisfaisant la *relation de cocycle*, i.e.

$$\varphi_{ii} = \text{Id}_{V_i}, \quad \varphi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}, \quad \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik} \text{ sur } V_{ij} \cap V_{ik},$$

on peut considérer l'espace quotient de la réunion disjointe $\bigsqcup_i V_i$ obtenu en identifiant chaque point $x \in V_{ij}$ avec son image $\varphi_{ij}(x)$. Si le quotient obtenu est séparé, et si I est fini ou dénombrable, il est naturellement muni d'une structure de variété différentiable dont les cartes sont les inverses des applications induites par les injections naturelles $V_i \hookrightarrow \bigsqcup_i V_i$.

Naturellement, si les V_i sont les images $\phi_i(U_i)$ des cartes (U_i, ϕ_i) d'un atlas d'une variété M , si $V_{ij} = \phi_i(U_i \cap U_j)$ et si les $\varphi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont les changements de cartes correspondants, alors cette construction redonne M (au sens où la variété obtenue est difféomorphe à M , ce qui ne sera défini que ci-dessous!).

◀

1. Une base d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X , et tout $x \in \mathcal{O}$, il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in U_i \subset \mathcal{O}$. Par exemple, les boules ouvertes de rayon rationnel forment une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Applications lisses entre variétés

Le principe général suivant s'applique :

Principe 1.5. *Toutes les propriétés **locales** du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ peuvent être transférées aux variétés différentiables au moyen des cartes.*

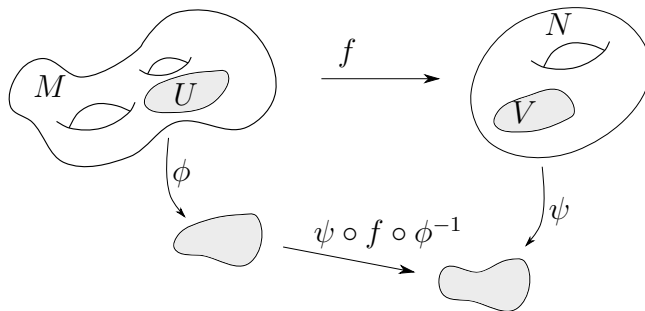
Illustrons ce principe sur la notion de lissité qui est bien sûr locale.

Définition 1.6 (Application lisse entre variétés). *Soient M, N deux variétés et $f : M \rightarrow N$ une application. On dira que f est lisse si pour tout point x de M , il existe des cartes (U, ϕ) de M en x et (V, ψ) de N en $f(x)$, telles que l'application*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

est lisse (cette application est parfois appelée « f lue dans les cartes (U, ϕ) , (V, ψ) »).

Les cartes de nos variétés étant deux à deux compatibles, on peut remplacer “il existe des cartes” dans la définition ci-dessus par “pour toutes cartes”.



Exercice 1. *Vérifier qu'une application lisse entre variétés est continue et que la composition d'applications lisses est lisse.*

Définition 1.7 (Difféomorphismes). *Un difféomorphisme entre deux variétés est une application entre ces variétés, lisse, bijective et dont la réciproque est lisse.*

L'exercice suivant est une remarque bien utile :

Exercice 2. *Vérifier qu'une carte (U, ϕ) d'une variété différentiable est un difféomorphisme entre U et $\phi(U)$.*

Pour définir la différentielle d'une application lisse en un point, il nous faut introduire l'espace tangent.

I.3 Espace tangent, application tangente

Il y a plusieurs manières de définir l'espace tangent d'une variété. On peut par exemple le définir comme une classe d'équivalence de germes de chemins lisses (voir [1] pour cette approche détaillée). Nous allons ici utiliser la méthode des atlas abstraits dans l'esprit de la remarque 1.4.

On considère un atlas dont les cartes ont pour image des ouverts V_i de $\mathbb{R}^n$ et les changements de cartes sont notés ϕ_{ij} . On note $TV_i = V_i \times \mathbb{R}^n$ auquel on pense comme un ensemble de couples

(y, v) où y est un point de V_i et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ “attaché” en y . Alors les applications $\Phi_{ij} : (y, v) \mapsto (\phi_{ij}(y), d\phi_{ij}(y) \cdot v)$ vérifient la condition de cocycle et l’on a donc un espace topologique quotient associé TM donné par la remarque 1.4. On peut vérifier que cet espace est séparé et à base dénombrable et celui-ci porte donc une structure de variété différentiable.

On a de plus une projection naturelle $p : TM \rightarrow M$ qui, lue dans les cartes, devient $V_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$. On choisit souvent de noter (x, v) les éléments $v \in TM$ tels que $p(v) = x$.

Définition 1.8 (Espace tangent). *Pour $x \in M$, l’espace $p^{-1}(x)$ est noté $T_x M$ et est appelé l’espace tangent à M en x .*

L’espace tangent s’identifie via une carte à $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ et hérite donc de la structure d’espace vectoriel de celui-ci. Comme la différentielle des changements de cartes $d\phi_{ij}(y)$ est linéaire, cette structure d’espace vectoriel ne dépend pas du choix de la carte (et est donc bien définie sur le quotient).

Soit c un chemin lisse défini sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, à valeurs dans M et vérifiant $c(0) = x$. Comme c est lisse, le chemin $\phi \circ c$ est lisse pour toute carte $\phi : U \rightarrow V$ en x . Le vecteur vitesse de c en 0 est par définition le vecteur de $T_x M$ qui correspond à $(0, (\phi \circ c)'(0)) \in V \times \mathbb{R}^n$. Ceci permet de voir alternativement $T_x M$ comme l’ensemble de tous les vecteurs vitesses de chemins lisses sur M passant par x en 0.

Définition 1.9 (Application tangente). *Si $f : M \rightarrow N$ est une application lisse entre variétés, alors la différentielle de f en x est l’application df_x qui à un vecteur v qui est le vecteur vitesse d’un chemin c associe le vecteur vitesse du chemin $f \circ c$; autrement dit il s’agit de l’application $T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ vérifiant $df_x(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$ pour tout chemin c .*

L’application tangente de f est l’application $Tf : TM \rightarrow TN$ qui à un point (x, v) de TM associe le point $(f(x), df_x(v))$ de TN .

Étant données des cartes $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ en x et $\psi : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^p$ en $f(x)$, l’application Tf correspond à l’application

$$(y, v) \mapsto (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(y), d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_y \cdot v).$$

On en déduit que df_x est linéaire pour les structures d’espaces vectoriels de $T_x M$ et $T_{f(x)} N$ que l’on a définies.

REMARQUE 1.10 (CARTES DE TM). Avec ces notations, pour toute carte ϕ de M d’image V , l’application tangente $T\phi$ donne une carte de TM d’image $V \times \mathbb{R}^n$. De plus les cartes de cette forme constituent un atlas de TM . ◀

Exercice 3. 1. Vérifier que la différentielle d’une application constante est nulle.

2. Vérifier que l’on a la formule de composition $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$.

3. Vérifier que $d(f + g)_x = df_x + dg_x$ et $d(fg)_x = f(x)dg_x + g(x)df_x$.

Terminons ce paragraphe par un peu de vocabulaire supplémentaire.

Définition 1.11. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Alors

1. f est une immersion en x si et seulement si df_x est injective,
2. f est une submersion en x si et seulement si df_x est surjective,
3. le rang de f en x est égal au rang de df_x .

I.4 Fibrés vectoriels

Nous allons rappeler ici brièvement la notion de fibré vectoriel. L'idée n'est pas du tout de faire une théorie générale des fibrés, qui sera traitée dans d'autres cours. On fixe un entier $k \geq 0$.

Définition 1.12 (Fibré vectoriel lisse). *Un fibré vectoriel (réel, lisse) de rang k est la donnée d'une application lisse $p : E \rightarrow B$ entre variétés et, pour tout $b \in B$, d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur $p^{-1}(b)$, de sorte que tout point $b \in B$ admette un voisinage ouvert $U \subset B$ et une application*

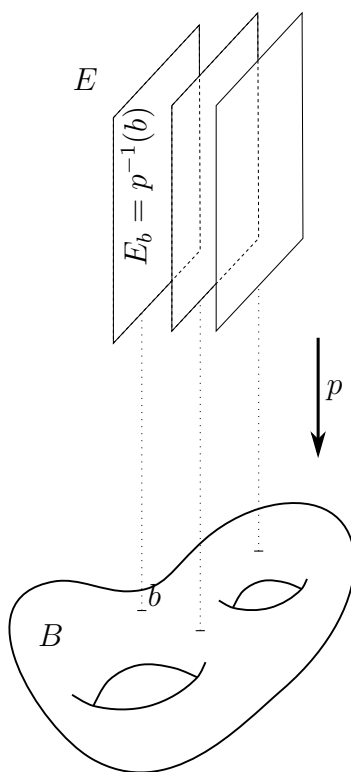
$$\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

tels que

(i) le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ p \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 : (u, \xi) \mapsto u \\ & U & \end{array}$$

(ii) pour tout $b' \in U$, la restriction de Φ à $p^{-1}(b')$ est un isomorphisme linéaire entre $p^{-1}(b')$ et $\{b'\} \times \mathbb{R}^k$.



Vocabulaire.

- B est appelée *base* du fibré vectoriel,
- E est appelé *espace total* du fibré,

- p est appelée *projection* du fibré,
- $E_b = p^{-1}(b)$ est appelée *fibre* au-dessus de b ,
- Φ est appelée *trivialisat*ion au-dessus de U . S'il existe une trivialisation au-dessus de B tout entier, on dit que le fibré est *trivialisable*.
- Si $k = 1$, on parle de *fibré en droites*.
- Par abus de langage, on désigne parfois le fibré seulement par E ou par p . Les structures d'espaces vectoriels sur les fibres sont presque toujours sous-entendues.
- Un point $\xi \in E$ tel que $p(\xi) = b$ est parfois noté (b, ξ) .

Exemples 1.13. (i) Le fibré *trivial* de rang k au-dessus de B est par définition

$$p : B \times \mathbb{R}^k \rightarrow B, (b, \xi) \mapsto b.$$

Ses fibres sont les $E_b = \{b\} \times \mathbb{R}^k$. L'identité est une trivialisation au-dessus de B . Le fibré trivial est donc trivialisable!

- (ii) L'espace TM muni de la projection canonique $p : TM \rightarrow M$ et des structures d'espace vectoriel sur chaque espace tangent $T_x M$ est un fibré vectoriel. En effet, pour toute carte ϕ de M , l'application qui à un vecteur v tangent en x associe $(x, d\phi_x(v))$ donne une trivialisation locale de TM .
- (iii) Le *fibré tautologique* de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$) est le fibré de rang 1 dont l'espace total est $\{(d, v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in d\}$. Autrement dit, la fibre en un point d de l'espace projectif est la droite d elle-même. Cf. [1, section 3.II].
- (iv) Le *fibré normal* à une sous-variété $M \subset N$ est le fibré au-dessus de M dont la fibre en x est le quotient $T_x N / T_x M$. Nous en reparlerons plus tard.

◀

Étant données deux trivialisations $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$, l'application

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$$

prend la forme $(x, \xi) \mapsto (x, g_{ij}(x)(\xi))$ où les $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$ sont appelées *fonctions de transition*.

Les fonctions de transition vérifient une condition de cocycle $g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = \text{Id}$ pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de B et d'applications lisses $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$ vérifiant la relation de cocycle permet de construire un fibré vectoriel sur B dont les g_{ij} sont les fonctions de transition. L'espace total est alors donné par $E = \bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^k) / \sim$ où $\sim$ est la relation qui identifie (x, v) avec $(x, g_{ij}(x)(v))$, pour tout $x \in U_i \cap U_j$.

Un fibré est donc caractérisé par ses fonctions de transition, ce qui est très utile lorsque l'on cherche à classer les fibrés à isomorphisme près.

Définition 1.14 (sections). Une section d'un fibré vectoriel $p : E \rightarrow B$ est une application lisse $s : B \rightarrow E$ telle que pour tout $x \in B$, $s(x) \in E_x$ (autrement dit, $p \circ s = \text{Id}_B$).

L'application qui à $x \in B$ associe le vecteur nul de E_x est appelée *section nulle du fibré*.

On note souvent $\Gamma(B, E)$ l'ensemble des sections de $p : E \rightarrow B$.

La section nulle s_0 est bien une application lisse car pour toute trivialisation $\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, on a $\Phi \circ s_0(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in U$.

- Exemples 1.15.** (i) Si $E = B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ est un fibré trivial, alors les sections sont les applications de la forme $B \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, f(x))$, où $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lisse.
- (ii) Les sections du fibré tangent TM sont appelées *champs de vecteurs* sur M . Ce sont donc les applications lisses $X : M \rightarrow TM$ vérifiant $X(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$, que l'on note volontiers $x \mapsto (x, X(x))$.

◀

Définition 1.16 (Repère d'un fibré). *Un repère de $p : E \rightarrow B$ est une famille $(s_i)_{i=1,\dots,k}$ de sections telles que pour tout $b \in B$, la famille $(s_1(b), \dots, s_k(b))$ soit une base de la fibre E_b .*

Proposition 1.17. *Un fibré est trivialisable s'il admet un repère, et seulement dans ce cas.*

Démonstration. Supposons le fibré trivialisable, au moyen d'une trivialisation Φ . Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathbb{R}^k$. Alors, les formules

$$s_i(b) = \Phi^{-1}(b, e_i), \quad \forall b \in B$$

définissent un repère de sections $s_1, \dots, s_k$. En effet, pour chaque b , $\Phi^{-1}(b, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_b$ est un isomorphisme donc envoie base sur base.

Réciproquement, si l'on dispose d'un repère $s_1, \dots, s_k$, alors on construit une trivialisation en posant

$$\Phi(b, \xi) = \left(b, \begin{array}{l} \text{coordonnées de } \xi \text{ dans} \\ \text{la base } (s_i(b))_{i=1,\dots,k} \end{array} \right).$$

□

La proposition qui précède est particulièrement utile dans le cas des fibrés en droites. On se convainc ainsi que :

- Exemples 1.18.** (i) Le fibré tangent à $\mathbb{S}^1$ est trivialisable. Le fibré tangent de $\mathbb{T}^n$ aussi.
- (ii) Le fibré tautologique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ n'est pas trivialisable.

◀

I.5 Sous-variétés, plongements

Une sous-variété de dimension k d'une variété de dimension n est une partie qui "ressemble" localement à un sous-espace $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$. Plus précisément :

Définition 1.19 (Sous-variété). *Soient N une variété de dimension n et $k \in \{0, \dots, n\}$. Une partie M de N est une sous-variété de dimension k de N si tout point de M est dans le domaine d'une carte (U, ϕ) de N telle que $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.*

Munie de la topologie induite, une sous-variété est séparée, à base dénombrable et de plus, les couples $(U \cap M, \phi|_{U \cap M})$ où (U, ϕ) est une carte comme dans la définition ci-dessus forment un atlas de M . Ceci montre que M hérite d'une structure de variété induite par celle de N . Pour cette structure, l'injection canonique $i : M \rightarrow N$, $x \mapsto x$ est lisse et est une immersion. C'est de plus l'unique structure lisse sur M pour laquelle une application $f : P \rightarrow M$ est lisse si et seulement si $i \circ f : P \rightarrow N$ est lisse (voir [1, Proposition 2.26]).

Comme i est une immersion, la différentielle $di_x : T_x M \rightarrow T_x N$ est injective en tout point et permet d'identifier $T_x M$ à un sous-espace de $T_x N$. On peut alors former le quotient de l'un par l'autre.

Définition 1.20 (Fibré normal). Soit M une sous-variété d'une variété N . Le fibré normal de M dans N est le fibré vectoriel au-dessus de M , noté νM , dont la fibre en x est le quotient $\nu_x M = T_x N / T_x M$. Son rang est $\dim N - \dim M$.

Explicitons des trivialisations. Soient $k = \dim M$, $n = \dim N$ et $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la projection sur les $n - k$ dernières coordonnées. Si (U, ψ) est une carte de N adaptée à M comme dans la définition ci-dessus, alors pour tout $y \in U \cap M$ l'isomorphisme $d\psi_y : T_y N \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoie $T_y M$ sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}$; il induit donc un isomorphisme

$$\nu_y M = T_y N / T_y M \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \quad [v] \longmapsto \pi(d\psi_y v),$$

qui donne une trivialisation au-dessus de $U \cap M$.

Contrairement au fibré tangent, le fibré normal n'est pas canoniquement un sous-fibré de la restriction de TN à M : il le devient dès que l'on choisit une métrique riemannienne sur N , qui permet d'identifier $\nu_x M$ à l'orthogonal de $T_x M$ dans $T_x N$. C'est la définition par quotient qui est canonique.

On peut aussi donner un sens à la notion de plongement d'une variété dans une autre.

Définition 1.21 (Plongement). Une application $f : M \rightarrow N$ lisse est un plongement si et seulement si c'est une immersion et un homéomorphisme sur son image $M \xrightarrow{f} f(M)$.

Pour montrer qu'une application est un plongement, on utilise souvent le fait qu'une immersion injective propre² est un plongement. En particulier, si M est compacte, une immersion injective $M \rightarrow N$ est automatiquement un plongement.

Exercice 4. Montrer que pour tout $k \leq n$, l'application

$$\mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x_0, \dots, x_k) \mapsto (x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

est un plongement.

Les sous-variétés apparaissent souvent comme image de plongements (cf [1]).

Proposition 1.22. Soit $f : M \rightarrow N$ un plongement d'une variété dans une autre. Alors $f(M)$ est une sous-variété de N et $f : M \rightarrow f(M)$ est un difféomorphisme.

Dans le cadre ci-dessus, l'application f est appelée un *paramétrage* de la sous-variété $f(M)$. On peut montrer qu'une sous-variété de dimension k admet en tout point un paramétrage local depuis un ouvert de $\mathbb{R}^k$.

Les sous-variétés apparaissent aussi souvent comme image réciproque d'un point (cf [1]).

Proposition 1.23. Soient M et N deux variétés, $f : M \rightarrow N$ une application lisse et $a \in f(M)$. Si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(a)$ (c'est-à-dire si a est une valeur régulière de f), alors $f^{-1}(a)$ est une sous-variété de M , de dimension $\dim M - \dim N$. De plus, $T_x f^{-1}(a)$ s'identifie à $\ker df_x$.

Le théorème de Sard, que nous verrons plus tard, affirme que presque tout point $a \in N$ est une valeur régulière. On en déduit donc que la préimage de presque tout point par une fonction lisse est une sous-variété.

2. Une application est propre si l'image réciproque de tout compact est compacte. Intuitivement, une telle application "envoie l'infini sur l'infini".

I.6 Constructions de variétés

Somme disjointe. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur *somme disjointe* est l'espace $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i$, que l'on note $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ muni de la topologie dont les ouverts sont les parties de la forme $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times U_i$, où chaque U_i est un ouvert de X_i . En particulier, chaque partie de la forme $\{j\} \times X_j$ pour $j \in I$ fixé, est un ouvert de $\bigsqcup_{i \in I} X_i$. En pratique, cette partie est identifiée à X_j .

Si chaque X_i est une variété et si I est fini ou dénombrable de même dimension n , alors $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ admet une structure de variété différentiable de dimension n . En effet, $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ est séparé et à base dénombrable. De plus, si l'on se donne un atlas $\mathcal{A}_i$ pour chacun des X_i , alors $\mathcal{A} = \{(\{i\} \times U, \phi) \mid i \in I, (U, \phi) \in \mathcal{A}_i\}$ forme un atlas de $\bigsqcup_{i \in I} X_i$.

Pour tout $j \in I$, l'application naturelle $X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ est un plongement. De plus, soit $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow M$ une application. Alors f est lisse si et seulement si pour tout $i \in I$, $f|_{X_i}$ est lisse.

Produits de variétés. Soient M, M' deux variétés. Alors l'espace $M \times M'$ muni de la topologie produit (c'est-à-dire la topologie engendrée par les produits d'ouverts) est séparé et à base dénombrable. De plus, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des atlas de M et M' respectivement, alors $M \times M'$ peut être muni de l'atlas

$$\{(U \times U', \phi \times \phi') \mid (U, \phi) \in \mathcal{A}, (U', \phi') \in \mathcal{A}'\}$$

où $\phi \times \phi'$ désigne l'application $(x, y) \mapsto (\phi(x), \phi'(y))$.

Les projections canoniques $p_1 : M \times M' \rightarrow M$ et $p_2 : M \times M' \rightarrow M'$ sont lisses. De plus, une application $f : P \rightarrow M \times M'$ est lisse si et seulement si ses composantes $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ le sont.

On peut bien sûr faire des produits de plus de deux variétés. L'exemple suivant est important.

Exemple 1.24. On appelle *tore* de dimension n le produit de n copies du cercle $\mathbb{S}^1$.

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

C'est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$. ◀

Quotients de variétés par l'action libre et propre d'un groupe discret. Soit G un groupe agissant sur un ensemble M . L'action est *libre* si pour tout $g \neq 1_G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ n'a pas de point fixe.

De plus, si M est un espace topologique localement compact (i.e., tout point admet un voisinage compact), l'action de G sur M est *propre* si pour tous compacts K, K' de M , l'ensemble $\{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K' \neq \emptyset\}$ est fini.

Théorème 1.25 (Quotient d'une variété par une action libre et propre). *Soit M une variété et G un groupe discret agissant librement et proprement par difféomorphismes sur M . Alors l'espace topologique quotient M/G admet une unique structure de variété telle que la projection canonique $p : M \rightarrow M/G$ soit un difféomorphisme local.*³

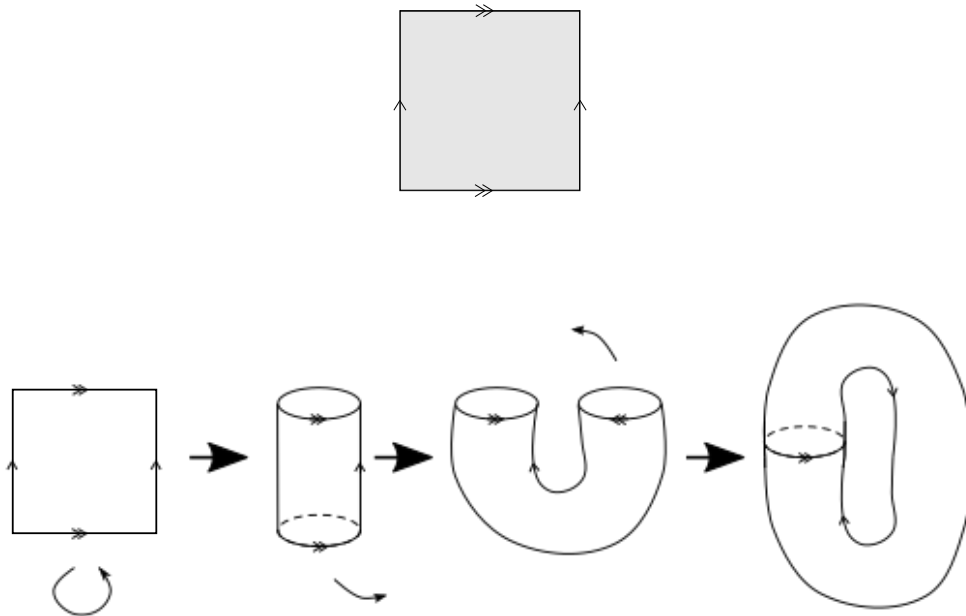
3. Un difféomorphisme local est une application lisse $f : M \rightarrow N$ telle que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans M et un voisinage V de $f(x)$ dans N telle que f établisse un difféomorphisme entre U et V .

De plus, pour cette structure, pour toute variété Y et toute application $f : M/G \rightarrow Y$, l'application f est lisse si et seulement si $f \circ p$ est lisse.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \circ p \quad} & Y \\ \downarrow p & \nearrow f & \\ M/G & & \end{array}$$

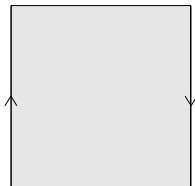
Nous renvoyons à nouveau le lecteur vers [1] pour la démonstration. Dans cette situation l'application p est en fait un revêtement. Ce résultat admet des généralisations dans le cas où G est un groupe de Lie, mais nous ne les détaillerons pas ici (cf. par exemple [2, Chap. 9]). Il permet aussi de construire des exemples intéressants de variétés.

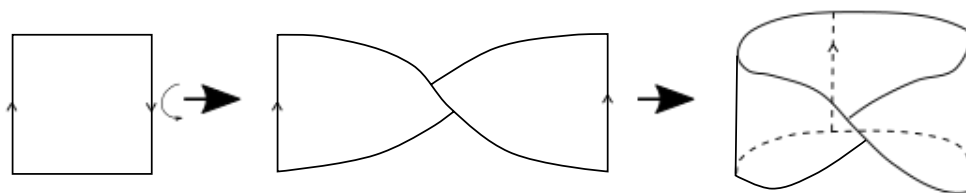
Exemple 1.26. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$) par translation vérifie les hypothèses du théorème 1.25. Et l'on peut montrer que le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est diffeomorphe au tore de dimension n , $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (exercice!). Pour $\mathbb{T}^2$, on peut visualiser ainsi :



◀

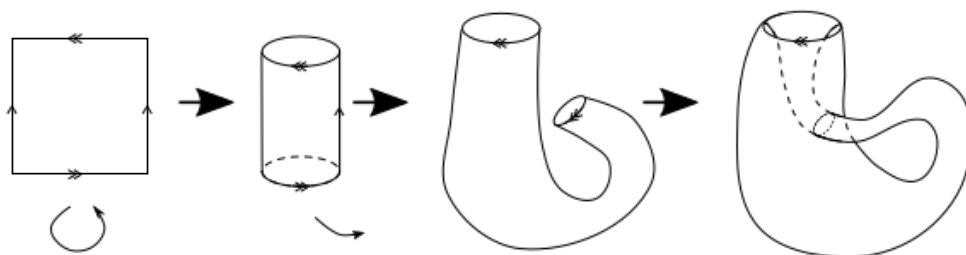
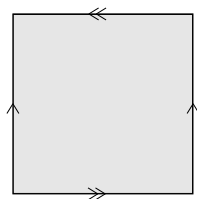
Exemple 1.27. Le Ruban de Moebius est la variété obtenue comme quotient de l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ donnée par $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$.





◀

Exemple 1.28. La bouteille de Klein est la variété obtenue comme quotient de l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $(n, k) \cdot (x, y) = ((-1)^k x + n, y + k)$, pour $n, k \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$.



Comme on peut le voir, l'image ci-dessus ne représente pas une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ (elle est seulement immergée). Il n'est en fait pas possible de plonger la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$. En revanche, il est possible de la plonger dans $\mathbb{R}^4$. ◀

Exemple 1.29. L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le quotient de la sphère $\mathbb{S}^n$ par l'action libre et propre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par antipodie. ◀

Exercice 5. Montrer que l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $t \mapsto [\cos \pi t : \sin \pi t]$ induit un difféomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

I.7 Partitions de l'unité

La plupart des objets que nous manipulerons (formes différentielles, orientations, intégrales) se définissent aisément dans une carte, et la difficulté est de recoller ces définitions locales. Les partitions de l'unité sont l'outil qui permet ce passage du local au global ; elles interviendront à de multiples reprises dans la suite.

Définition 1.30 (Partition de l'unité). Soient M une variété et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M . Une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ est une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de fonctions lisses $\rho_i : M \rightarrow [0, 1]$ telle que

- (i) $\text{Supp} \rho_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$;
- (ii) la famille des supports $(\text{Supp} \rho_i)_{i \in I}$ est localement finie, c'est-à-dire que tout point de M admet un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'entre eux ;
- (iii) $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$.

La condition (ii) assure qu'au voisinage de chaque point la somme de (iii) ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Théorème 1.31 (cf. [1]). *Tout recouvrement ouvert d'une variété admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée. On peut de plus imposer que chaque ρ_i soit à support compact, quitte à ne plus indexer la partition par I mais par un ensemble dénombrable, chaque support étant alors contenu dans l'un des U_i .*

La séparation et la base dénombrable exigées dans la définition d'une variété sont utilisées de manière clé dans ce théorème. C'est un outil puissant, qui peut être utilisé d'au moins trois manières :

Fonctions plateau. Si K est un compact contenu dans un ouvert U de M , il existe une fonction lisse $\chi : M \rightarrow [0, 1]$, à support compact contenu dans U , et valant 1 au voisinage de K : il suffit d'appliquer le théorème au recouvrement $\{U, M \setminus K\}$ et de prendre pour χ la fonction associée à U .

Extension par zéro. Si α est un objet défini seulement sur U_i (par exemple une fonction ou une forme différentielle, ou plus généralement une section d'un fibré), alors $\rho_i \alpha$, prolongé par 0 en dehors de U_i , est défini et lisse sur M tout entier, car ρ_i s'annule au voisinage de chaque point du bord de son support.

Recollement. Un objet α défini sur M se décompose en $\alpha = \sum_{i \in I} \rho_i \alpha$, somme localement finie d'objets à support dans les U_i . Réciproquement, si l'on dispose d'un objet α_i sur chaque U_i , la somme $\sum_i \rho_i \alpha_i$ est définie sur M et "recolle" en quelque sorte les α_i .

II Formes différentielles

II.1 Formes alternées et produits extérieurs

Nous noterons $\mathcal{S}_p$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$. Rappelons d'abord que $\mathcal{S}_p$ est engendré par les *transpositions*, c'est-à-dire les permutations qui échangent deux éléments et laissent tous les autres invariants. Rappelons aussi qu'il existe un (unique) morphisme de groupes $\varepsilon : \mathcal{S}_p \rightarrow \{\pm 1\}$ qui vaut -1 sur toutes les transpositions. Ce morphisme est appelé *signature*.

Pour toute cette partie, on fixe un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , de dimension finie n .

Définition 1.32 (formes alternées). *Une forme p -linéaire $\omega : E^p \rightarrow \mathbb{R}$ est dite alternée si et seulement si $\omega(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que $x_i = x_j$ pour certains indices $i \neq j$.*

En utilisant les propriétés de la signature, on se convainc facilement qu'une forme est alternée si et seulement si elle est antisymétrique, ce qui signifie que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$, on a

$$\omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \omega(x_1, \dots, x_p).$$

Une 1-forme alternée n'est rien d'autre qu'une forme linéaire. Par convention, on décide qu'une 0-forme est un scalaire.

Notation. On note $\Lambda^p E^*$ l'ensemble des formes p -linéaires alternées sur E . En particulier, $\Lambda^1 E^* = E^*$ et $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$.

La théorie du déterminant nous apprend que $\Lambda^n E^*$ est de dimension 1 (rappelons que n est la dimension de E). Si $p > n$, $\Lambda^p E^* = \{0\}$, autrement dit, toute forme p -linéaire alternée est nulle. C'est une conséquence du fait qu'une forme alternée s'annule sur une famille liée de vecteurs, ce qui se démontre simplement en écrivant l'un des vecteurs en fonction des autres et en développant.

Définition 1.33 (Produit extérieur de formes). Soient α une forme p -linéaire alternée et β une forme q -linéaire alternée. Le produit extérieur de α et β est la forme $p+q$ -linéaire alternée donnée par

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \beta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \beta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$.

Par convention, si $p = 0$, α est simplement un scalaire et on définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ comme le produit standard de ce scalaire avec β .

Exemple 1.34. Si α et β sont deux formes bilinéaires alternées, alors pour tous vecteurs x_1, x_2, x_3, x_4 , on a

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \alpha(x_1, x_2)\beta(x_3, x_4) - \alpha(x_1, x_3)\beta(x_2, x_4) + \alpha(x_1, x_4)\beta(x_2, x_3) \\ &\quad + \alpha(x_2, x_3)\beta(x_1, x_4) - \alpha(x_2, x_4)\beta(x_1, x_3) + \alpha(x_3, x_4)\beta(x_1, x_2).\end{aligned}$$

◀

Dans la pratique, on calcule peu les produits extérieurs avec les formules ci-dessus ; on utilise les propriétés suivantes du produit extérieur qui suffisent à le caractériser.

- Propriétés 1.35.** (i) *Associativité* : $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$,
(ii) *Unitarité* : $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$ où $1 \in \mathbb{R} = \Lambda^0 E^*$,
(iii) *Anti-commutativité* : $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$, où p et q désignent les degrés respectifs de ω et η ,

Les propriétés ci-dessus se résument en disant que $\Lambda E^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p E^*$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre graduée unitaire et anticommutative.

Notons qu'une conséquence de (iii) est que $\ell \wedge \ell = 0$ pour toute forme linéaire ℓ .

Étant données une base de E , sa base duale $(dx_1, \dots, dx_n)$ et $I = \{i_1 < \dots < i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, on peut définir la forme p -linéaire alternée

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

On peut montrer que la famille des dx_I , indexée par l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \dots, n\}$, forme une base de $\Lambda^p E^*$, qui est donc de dimension $\binom{n}{p}$. (cf. [1])

Exercice 6. On pose $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. Montrer que $\alpha \wedge \alpha = 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

REMARQUE 1.36. Les formes p -linéaires dx_I peuvent aussi se calculer comme des déterminants : Pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_p$, et $I = \{t_1 < \dots < t_p\}$

$$dx_I(v_1, \dots, v_p) = \det (dx_{t_i}(v_j))_{i,j}$$

Voir [1] pour la démonstration. ◀

Transport de formes alternées par une application linéaire. Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ induit une application linéaire $f^* : \Lambda^p F^* \rightarrow \Lambda^p E^*$ par la formule

$$(f^* \omega)(x_1, \dots, x_p) = \omega(f(x_1), \dots, f(x_p)),$$

pour toute forme $\omega \in \Lambda^p F^*$ et tous vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E .

Dans le cas particulier où $p = 1$, f^* s'appelle la transposée de f . Dans le cas particulier où $p = \dim E = \dim F$, l'application f^* est une application linéaire entre espaces de dimension 1, et d'après les propriétés du déterminant, il s'agit de la multiplication par le scalaire $\det f$.

Propriétés 1.37. (i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,

(ii) $f^* 1 = 1$,

(iii) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$.

Ces propriétés sont faciles à vérifier. Les deux dernières propriétés se résument en disant que $f^* : \Lambda F^* \rightarrow \Lambda E^*$ est un morphisme d'algèbres unitaires graduées.

II.2 Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on fixe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega^k(U) = C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$. Les éléments de $\Omega^k(U)$ sont appelés *formes différentielles* de degré k sur U , ou simplement k -*formes* sur U . Étant donnée une k -forme α et $x \in U$, on note souvent α_x à la place de $\alpha(x)$.

Notons que $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$, puisque $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$. Si $k > n$, $\Omega^k(U) = \{0\}$ car $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$. Si $k < 0$, nous n'avons pas défini $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ mais nous poserons par convention $\Omega^k(U) = \{0\}$.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les fonctions coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Leurs différentielles $dx_1, \dots, dx_n$ sont égales en tout point de $\mathbb{R}^n$ aux éléments de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme les formes dx_I forment une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, toute k -forme différentielle α s'écrit de manière unique

$$\alpha = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} f_I dx_I$$

où $f_I \in C^\infty(U)$.

Le produit extérieur sur les formes multilinéaires alternées appliqué en tout point induit un *produit extérieur des formes différentielles*, $\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(U)$.

On peut aussi tirer en arrière les formes différentielles. Soit $\phi : U \rightarrow V$ une application lisse à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^m$. Alors pour toute $\alpha \in \Omega^k(V)$, le *tiré en arrière* de α par ϕ est la k -forme $\phi^* \alpha$ donnée par

$$(\phi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\phi(x)}(d\phi_x(v_1), \dots, d\phi_x(v_k))$$

pour tout $x \in U$ et tous vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

Propriétés 1.38. (i) L'application $\phi^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire,
(ii) Pour toutes formes $\alpha \in \Omega^k(V)$, $\beta \in \Omega^\ell(V)$,

$$\boxed{\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta}$$

(iii) Si $\psi : V \rightarrow W$ est une application lisse à valeurs dans un ouvert W de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\boxed{(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*}$$

REMARQUE 1.39.

(a) Si $k = 0$, nous avons vu que $\Omega^0(V) = C^\infty(V)$. Dans ce cas, pour toute $f \in C^\infty(V)$, le tiré en arrière s'écrit :

$$\phi^* f = f \circ \phi.$$

(b) Si $k = n = m$, alors $\alpha \in \Omega^n(V)$ est de la forme $\alpha = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = f \cdot \det_{\mathcal{B}_0}$, où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(V)$ une certaine fonction lisse. Alors pour tout point $x \in U$, on peut écrire

$$\begin{aligned} (\phi^*\alpha)_x &= (\phi^*f)(x) \phi^* \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= f \circ \phi(x) \det(d\phi_x) \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= f \circ \phi(x) \det(d\phi_x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Cette dernière formule fait penser (à juste titre) à la formule du changement de variable. Elle prendra tout son sens lorsque nous définirons l'intégration des formes différentielles plus tard dans ce chapitre.

(c) Si ϕ est l'injection canonique d'un ouvert U dans un autre ouvert V le contenant, $\phi^*\alpha$ n'est rien d'autre que la restriction de α à U .

◀

II.3 Formes différentielles sur une variété

Soit M une variété et $k \geq 0$ un entier. Les espaces vectoriels de formes k -linéaires alternées sur les espaces tangents à M en x s'organisent en un fibré au-dessus de M , noté $\Lambda^k T^*M$.

Pour justifier l'existence de cette structure de fibré, on peut expliciter les fonctions de transition. Étant données deux cartes (U, ϕ) , (V, ψ) , on peut considérer en tout point $y \in \psi(U \cap V)$, l'application linéaire $(d(\phi \circ \psi^{-1})_y)^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Étant données maintenant trois cartes, on a alors trois telles applications qui vérifient la condition de cocycle. Pour la structure de fibré ainsi construite sur $\Lambda^k T^*M = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k T_x^*M$, l'application

$$\bigsqcup_{x \in U} \Lambda^k T_x^*M \rightarrow U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*, (x, \omega) \mapsto (x, (d\phi_{\phi(x)}^{-1})^* \omega)$$

est une trivialisatıon au-dessus de U pour toute carte (U, ϕ) de M .

Définition 1.40. Une k -forme différentielle sur M est une section lisse du fibré $\Lambda^k T^*M$. On note $\Omega^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$.

Dans le cas où $k = 0$, $\Lambda^0 T^*M \simeq M \times \mathbb{R}$ et une forme différentielle n'est rien d'autre qu'une fonction lisse sur M . Dans le cas $k = 1$, le fibré $\Lambda^1 T^*M$ est noté T^*M et s'appelle le *fibré cotangent* de M . On note aussi parfois $\Omega(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$.

Étant donnée une carte (U, ϕ) de coordonnées $(\phi_1, \dots, \phi_n)$, on a $\phi^* dx_i = d\phi_i$. Par conséquent, toute k -forme s'écrit sur U de manière unique $\sum_I f_I d\phi_I$. En pratique, on note souvent x_i les coordonnées de ϕ_i , de manière à écrire nos formes $\sum_I f_I dx_I$, ce qui permet de calculer "comme dans $\mathbb{R}^n$ ".

Les opérations que l'on avait sur $\mathbb{R}^n$ s'étendent aux variétés. En effet, on peut définir le produit extérieur d'une k -forme α et d'une ℓ -forme β par la formule

$$\alpha \wedge \beta(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

On définit ainsi un produit associatif, unitaire, anti-commutatif $\Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(M)$.

On peut aussi tirer en arrière des formes d'une variété à une autre. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse et soit $\alpha \in \Omega^k(N)$ une forme différentielle, alors la formule

$$(f^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(df_x v_1, \dots, df_x v_k)$$

définit une application linéaire $\Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ qui envoie 1 sur 1 et préserve le produit.

II.4 Différentielle extérieure

La différentielle extérieure est un opérateur qui transforme une k -forme différentielle en une $k+1$ -forme et généralise la différentielle des fonctions.

Théorème 1.41. *Il existe une unique famille d'applications linéaires $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, telle que :*

- (i) *Pour toute fonction $f \in \Omega^0(M) \simeq C^\infty(M)$, $d_0 f = df$ est la différentielle usuelle,*
- (ii) *Pour toute k -forme α et toute ℓ -forme β ,*

$$d_{k+\ell}(\alpha \wedge \beta) = d_k \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_\ell \beta,$$

- (iii) *Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} \circ d_k = 0$.*

Ces applications vérifient de plus

$$d_k(\phi^* \alpha) = \phi^* d_k \alpha$$

pour toute application lisse $\phi : M \rightarrow N$ et toute k -forme α sur N .

En pratique, on note simplement d pour d_k . Le théorème donne donc l'existence d'une certaine application linéaire $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$, où $\Omega(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(M)$.

Définition 1.42. *L'application d s'appelle la différentielle extérieure sur les formes différentielles de M .*

Démontrons le théorème.

Démonstration. ÉTAPE 1 : LE CAS $M = \mathbb{R}^n$ On note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^n$. Commençons par remarquer que s'il existe une telle application d , comme $d \circ d = 0$, alors

$d(dx_i) = 0$ pour tout i . La propriété (ii) implique alors par une récurrence facile que $d(dx_I) = 0$ pour tout I . En utilisant à nouveau (ii), et la propriété (i), on en déduit :

$$\begin{aligned} d\left(\sum_I f_I dx_I\right) &= \sum_I df_I \wedge dx_I + \sum_I f_I d(dx_I) \\ &= \sum_I df_I \wedge dx_I. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Toute forme différentielle se décomposant sous la forme $\sum_I f_I dx_I$, la formule ci-dessus force l'unicité de d .

Cette formule donne en fait aussi l'existence. En effet, si l'on définit d par la formule (1.1), on peut vérifier que les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème sont satisfaites. (cf. [1] pour les détails).

ÉTAPE 2 : LE CAS GÉNÉRAL Remarquons que l'existence et l'unicité d'un tel d sont des propriétés invariantes par difféomorphisme. En effet, si $\phi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, d vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème sur $\Omega(M)$ si et seulement si $(\phi^{-1})^* \circ d \circ \phi^*$ les vérifie sur $\Omega(N)$. Comme l'existence et l'unicité ont déjà été prouvées dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$, elles sont aussi vraies sur les domaines des cartes.

Soit (U, ϕ) une carte de M . On sait donc que la différentielle extérieure existe de manière unique sur $\Omega(U)$. Notons-la δ_U . Étant donnée une application d vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème sur $\Omega(M)$, on définit la restriction $d|_U$ de d à $\Omega(U)$ par la formule

$$d|_U \omega(x) = d\tilde{\omega}(x),$$

pour tout $\omega \in \Omega(U)$, tout $x \in U$ et tout $\tilde{\omega} \in \Omega(M)$ qui coïncide avec ω au voisinage de x . Une telle forme $\tilde{\omega}$ existe bien : il suffit de multiplier ω par une fonction plateau à support suffisamment petit et étendre par 0 à toute la variété. De plus, cette formule ne dépend pas du choix de $\tilde{\omega}$. En effet, c'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.43. *Supposons que $\omega_1 = \omega_2$ sur un ouvert V , alors pour toute application d vérifiant (i) et (ii), nous avons $d\omega_1|_V = d\omega_2|_V$.*

Démonstration . Soit $x \in V$. Posons $\alpha = \omega_1 - \omega_2$. Alors, pour toute fonction plateau f valant 1 au voisinage de x et à support inclus dans V , on a $f\alpha = 0$ donc :

$$0 = d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha.$$

Comme $df_x = 0$ et $f(x) = 1$, nous obtenons $0 = d\alpha(x)$ et donc $d\omega_1(x) = d\omega_2(x)$, comme annoncé. $\square$

Les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème étant toutes locales, on démontre facilement que la restriction $d|_U$ les vérifie. Par unicité locale, $d|_U$ est la différentielle extérieure δ_U . On en déduit que pour tout $x \in U$ et toute forme ω sur M ,

$$d\omega(x) = \delta_U \omega|_U(x)$$

ce qui donne l'unicité de d .

Réciproquement, définissons d par cette formule, autrement dit, pour toute forme ω posons $d\omega$ comme étant l'application qui à x associe $\delta_U \omega|_U(x)$ pour n'importe quel domaine de carte U . L'unicité locale implique que cette définition ne dépend pas du choix de la carte. On définit donc bien ainsi une application sur $\Omega^k(M)$ qui vérifie bien les conditions (i), (ii) et (iii) puisqu'il s'agit de conditions locales. $\square$

Nous avons déjà défini le produit intérieur dans le contexte linéaire. La définition s'étend facilement au cadre général :

Définition 1.44 (produit intérieur). *Soit ω une k -forme sur M , $k \geq 0$, et soit X un champ de vecteurs. Le produit intérieur de ω par X est la $k-1$ -forme définie par $\iota_X \omega = 0$ si $k = 0$ et*

$$\iota_X \omega_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_x(X(x), v_1, \dots, v_{k-1}),$$

pour tout $x \in M$, et tous vecteurs $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$.

Proposition 1.45. *Le produit intérieur est une anti-dérivation, c'est à dire vérifie :*

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge (\iota_X \beta),$$

pour tout champ X et toutes formes α et β .

Définissons maintenant la dérivée de Lie d'une forme dans la direction d'un champ de vecteurs. Comme dans le cas de la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champ de vecteurs, la dérivée de Lie est la version infinitésimale du transport par le flot.

Définition 1.46 (dérivée de Lie). *Soient X un champ de vecteurs, ω une k -forme différentielle. Alors, la dérivée de Lie de ω par rapport à X est donnée par*

$$\mathcal{L}_X \omega(x) = \frac{d}{dt}((\phi^t)^* \omega(x))|_{t=0}$$

où ϕ^t désigne le flot du champ de vecteurs X .⁴

La dérivée de Lie est une dérivation sur l'algèbre des formes différentielles :

Proposition 1.47. *Pour tout champ X et toutes formes α et β ,*

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta).$$

Démonstration . On pose $f(t) = (\phi^t)^* \alpha(x)$ et $g(t) = (\phi^t)^* \beta(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta)(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(t) \wedge g(t)) \\ &= f'(0) \wedge g(0) + f(0) \wedge g'(0) \\ &= (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta). \end{aligned}$$

$\square$

La méthode la plus pratique pour calculer une dérivée de Lie est d'utiliser la formule suivante.

Proposition 1.48 (formule de Cartan). *Pour tout forme ω et tout champ de vecteurs X ,*

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X d\omega + dt_X \omega$$

On renvoie à [1] pour une démonstration. Remarquons aussi que dans le cas d'une fonction f , nous avons :

$$\mathcal{L}_X f = df \cdot X = X \cdot f.$$

4. Par définition, $\phi^t(x_0)$ est l'unique solution au temps t du problème de Cauchy $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$.

III Intégration des formes différentielles, formule de Stokes

III.1 Orientation des variétés

Rappelons qu'une orientation d'un espace vectoriel E de dimension finie est une classe d'équivalence de bases de E pour la relation qui identifie deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ si l'on passe de l'une à l'autre par un isomorphisme linéaire de déterminant positif. De la sorte, un espace vectoriel de dimension finie admet toujours exactement deux orientations. Dans $\mathbb{R}^n$, l'orientation de la base canonique est appelée *orientation canonique*.

Un espace vectoriel muni d'une orientation est dit *orienté*, et les bases qui représentent cette orientation sont dites *positives*. Un isomorphisme entre espaces vectoriels orientés *préserve l'orientation* s'il envoie base positive sur base positive. De même, un difféomorphisme ϕ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ *préserve l'orientation* si sa différentielle la préserve en tout point, autrement dit, en tout point x de son domaine $\det d\phi_x > 0$.

Définition 1.49 (Orientation d'une variété). *Soit M une variété. Une orientation sur M est la donnée d'une orientation $\mathcal{O}_x$ de l'espace tangent $T_x M$ pour tout $x \in M$ qui est localement constante, c'est-à-dire pour tout point $a \in M$, il existe une carte (U, ϕ) en a telle que pour tout $x \in U$, l'image de $\mathcal{O}_x$ par $d\phi_x$ est constante.*

REMARQUE 1.50. Il y a équivalence entre admettre une orientation et admettre un atlas dont les changements de cartes préservent l'orientation.

En effet, à un tel atlas on peut associer la famille d'orientations données en tout point x par $\mathcal{O}_x = (d\phi_x)^{-1}(\mathcal{O}_{can})$ pour n'importe quelle carte de l'atlas orienté. Réciproquement, s'il existe une famille d'orientations $(\mathcal{O}_x)$ localement constante des espaces tangents, alors on construit un atlas orienté en ne gardant que les cartes (U, ϕ) pour lesquelles $d\phi_x(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_{can}$ pour tout $x \in U$. ◀

On peut vérifier qu'une variété orientable connexe M admet exactement 2 orientations.

Exemple 1.51. La sphère $\mathbb{S}^n$, le tore $\mathbb{T}^n$ sont orientables. La bouteille de Klein et le ruban de Moebius ne sont pas orientables, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair. (cf. [1]) ◀

Définition 1.52 (formes volumes). *Une forme volume sur une variété M est une forme différentielle de degré maximal (c'est-à-dire de degré égal à la dimension de la variété) qui ne s'annule en aucun point.*

Par exemple, la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est une forme volume sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.53. *Pour toute variété M de dimension n , il y a équivalence entre*

- (a) *il existe une forme volume sur M ,*
- (b) *M est orientable.*

Démonstration . Montrons que (b) implique (a). On se donne un atlas orienté $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Notons $\sigma = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ la forme volume standard sur $\mathbb{R}^n$. La forme $\phi_i^* \sigma$ n'est définie que sur U_i mais la forme $\rho_i \phi_i^* \sigma$,

qui est à support compact inclus dans U_i , peut être étendue en une forme ω_i globalement définie sur M .

Posons $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$ et vérifions que ω est une forme volume sur M .

Soit $x \in M$. Alors, il existe un indice j pour lequel $\rho_j(x) > 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{i \in I} \rho_i(x) \phi_i^* \sigma(x) \\ &= \rho_j(x) \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \phi_j^* (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* \sigma(x) \\ &= \rho_j(x) \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \phi_j^* (\det(d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})) \sigma)(x) \\ &= \left(\sum_{i \in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \det(d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})_{\phi_j(x)}) \right) \rho_j(x) \phi_j^* \sigma(x). \end{aligned}$$

Comme l'atlas est orienté, chacun des termes de la somme est positif et le terme d'indice j est strictement positif. La somme est donc non-nulle et il en est de même de $\rho_j(x) \phi_j^* \sigma(x)$. Nous avons prouvé que $\omega(x) \neq 0$.

Démontrons maintenant que (a) implique (b). Soit donc ω une forme volume. Pour tout $x \in M$, on définit une orientation $\mathcal{O}_x$ sur M en décidant qu'une base $(v_1, \dots, v_n)$ est positivement orientée si et seulement si $\omega_x(v_1, \dots, v_n) > 0$. Vérifions que la famille d'orientations ainsi construite est localement constante. Soit $a \in M$ et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $T_a M$ positive pour $\mathcal{O}_a$. Soit ϕ une carte en a . Pour $i = 1, \dots, n$, on pose $V_i(x) = (d\phi_x)^{-1}(d\phi_a(v_i))$. La famille $(V_1, \dots, V_n)$ forme un repère de TM défini au voisinage de a , qui coïncide avec $(v_1, \dots, v_n)$ en a . De plus, par continuité, comme $\omega_a(v_1, \dots, v_n) > 0$, on a $\omega_x(V_1(x), \dots, V_n(x)) > 0$ pour x proche de a . Par conséquent, $(V_1(x), \dots, V_n(x))$ représente $\mathcal{O}_x$ pour x proche de a . Comme $d\phi_x(V_i(x)) = d\phi_a(v_i)$ ne dépend pas de x , on en déduit que $d\phi_x(\mathcal{O}_x)$ ne dépend pas de x (au voisinage de a). On a bien prouvé que la famille d'orientations $(\mathcal{O}_x)$ est localement constante. $\square$

III.2 Intégration des formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega_c^n(U)$ l'ensemble des formes différentielles de degré n , à support compact. Notons que les formes que l'on considère ici ont un degré égal à la dimension de l'espace. Tout élément de $\Omega_c^n(U)$ s'écrit de manière unique $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, pour une fonction f à support compact sur U .

On définit alors tout simplement l'intégrale de $\omega \in \Omega_c^n(U)$ par la formule :

$$\boxed{\int_U \omega := \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n} \quad (1.2)$$

L'intérêt de cette définition vient de son invariance par difféomorphisme :

Proposition 1.54 (changement de variable). *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme **préservant l'orientation**. Alors, pour toute forme $\omega \in \Omega_c^n(V)$,*

$$\int_U \phi^* \omega = \int_V \omega.$$

Démonstration . Écrivons $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= f \circ \phi \phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= f \circ \phi \det(d\phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,\end{aligned}$$

d'après la remarque 1.39 (b). Comme ϕ préserve l'orientation, $\det d\phi = |\det d\phi|$ et la proposition est donc conséquence de la formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue. $\square$

REMARQUE 1.55. Bien sûr, dans la proposition précédente, si ϕ inverse l'orientation, alors $\int_U \phi^*\omega = -\int_V \omega$. C'est une conséquence de la démonstration ci-dessus, car alors $\det d\phi = -|\det d\phi|$. $\blacktriangleleft$

Étant donnée une variété, on note $\Omega_c^n(M)$ l'ensemble des n -formes à support compact sur M . Bien sûr, si M est compact, alors $\Omega_c^n(M) = \Omega^n(M)$.

Théorème 1.56 (Intégration des formes différentielles). *Soit M une variété **orientée** de dimension n . Il existe une unique forme linéaire $\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute carte orientée (U, ϕ) de M et toute n -forme ω à support compact dans U , on ait :*

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Démonstration . Supposons d'abord qu'une telle forme linéaire existe. Soit $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ un atlas orienté de M , et $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Pour toute n -forme à support compact ω , nous pouvons écrire $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$. Cette somme est en fait finie car le support de ω est compact et la famille des supports de la partition de l'unité est localement finie. Alors, nécessairement,

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \rho_i \omega = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^* (\rho_i \omega). \quad (1.3)$$

Cette formule implique l'unicité.

Pour l'existence, on définit $\int_M$ par la formule ci-dessus. La linéarité est claire. Supposons que $\omega \in \Omega_c(U)$, où U est le domaine d'une carte (U, ψ) . Alors,

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \sum_i \int_{\phi_i(U_i \cap U)} (\phi_i^{-1})^* (\rho_i \omega) \\ &= \sum_i \int_{\psi(U_i \cap U)} (\psi^{-1})^* (\rho_i \omega) \\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \left(\sum_i \rho_i \omega \right) \\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est conséquence de la formule de changement de variable (proposition 1.54). La forme linéaire ainsi définie vérifie donc bien les conditions demandées. $\square$

Il y a de multiples remarques à faire.

REMARQUE 1.57.

- (a) L'unicité implique que la définition de $\int_M$ donnée ci-dessus ne dépend pas des choix d'atlas orienté, ni de partition de l'unité. Dans la pratique, on n'utilise pas la formule donnée dans la démonstration, car les partitions de l'unité sont en général impossibles à calculer.
- (b) Si l'on change l'orientation de M , la forme linéaire $\int_M$ est remplacée par son opposé $-\int_M$. En effet, cela revient à remplacer toutes les cartes de l'atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ ayant servi à la démonstration par $(U_i, \tau \circ \phi_i)_{i \in I}$ où τ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ renversant l'orientation fixé.
- (c) Si ω est une forme volume sur une variété compacte connexe, alors $\int_M \omega \neq 0$. En effet, dans la formule (1.3), tous les termes ont le même signe.
- (d) Si $\phi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme préservant l'orientation, alors

$$\boxed{\int_M \phi^* \omega = \int_N \omega}.$$

On peut le voir comme une conséquence de l'unicité ou le déduire de la formule (1.3) et de la proposition 1.54.

- (e) Plus généralement, si B est un borélien⁵ de M (par exemple un ouvert ou un fermé de M), on peut montrer qu'il existe une unique forme linéaire

$$\int_B : \Omega_B^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

où $\Omega_B^n(M)$ est l'ensemble des n -formes ω sur M telles que $\overline{(\text{Supp } \omega) \cap B}$ est compact, telle que pour toute carte orientée (U, ϕ) de M et toute $\omega \in \Omega_B^n(M)$ à support dans U , on ait

$$\int_B \omega = \int_{\phi(B \cap U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

L'intégrale des formes différentielles est σ -additive sur les domaines.

- (f) Si ω est une k -forme, $k \leq n$ et $N \subset M$ est une sous-variété orientée de dimension k de M , alors on définit l'intégrale de ω sur N comme l'intégrale de $i^* \omega$ où i est l'injection canonique $N \rightarrow M$:

$$\int_N \omega := \int_N i^* \omega.$$

En combinant avec la remarque (d) ci-dessus, on obtient que pour tout plongement $j : V \rightarrow M$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et pour toute k -forme ω ,

$$\int_{j(V)} \omega = \int_V j^* \omega.$$

Bien sûr, ici, $j(V)$ est muni de l'orientation image par j de l'orientation de $\mathbb{R}^k$. Cette dernière formule est très utile pour calculer des intégrales de formes en pratique.

5. Rappelons qu'un borélien d'un espace topologique est un élément de la tribu engendrée par les ouverts de M .

Exemple 1.58. Soit α une 1-forme et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe paramétrée lisse, que l'on suppose être un plongement. Alors,

$$\int_{\gamma(I)} \alpha = \int_I \gamma^* \alpha = \int_I \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

En effet, pour tout $t \in I$, et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\gamma^* \alpha_t(\tau) = \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)\tau) = \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\tau.$$

En notant, comme d'habitude, dt la 1-forme égale en tout point à la forme linéaire $\tau \mapsto \tau$, nous obtenons bien la formule

$$\gamma^* \alpha_t = \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

Exercice 7. Vérifier que l'intégrale de la forme

$$d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

sur un cercle du plan centré en l'origine vaut 2π .

Exemple 1.59. Nous allons calculer l'intégrale de la forme $\omega = z dx \wedge dy$ sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

On paramètre la sphère à l'aide des coordonnées sphériques. Autrement dit, modulo un ensemble de mesure nulle, on la voit comme image du plongement

$$j : (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), \quad]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3.$$

On veut appliquer la formule $\int_{j(V)} \omega = \int_V j^* \omega$. Il nous faut donc calculer $j^* \omega$. Calculons :

$$j^* dx = d(x \circ j) = -\sin \theta \cos \varphi d\theta - \sin \varphi \cos \theta d\varphi,$$

et de même,

$$j^* dy = -\sin \theta \sin \varphi d\theta + \cos \varphi \cos \theta d\varphi.$$

D'où,

$$\begin{aligned} j^* \omega &= j^*(z dx \wedge dy) \\ &= \sin \theta (-\sin \theta \cos \varphi)(\cos \varphi \cos \theta) d\theta \wedge d\varphi - \sin \theta (-\sin \theta \sin \varphi)(-\sin \varphi \cos \theta) d\theta \wedge d\varphi \\ &= \sin^2 \theta \cos \theta d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} j^* \omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 2\pi \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi.$$

III.3 Formule de Stokes

Dans toute la suite, nous utiliserons la notation $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. On fixe une variété M de dimension $n \geq 1$.

On définit les *variétés à bord* avec exactement la même définition que les variétés (cf. définition 1.3), en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. Les images des cartes sont donc maintenant des ouverts de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. Le *bord* d'une variété à bord M , noté ∂M est la réunion des ensembles $\phi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ pour toutes les cartes ϕ de M .

Exemple 1.60. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse dont 0 est une valeur régulière, i.e. il n'y a pas de point x tel que $df_x = 0$ et $f(x) = 0$. Alors, on peut montrer (par exemple à l'aide du théorème des fonctions implicites) que $\{x \in M \mid f(x) \leq 0\}$ est une variété à bord, dont le bord est l'hypersurface $\{x \in M \mid f(x) = 0\}$. ◀

Exercice 8. Montrer que pour toute variété à bord M de dimension n , le bord ∂M est une variété de dimension $n - 1$.

On peut compléter le résultat de l'exercice ci-dessus. Si M est orientée, on peut orienter son bord avec la convention "normale sortante en premier". Plus précisément, dans l'espace tangent $T_x M$ d'un point $x \in \partial M$, on choisit un vecteur $v \in T_x M$ sortant, c'est-à-dire un vecteur envoyé par une carte en x sur un vecteur de première coordonnée positive dans $\mathbb{R}^n$. On définit alors l'orientation $\mathcal{O}_x^{\partial M}$ de $T_x \partial M$ telle qu'une base $(w_1, \dots, w_{n-1})$ de $T_x \partial M$ est positive si et seulement si $(v, w_1, \dots, w_{n-1})$ est une base positive de $T_x M$. Cette famille $\mathcal{O}^{\partial M}$ définit une orientation sur ∂M que l'on appellera orientation canonique du bord de M .

Nous pouvons maintenant énoncer la formule de Stokes.

Théorème 1.61 (Formule de Stokes). Soit M une variété à bord orientée, de dimension $n \geq 2$. On note $j : \partial M \rightarrow M$ l'injection canonique. Alors, pour toute $n - 1$ -forme ω sur M à support compact,

$$\boxed{\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega}.$$

REMARQUE 1.62. Dans le cas où M est un intervalle de la forme $[a, b]$, nous n'avons pas défini l'intégrale d'une 0-forme sur une variété de dimension 0. En revanche, on sait que l'on a pour $\omega(x) = f(x)$, $d\omega = f'(x) dx$, donc

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Nous allons commencer par établir la formule de Stokes dans le cas où $M = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dans ce cas, une $n - 1$ -forme ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

La différentielle s'écrit alors explicitement :

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Nous pouvons ensuite exprimer l'intégrale de $d\omega$ sur M .

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \int \int \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Or, l'hypothèse sur le support de ω implique que pour $i \geq 2$, la fonction f_i est à support compact et donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i$ s'annule. On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $j^*\omega = f_1|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$ car $dx_1|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} = 0$. Nous avons donc bien établi dans ce cas la formule $\int_{\partial M} j^*\omega = \int_M d\omega$.

Notons au passage que dans ce cas particulier, si jamais ω est à support inclus dans l'intérieur de M , alors on obtient $\int_M d\omega = \int_{\partial M} j^*\omega = 0$.

Le cas général se déduit facilement du cas particulier à l'aide de partitions de l'unité. On choisit un atlas orienté (U_i, ϕ_i) de cartes de M telles que $\phi_i(U_i \cap \partial M) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi_i(U_i)$. Bien sûr, une telle carte définie au voisinage d'un point de M a son image incluse dans l'intérieur de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. On choisit également une partition de l'unité ρ_i subordonnée au recouvrement (U_i) , et on note $\omega_i = \rho_i \omega$. Alors, en utilisant le cas particulier et la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_i \int_M d\omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} (\phi_i^{-1})^* d\omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} d((\phi_i^{-1})^* \omega_i) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j_{\mathbb{R}^{n-1}}^* (\phi_i^{-1})^* \omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ((\phi_i|_{\partial M})^{-1})^* \omega_i = \sum_i \int_{\partial M} j^* \omega_i \\ &= \int_{\partial M} j^* \omega. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 1.63. La formule de Stokes s'applique au cas particulier où $\partial M = \emptyset$. Dans ce cas,

$$\int_M d\omega = 0,$$

pour toute $n-1$ -forme ω à support compact. ◀

Exemple 1.64. Calculons le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Une première méthode consiste à écrire la forme $dx \wedge dy \wedge dz$ en coordonnées sphériques, puis intégrer sur le pavé droit $[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Une autre méthode consiste à appliquer la formule de Stokes à la forme $z dx \wedge dy$, dont la différentielle est $dx \wedge dy \wedge dz$. Il se trouve que l'on a déjà calculé son intégrale sur la sphère : $\frac{4}{3}\pi$, qui est bien le volume de la boule unité. ◀

Exemple 1.65. Soit Ω un domaine à bord lisse de $\mathbb{R}^2$, dont le bord est donné par une courbe lisse simple $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$. On note $\gamma = (f, g)$ les applications coordonnées de γ . Alors, en utilisant la formule de Stokes :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_{\Omega} dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} x dy = \int_0^T f(t) g'(t) dt.$$

Une telle aire est donc très simple à calculer. Notons que la formule de Stokes donne aussi :

$$\text{Aire}(\Omega) = - \int_{\partial\Omega} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x dy - y dx).$$

◀

Une application topologique : le théorème de Brouwer. Nous allons utiliser la formule de Stokes pour montrer le théorème suivant :

Théorème 1.66 (Brouwer). *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

Pour cela, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme 1.67 (de non-rétraction). *Soit M une variété à bord et compacte. Alors, il n'existe pas d'application lisse $r : M \rightarrow \partial M$ telle que $r|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$.*

Démonstration . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une telle application r . Soit ω une forme volume sur ∂M . Alors, on sait que $\int_{\partial M} \omega \neq 0$. Notons par ailleurs que $d\omega$ est nulle car c'est une n -forme sur ∂M qui est de dimension $n - 1$. Notons $j : \partial M \rightarrow M$ l'injection canonique. Par hypothèse, $r \circ j = \text{Id}_{\partial M}$. Alors, par la formule de Stokes,

$$0 = \int_M r^* d\omega = \int_M d(r^* \omega) = \int_{\partial M} j^* r^* \omega = \int_{\partial M} \omega \neq 0.$$

On obtient bien une contradiction. $\square$

Démonstration du théorème de Brouwer. Supposons qu'il existe une application continue sans point fixe de la boule fermée dans elle-même, que l'on notera $\overline{B}$. Alors, en approchant f par une application lisse f_ε telle que $\|f_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$ et en considérant $\frac{1}{1+\varepsilon} f_\varepsilon$, on obtient une application lisse de $\overline{B}$ dans elle-même, sans point fixe pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On peut donc supposer dans la suite de cette démonstration que f est lisse.

On définit alors $r(x)$ comme l'intersection de la droite passant par x et $f(x)$ (qui sont distincts) avec la sphère unité, située du côté de x . Autrement dit, $r(x) = x + \lambda(x - f(x))$ où λ est l'unique racine positive de l'équation $\|x + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1$. On sait que r est lisse grâce aux formules donnant les racines d'un polynôme du second degré. De plus, r est bien l'identité en restriction au bord de $\overline{B}$. Nous obtenons une contradiction avec le lemme. $\square$

IV Cohomologie de De Rham

Les sections précédentes étaient consacrées à la construction des formes différentielles et de leurs opérations. Nous allons maintenant les mettre au service de l'étude topologique des variétés en construisant à partir d'elle les groupes de cohomologie de De Rham $H^k(M)$. Intuitivement, ces espaces comptent les trous de M .

Leur intérêt tient à ce qu'ils ne dépendent que de M : deux variétés difféomorphes ont des cohomologies isomorphes, de sorte que la cohomologie fournit des obstructions à l'existence d'un difféomorphisme. Nous démontrerons en fait bien mieux, à savoir que $H^k(M)$ ne dépend que du type d'homotopie de M . C'est un fait remarquable : la définition de $H^k(M)$ repose entièrement sur du calcul différentiel, alors que la conclusion ne relève que de la topologie. C'est aussi ce qui rend ces espaces effectivement calculables, au moyen d'outils comme l'invariance par homotopie, et la suite exacte de Mayer-Vietoris.

IV.1 Formes fermées et formes exactes

On se place sur une variété M de dimension n donnée.

Définition 1.68. Une forme différentielle ω est dite fermée si $d\omega = 0$. Elle est dite exacte s'il existe une forme α telle que $\omega = d\alpha$.

REMARQUE 1.69.

- (a) Une n -forme est toujours fermée.
- (b) Une 0-forme est fermée si et seulement si c'est une fonction localement constante. Elle n'est jamais exacte, sauf si elle est nulle.
- (c) Comme $d \circ d = 0$, une forme exacte est toujours fermée. La réciproque est fausse en général et c'est ce phénomène précis que nous étudierons en détail dans ce chapitre !



La formule de Stokes implique immédiatement les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.70. Soit V une sous-variété compacte orientée de dimension k , sans bord, et ω une k -forme. On note $j : V \rightarrow M$ l'injection canonique.

- (a) Si ω est exacte alors $\int_V j^* \omega = 0$.
- (b) Si ω est fermée et si V est le bord d'une variété orientée Ω , alors $\int_V j^* \omega = 0$.

Démonstration. (a) Si $\omega = d\alpha$, alors $j^* \omega = d(j^* \alpha)$ et la formule de Stokes appliquée à V , qui est sans bord, donne $\int_V j^* d\alpha = 0$.

(b) Si $d\omega = 0$ et si $V = \partial\Omega$, alors $\int_V j^* \omega = \int_\Omega d\omega = 0$. $\square$

Exemple 1.71. Pour se faire une intuition, étudions des exemples de 1-formes définies sur des ouverts du plan. Une 1-forme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\omega = f dx + g dy.$$

Elle est fermée si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Dans le cas où $U = \mathbb{R}^2$ et si ω est fermée, alors elle est toujours exacte. En effet, posons $F(x, y) = \int_0^x f(t, y)dt + \int_0^y g(0, t)dt$. Alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= f(x, y), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)dt + g(0, y) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t, y)dt + g(0, y) = g(x, y), \end{cases}$$

donc $\omega = dF$.

Considérons maintenant la forme $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nous avons déjà vu que $d\omega = 0$. Il s'agit donc d'une forme fermée. En revanche, nous pouvons montrer qu'elle n'est pas exacte sur U . En effet, si ω était exacte, alors son intégrale sur le cercle unité serait nulle (proposition précédente). Or nous avons vu que $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Dans le cas où $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, les p_i étant des points 2 à 2 distincts, on peut construire de multiples exemples de formes fermées non-exactes. Par exemple, en notant τ_u la translation de vecteur $-u$, on peut considérer l'espace V de toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^k a_i \tau_{p_i}^* \omega$, où ω est la forme d'angle du paragraphe précédent et $a_1, \dots, a_k$ sont des coefficients réels.

L'intégrale d'une telle forme sur un petit cercle $\mathcal{C}_i$ autour de p_i (et qui n'entoure qu'un seul p_i) est $2\pi a_i$. Donc l'application linéaire

$$I : V \rightarrow \mathbb{R}^k, \omega \mapsto \left(\int_{\mathcal{C}_1} \omega, \dots, \int_{\mathcal{C}_k} \omega \right)$$

est un isomorphisme et V est de dimension k . De plus, si deux éléments de V diffèrent par une forme exacte alors, d'après la proposition précédente, ils ont la même image par I , donc les mêmes coefficients a_i . Ceci prouve

$$\dim(\{\omega \in \Omega^1(U) \mid \omega \text{ fermée}\} / \{\omega \in \Omega^1(U) \mid \omega \text{ exacte}\}) \geq k,$$

et suggère que d'une manière générale, le quotient de l'espace des formes fermées par celui des formes exactes mesure la complexité d'un espace, le nombre de ses "trous". Nous allons développer cette idée dans la suite du chapitre.

Nous démontrerons en particulier que le quotient ci-dessus est de dimension exactement k (voir proposition 1.85 ci-dessous). ◀

IV.2 Cohomologie de De Rham

Guidé par l'exemple précédent, il est naturel de poser la définition suivante.

Définition 1.72. On note $\mathcal{Z}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$ l'ensemble des formes fermées de degré k sur M et $\mathcal{B}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ exacte}\}$ l'ensemble des formes exactes.

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quotient $H^k(M) = \mathcal{Z}^k(M) / \mathcal{B}^k(M)$ est appelé k -ième groupe de cohomologie de De Rham. La classe d'une k -forme fermée α , notée $[\alpha]$, est appelée classe de cohomologie de α . L'entier k est le degré de la classe.

REMARQUE 1.73.

(a) Si $k < 0$ ou $k > n$, alors $H^k(M) = \{0\}$ puisque $\Omega^k(M) = \{0\}$.

- (b) Si $k = 0$, alors $H^0(M) = \mathcal{Z}^0(M)$ est l'ensemble des fonctions localement constantes sur M . Par conséquent, on peut écrire

$$H^0(M) = \mathbb{R}^{\{\text{composantes connexes de } M\}}$$

Cela confirme l'idée que les groupes de cohomologie mesurent la complexité de l'espace. Les autres $H^k(M)$ sont plus compliqués à calculer. ◀

Certaines opérations sur les formes induisent des opérations en cohomologie.

Proposition 1.74. *Le produit extérieur induit un produit*

$$\cup : H^k(M) \times H^\ell(M) \rightarrow H^{k+\ell}(M)$$

donné par $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ pour toute k -forme fermée α et toute ℓ -forme fermée β . On l'appelle le produit "cup".

Démonstration . Supposons que pour des formes fermées $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, on ait $\alpha' = \alpha + da$ et $\beta' = \beta + db$. Alors,

$$\alpha' \wedge \beta' = \alpha \wedge \beta + da \wedge \beta + \alpha \wedge db + da \wedge db.$$

Comme β est fermée, $da \wedge \beta = d(a \wedge \beta) \pm a \wedge d\beta = d(a \wedge \beta)$ est exacte. De même $\alpha \wedge db$ et $da \wedge db$ sont exactes. Ceci montre que $\alpha' \wedge \beta'$ et $\alpha \wedge \beta$ diffèrent par une forme exacte et donc que le produit extérieur passe au quotient. $\square$

Proposition 1.75. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Alors, $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ induit un morphisme $H^k(N) \rightarrow H^k(M)$. De plus, si $g : N \rightarrow P$ est une autre application lisse, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Démonstration . C'est une conséquence immédiate du fait que pour toute forme ω , $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, ce qui implique que f^* envoie forme fermée sur forme fermée et forme exacte sur forme exacte. $\square$

Bibliographie

- [1] Vincent Humilière. Géométrie différentielle. Notes de cours de M1, Sorbonne Université. Disponibles sur <https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.humiliere/>.
- [2] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2 edition, 2013.