Feuille 1 : formes différentielles, cohomologie de De Rham.

Exercice A *(Algèbre linéaire utile).*
On considère la suite exacte longue de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (de dimension finie)

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0.$$

a) Lorsque $n = 3$, montrer qu'il existe un isomorphisme $V_2 \simeq V_1 \oplus V_3$.

b) Pour n général, peut-on trouver une formule reliant les dimensions des espaces vectoriels V_i ?
(Hint : comment l'équation obtenue pour $n = 3$ se généralise-t-elle ?)

Exercice B *(Quelques quotients).*
Rappelons (Théorème 1.25) que si l'action d'un groupe de Lie G sur une variété X est libre et propre, alors le quotient X/G est une variété lisse (dont la structure lisse est déterminée par le fait que l'application quotient $X \to X/G$ est une submersion lisse).

a) Trouver au moins 5 actions de groupes de Lie différentes et discuter si elles sont libres ou propres. Donner 3 actions de groupes qui ne sont ni libres ni propres.

b) Montrer comment le groupe discret $\mathbb{Z}^n$ peut agir sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Montrer que le quotient est difféomorphe au tore de dimension n, $\mathbb{T}^n = (S^1)^{\times n}$. (Indication : on pourra commencer par le cas $n = 1$ puis procéder par récurrence.)

c) On considère l'action multiplicative de $\{+1, -1\}$ sur la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que cette action est libre et propre. Le quotient obtenu est appelé espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$. Déterminer pour quelles valeurs de n la variété $\mathbb{RP}^n$ est orientable. (Indication : S^n est-elle orientable pour tout n ? L'application antipodale, c'est-à-dire la multiplication par -1 sur S^n, préserve-t-elle ou renverse-t-elle l'orientation ?)

d) Soit $S^{2n+1} = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) | \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1, z_i \in \mathbb{C}\}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. On considère l'action de $S^1 \subset \mathbb{C}$ sur S^{2n+1} donnée par la multiplication scalaire coordonnée par coordonnée. Le quotient de S^{2n+1} par cette action est l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$. Quelle est sa dimension ? Est-il toujours orientable ? Quelle est la surface bidimensionnelle correspondant à $\mathbb{C}P^1$?

Exercice C *(Volume de la sphère).*
On se propose d'intégrer la forme $\omega \in \Omega^2(S^2)$ définie sur la sphère privée du pôle sud par

$$\omega|_{U_S} = \frac{4\, dx_S \wedge dy_S}{(1 + \rho_S)^2}$$

où x_S, y_S sont les coordonnées obtenues par projection stéréographique et $\rho_S = x_S^2 + y_S^2$.

a) Exprimer la restriction de ω à U_S en fonction de dr et $d\theta$ où r et θ sont des coordonnées polaires telles que

$$(x_S, y_S) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

b) Donner une primitive de ω sur $S^2 \setminus \{N, S\}$ de la forme $f(r)d\theta$.

c) Déduire du théorème de Stokes l'intégrale $I(\epsilon)$ de ω sur le domaine

$$\left\{z \in U_S / \epsilon^2 \leq x_S(z)^2 + y_S(z)^2 \leq \epsilon^{-2}\right\}.$$

d) Justifier que $I(\epsilon)$ converge vers

$$\int_{S^2} \omega$$

quand ϵ tend vers 0.

Exercice 1 *(Cohomologie des tores).*
Soient (I_1, I_2) un recouvrement du cercle par deux intervalles ouverts.

a) Soient $U = I_1 \times M$ et $V = I_2 \times M$. Déterminer le noyau et l'image des applications

$$H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V)$$

de la suite longue exacte de Mayer-Vietoris.

b) En déduire que

$$H^k(M \times S^1) = H^k(M) \oplus H^{k-1}(M).$$

c) Donner les nombres de Betti du tore de dimension n.

Exercice 2 *(La cohomologie de De Rham de $\mathbb{CP}^n$).*
Les éléments de $\mathbb{CP}^n$ peuvent être donnés en termes de coordonnées homogènes $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ où $z_i \in \mathbb{C}^n$, et

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

si et seulement s'il existe un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_i = \lambda \cdot w_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

a) Montrer qu'il existe un plongement lisse $i : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ donné par $[z_1, \ldots, z_n] \xrightarrow{i} [z_1, \ldots, z_n, 0]$.

b) Montrer que le complémentaire de $\mathbb{CP}^n$ dans $\mathbb{CP}^{n+1}$ est difféomorphe à $\mathbb{C}^n$.

c) Soit U un petit voisinage ouvert de $\mathbb{CP}^n \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ et soit V le complémentaire de $\mathbb{CP}^n$. Convainquez-vous que $U \cap V$ est homotopiquement équivalent à S^{2n+1}. Utiliser la suite de Mayer-Vietoris sur U et V pour calculer la cohomologie de De Rham de $\mathbb{CP}^{n+1}$.

Exercice 3 *(Complémentaires affines).*
Soit $P_1, \ldots, P_k$ des sous-espaces affines propres de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus P_\ell$ a le même type d'homotopie qu'une sphère de dimension $n - 1 - \dim P_\ell$. *(Hint : Deux sous-espaces affines quelconques peuvent être reliés par une transformation affine)*

b) Montrer que les espaces de cohomologie de $M = \mathbb{R}^n \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$ sont de dimension finie et que les nombres de Betti sont donnés par

$$b_p(M) = b_p(\mathbb{R}^n) + \#\{\ell / \dim(P_\ell) = n - 1 - p\}.$$

On pourra raisonner par récurrence et appliquer le théorème de Mayer-Vietoris à $U = \mathbb{R}^n \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$ et $V = \mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$.*(Hint : Qu'est-ce que $U \cup V$?)*

Exercice 4 *(Complémentaires de fermés).*
Soit A une partie fermée propre de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times [0, \infty[)$ est contractile.

b) Appliquer le théorème de Mayer-Vietoris à $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times]-\infty, 0])$ et $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times [0, \infty[)$. En déduire que

$$H^1\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\})\big) = H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}$$

et pour $k > 1$,

$$H^{k+1}\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\})\big) = H^k(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

Exercice 5 *(Involutions).*
Soit M une variété munie d'une involution φ. On pose

$$\Omega^k_\varphi(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) / \varphi^*\alpha = \alpha\}.$$

a) Montrer que $(\Omega^\bullet_\varphi(M), d)$ est un sous-complexe de $(\Omega^\bullet(M), d)$, que $H^k(\Omega^\bullet_\varphi(M), d)$ s'identifie à un sous-espace $H^k_\varphi(M)$ de $H^k(M)$ et que $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \varphi^*)$ définit un projecteur de $H^k(M)$ d'image $H^k_\varphi(M)$.

b) On suppose φ sans point fixe et l'on note N le quotient de M par $\{\mathrm{Id}, \varphi\}$. Montrer que $H^k(N) \simeq H^k_\varphi(M)$.

c) Utiliser ce qui précède pour calculer la cohomologie des espaces projectifs.

d) Soit P une variété sur laquelle agit proprement et librement un groupe discret Γ. On suppose que Γ admet un sous-groupe normal Γ_0 tel que $\Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Appliquer ce qui précède avec $M = P/\Gamma_0$ et $N = P/\Gamma$.

e) Montrer que le ruban de Moebius est un quotient de $S^1 \times \mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Calculer sa cohomologie avec la méthode précédente. Ne pouvait-on pas faire plus simple ?

Exercice 8 *(Kodaira-Thurston).*
Calculer le premier nombre de Betti de la variété de Kodaira–Thurston donnée comme le quotient de $\mathbb{R} \times T^3$ par la relation d'équivalence

$$(x, y, z, t) \sim (x', y', z', t') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x - x' = k, \quad y = y', \quad t = t', \quad z' = kt + z.$$