Feuille 2 : Transversalité, intersections.

Exercice A *(Algèbre linéaire utile).*

a) Soient A, B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension finie. Si A et B s'intersectent transversalement, c'est-à-dire si $A + B = V$, montrer que

$$\mathrm{codim}(A) + \mathrm{codim}(B) = \mathrm{codim}(A \cap B).$$

(*Rappel :* $\mathrm{codim}(A) = \dim(V/A)$).

b) Soient X, Y deux sous-variétés transverses de M et $y \in A \cap B$. Montrer que $T_y(A \cap B) = T_y A \cap T_y B$.

c) Montrer que si X, Y sont deux sous-variétés de M qui s'intersectent transversalement, alors $\mathrm{codim}(X \cap Y) = \mathrm{codim}(X) + \mathrm{codim}(Y)$. Par convention, la variété vide est de dimension n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice B *(Orientation linéaire).*

Supposons que l'on ait la suite exacte courte $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$. Montrer qu'une orientation sur deux quelconques de ces espaces vectoriels oriente aussi le troisième.

Exercice C *(Exemples).*

1) Soit V un espace vectoriel et considérons $V \oplus V$. Est-ce que $V \times \{0\}$ intersecte transversalement la diagonale de $V \oplus V$?

2) L'intersection non transverse de deux sous-variétés peut-elle être une sous-variété ?

3) Pour quelles valeurs de α la sphère $S(\alpha) : x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$ intersecte-t-elle l'hyperboloïde $H : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ transversalement ? Faites des dessins !

Exercice 1 *(Hyperplans).*

Soit $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une sous-variété de dimension d. Pour $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, notons $H_a = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle a, x\rangle = 1\}$. Alors, pour presque tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'hyperplan H_a est transverse à X, et $X \cap H_a$ est donc une sous-variété de dimension $d - 1$.

Exercice 2 *(Sections transverses).*

Soient B une variété compacte, $\pi : E \to B$ un fibré vectoriel de rang k au-dessus de B, et $0_E \subset E$ sa section nulle.

a) Il existe des sections globales $s_1, \ldots, s_m$ de E telles que, pour presque tout $a \in \mathbb{R}^m$, la section $s_a = \Sigma_i a_i s_i$ soit transverse à 0_E. Pour un tel a, $s_a^{-1}(0_E)$ est une sous-variété de B de codimension k. (*Danger : si l'on se contente de perturber une section, elle ne reste pas une section.*)

b)* Soit E le fibré tangent TB de B. Montrer que l'intersection d'une section générique avec 0_s donne un entier, qui est un invariant par difféomorphisme de la variété B. Essayer de deviner quel est ce nombre.

c) Supposons que $\mathrm{rang}(E) > \dim(B)$. Montrer qu'il existe un autre fibré vectoriel E' tel que $E' \oplus \mathbb{R} = E$.

Exercice 3 *(Surfaces chevelues).*

Montrer que S^2 et le tore T^2 ne sont pas difféomorphes, sans utiliser la cohomologie de de Rham.
(Indication : quelles « coupes de cheveux » peut avoir T^2 ?)

Exercice 4 *(groupes agissant transitivement).*

Soit G un groupe de Lie agissant transitivement et de façon lisse sur une variété Y, et soient Z et W deux sous-variétés de Y. Alors, pour presque tout $g \in G$,

$$(g \cdot Z) \pitchfork W.$$

Exercice 5 *(Degrés).*

a) Montrer que le degré d'un difféomorphisme vaut ± 1, selon qu'il préserve ou renverse les orientations. Si une application est de degré ± 1, est-ce un difféomorphisme ?

b) Quel est le degré de l'application antipodale sur $S^n \to S^n$?

c) Considérons la suite d'applications lisses $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Montrer que $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Exercice 6 *(d'Alembert-Gauss).*
Tout polynôme non-constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine :

a) Montrer qu'un polynôme P, vu comme une application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, induit une application $\tilde{P} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, via l'application $\tilde{P}([z;1]) = [P(z);1]$.

b) Montrer que le degré de l'application $\tilde{P}$ est égal au degré du polynôme P.

c) Montrer que $\tilde{P}$ est surjective ; par conséquent $P^{-1}(0)$ est non vide.

d) Comprendre que si la théorie du degré était établie seulement avec des coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, on pourrait tout de même montrer que tout polynôme de degré **impair** a une racine.

Exercice 7 *(Compositions).*
Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite d'applications lisses entre variétés, et supposons que g est transverse à une sous-variété W de Z. Montrer que $f \pitchfork g^{-1}(W)$ si et seulement si $(g \circ f) \pitchfork W$.

Exercice 8 *(Prélude à l'astuce de Whitney (a.k.a. the Whitney trick)).*
Soit M une variété fermée de dimension n et $\gamma : S^1 \to M$ un chemin lisse.

a) Pour quels n peut-on perturber γ en un plongement ?

b)* Supposons de plus qu'il existe une application $d : D^2 \to M$. Pour quels n peut-on s'assurer que d peut être perturbée en un plongement ?

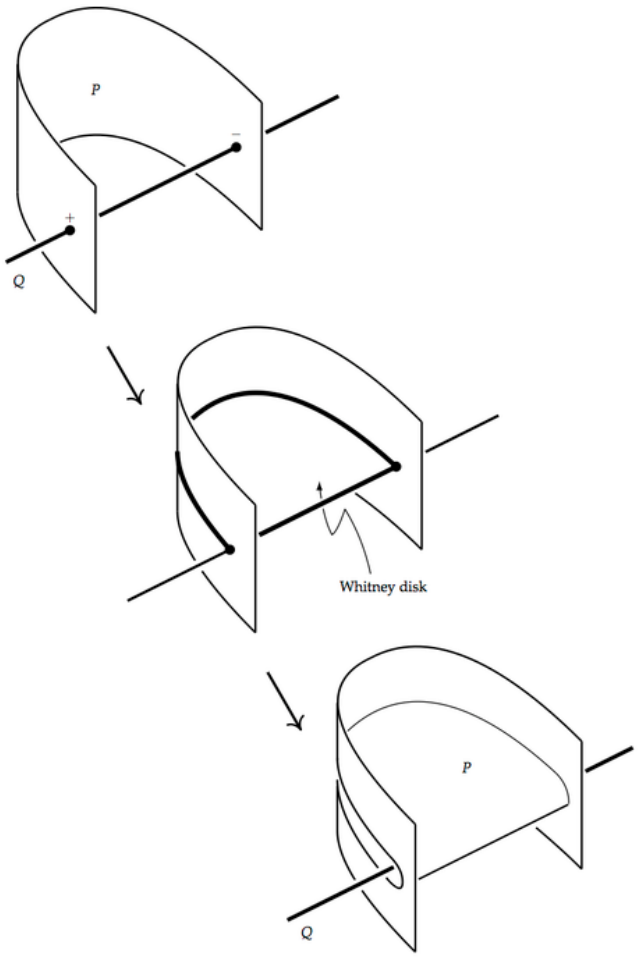


FIGURE 1 – L'astuce de Whitney trick est la pierre angulaire de la théorie de la topologie différentielle. C'est la manœuvre de base qui intervient dans la preuve de la *conjecture de Poincaré lisse* en dimension ≥ 5. En dimension 4, elle ne fonctionne pas et, de fait, la conjecture y est toujours ouverte. Image tirée de *The wild world of 4-manifolds* de A. Scorpan.