Feuille 3 : Théorie de Morse et premiers pas en topologie des variétés lisses

---

Exercice A *(Fonctions de Morse).*
Trouver tous les points critiques des fonctions suivantes et déterminer lesquels sont non dégénérés. Calculer l'indice de chacun des points non dégénérés :

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$
2. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$
3. $f(x, y) = x^2 y^2$
4. $f(x, y) = x^4 + y^2$
5. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy$

Exercice B *(La selle de singe).*
Étudier les points critiques de la fonction $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Dessiner également son graphe et quelques-uns de ses ensembles de niveau. Voyez-vous d'où elle tire son nom ?

Exercice 1 *(Variétés compactes).*
Montrer que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés. En déduire qu'une fonction de Morse sur une variété compacte n'a qu'un nombre fini de points critiques.

Exercice 2 *(Une fonction de Morse « parfaite »).*
Considérons $\mathbb{C}P^n$, avec des coordonnées homogènes $[Z_0, \ldots, Z_n]$, où $|Z_0|^2 + |Z_1|^2 + \cdots + |Z_n|^2 = 1$, et où deux $(n+1)$-uplets sont identifiés si et seulement s'ils sont reliés par la multiplication par un scalaire du cercle unité. Considérons l'application

$$f([Z_0, Z_1, \ldots, Z_n]) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, |Z_i|^2,$$

où les c_i sont des constantes réelles distinctes. Montrer que f est une fonction de Morse et calculer ses points critiques ainsi que leurs indices.

Exercice 3 *(Théorème de Reeb, version simple).*

1. Montrer qu'une fonction de Morse sur une variété compacte M possède au moins deux points critiques. Montrer que S^n admet une fonction de Morse ayant exactement deux points critiques. Montrer qu'il existe des fonctions de Morse sur S^n ayant plus de 2 points critiques.
2. Montrer que si une variété lisse M de dimension n admet une fonction de Morse f ayant exactement 2 points critiques, alors M est homotopiquement équivalente à la sphère S^n. On pourra utiliser l'astuce d'Alexander : tout homéomorphisme de S^{n-1} est isotope à l'identité de manière continue (mais non lisse !).
3. Une fonction de Morse sur le tore de dimension deux peut-elle avoir 3 points critiques ? Et 4 ?
4. Trouver le nombre minimal de points critiques que doit posséder une fonction de Morse sur $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 4 *(Les fonctions hauteur sont (presque toujours) de Morse).*
Soit M^n une variété de dimension n et $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ un plongement lisse. Montrer que, éventuellement après perturbation de f, la fonction hauteur $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ donnée par $h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ est une fonction de Morse lorsqu'elle est restreinte à M. Autrement dit, montrer que pour presque tout plongement f de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$, la fonction $h \circ f$ est une fonction de Morse.

Exercice 5 *(Dualité de Poincaré).*
Soit M une variété lisse et f une fonction de Morse. Quel est le lien entre les points critiques de f et ceux de $-f$?

Exercice 6 *(Produits).*
Montrer que si f et g sont des fonctions de Morse sur M et N respectivement, alors $f + g$ est une fonction de Morse sur $M \times N$.