Algèbre Commutative 2022/2023
T.D.1

Exercice 1:
(1) Montrer qu'il n'y a pas de morphismes d'anneaux
   (a) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$;
   (b) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$;
   (c) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$;
   (d) de $\mathbb{Z}/n$ dans $\mathbb{Z}$;
(2) Montrer qu'il y a un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n$ dans $\mathbb{Z}/m$ si et seulement si $m|n$ et que, dans ce cas, ce morphisme est unique.

Exercice 2:
(1) Soit K un corps commutatif. Montrer qu'une K-algèbre commutative intègre de K-dimension finie est un corps.
(2) Soit A un anneau commutatif. Montrer que si A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux, $A \setminus A_{tors} = A^{\times}$. En déduire que si A est intègre les PSSE: (1) A est un corps;
(2) $|\mathcal{I}_A| = 2$;
(3) $|\mathcal{I}_A| < +\infty$.

Exercice 3: Soit A un anneau commutatif. Montrer que les A-algèbres $A[X, X^{-1}]$ et $A[X, Y]/\langle XY - 1\rangle$ sont isomorphes.

Exercice 4: Soit K un corps commutatif et $k \subset K$ un sous-corps.
(1) Soit $0nK$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes
   (a) il existe un polynôme non nul $P \in k[T]$ tel que $P(x) = 0$;
   (b) la sous-k-algèbre $k[x] \subset K$ engendrée par x est de k-dimension finie;
   (c) la sous-k-algèbre $k[x] \subset K$ engendrée par x est un corps.
   On dit qu'un élément $x \in K$ vérifiant les propriétés équivalentes (a), (b), (c) ci-dessus est algébrique sur k.
(2) Déduire de 1. que l'ensemble des éléments de K algébriques sur k est un sous-corps de K contenant k.

Exercice 5: (Polynômes vs fonctions polynomiales). Soit A un anneau commutatif et $n \geq 0$ un entier. On peut associer à tout $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ la fonction $ev_{-}(P) : A^n \to A$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto ev_{\underline{x}}(P) =: P(\underline{x})$. Montrer que l'application $\epsilon : A[X_1, \ldots, X_n] \to A^{A^n}$, $P \mapsto ev_{-}(P)$ est un morphisme de A-algèbres. Supposons de plus que $A = K$ est un corps. Montrer que le morphisme $\epsilon_n : K[X_1, \ldots, X_n] \to K^{K^n}$ est injectif si et seulement si K est infini.

Exercice 6: Soit A un anneau commutatif.
(1) (a) Soit $I, J \subset A$ des idéaux; notons $\overline{A} := A/I$ et $\overline{J} := p_I(J)$. Montrer que si $I \subset J$, on a un isomorphisme canonique d'anneaux $A/J \tilde{\to} \overline{A}/\overline{J}$. En déduire qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $A/(I + J) \tilde{\to} \overline{A}/\overline{J}$.
   (b) Soit $I \subset A$ un idéal. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[X]/I[X] \tilde{\to} (A/I)[X]$.
   (c) Soit $n \geq 1$ un entier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ d'image $\overline{P}$ *via* le morphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n[X]$. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux

$$\mathbb{Z}/n[X]/\overline{P}\mathbb{Z}/n[X] \tilde{\to} (\mathbb{Z}[X]/P\mathbb{Z}[X])/n(\mathbb{Z}[X]/P\mathbb{Z}[X]).$$

(2) Pour toute A-algèbre B et $\underline{b} \in C_r(B)$, on note $ev_P \mapsto P(\underline{b})$ le morphisme d'évaluation $A[X_1, \ldots, X_r] \to B$ correspondant à $\underline{b}$. On peut associer à tout $\underline{P} \in A[X_1, \ldots, X_r]^s$ l'application $ev_{-}(\underline{P}) : C_r(B) \to B^r$, $\underline{b} \mapsto (P_1(\underline{b}), \ldots, P_s(\underline{b}))$. Montrer qu'il existe une A-algèbre $A \to \overline{P}$ munie d'éléments $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_r \in \overline{P}$ tels

que pour tout A-algèbre $\phi : A \to B$ l'application

$$\begin{array}{lcl} Hom_{A-alg}(\overline{P}, B) & \to & C_r(B) \cap ev_{-}(\underline{P})^{-1}(0) \\ \phi : \overline{P} \to B & \mapsto & (\phi(p_1), \dots, \phi(p_r)) \end{array}$$

est bijective.

(3) Soit N_1 et N_2 deux monoïdes. On suppose que N_1 est commutatif. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[N_1 \times N_2] \tilde{\to} A[N_1][N_2]$.

(4) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$A[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_r][X_i] \tilde{\to} A[X_1, \dots, X_r], \ i = 1, \dots, r.$$

Exercice 7: (Anneaux à quatre éléments). Donner, à isomorphisme près, la liste des anneaux à quatre éléments.

Exercice 8: Soit $A_1, \dots, A_r$ des anneaux, déterminer les idéaux (resp. les idéaux premiers, resp. les idéaux maximaux) de l'anneau produit $A_1 \times \cdots \times A_r$ en fonction des idéaux (resp. les idéaux premiers, resp. les idéaux maximaux) de $A_1, \dots, A_r$.

Exercice 9: Soit $I \subset A$ un idéal. Montrer que $I \subset \mathcal{J}_A$ si et seulement si $1 - I \subset A^\times$ et que, dans ce cas, $p_I^{-1}((A/I)^\times) \subset A^\times$.

Exercice 10:

(1) Montrer que si $a \in A$ est nilpotent, $1 + a \in A^\times$. En déduire que la somme d'un élément nilpotent et d'un élément inversible est encore inversible.

(2) Montrer que $A[X]^\times$ est l'ensemble des polynômes $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ tels que $a_0 \in A^\times$ et a_n est nilpotent, $n \geq 1$. Déterminer $A[X_1, \dots, X_r]^\times$.

Exercice 11: Soit A un anneau commutatif.

(1) Soit $I_1, \dots, I_r$ des idéaux et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. Montrer que si $\mathfrak{p} \supset \prod_{1 \leq i \leq r} I_i$ il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $\mathfrak{p} \supset I_i$.

(2) Soit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers et $I \subset A$ un idéal. Montrer que si $I \subset \cup_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{p}_i$ il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $I \subset \mathfrak{p}_i$.

Exercice. 12: Soit A un anneau commutatif. Pour une partie $X \subset A$ on note $V(X) := \{\mathfrak{p} \in spec(A) \mid X \subset \mathfrak{p}\} \subset spec(A)$. Notons $I_X \subset A$ l'idéal engendré par X. Montrer que $V(X) = V(I_X) = V(\sqrt{I_X})$. Montrer que les $V(I)$, $I \in \mathcal{I}_A$ vérifient les axiomes des fermés d'une topologie sur $spec(A)$ (que l'on appelle topologie de Zariski) et que si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'application $\phi^{-1} : \mathcal{I}_B \to \mathcal{I}_A$ est continue pour cette topologie.

Exercice 13: Soit A un anneau commutatif.

(1) Montrer que les PSSE:
   - (1) Toute suite d'idéaux décroissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang;
   - (2) Tout ensemble non vide d'idéaux possède un élément minimal pour l'inclusion.

   On dit alors que A est un anneau artinien.

Dans ce qui suit, on suppose de plus A artinien. Montrer que

(2) si A est intègre, c'est un corps;
(3) $spm(A) = spec(A)$;
(4) $spec(A)$ est fini;
(5) si A est réduit c'est un produit fini de corps;
(6) $\sqrt{0}$ est un idéal nilpotent *i.e.* il existe un entier $N \geq 1$ tel que $(\sqrt{0})^N = 0$.

Remarque: On verra plus tard que tout anneau artinien est noetherien.