Algèbre Commutative 2022/2023
T.D.2

Exercice 1: On dit qu'un anneau commutatif A est local s'il possède un unique idéal maximal. Soit A un anneau local intègre dont l'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est principal, engendré par π.

(1) On suppose que $\cap_{n\geq 1}\mathfrak{m}^n = 0$. Montrer que tout $0 \neq a \in A$ s'écrit sous la forme $a = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$, $n \geq 0$ et que cette écriture est unique. En déduire que A est principal (donc en particulier noetherien).

(2) On suppose que A est noetherien. Montrer que pour tout idéal $I \subset A$, $\mathfrak{m}I = I$ implique $I = 0$. En déduire que $\cap_{n\geq 1}\mathfrak{m}^n = 0$.

Exercice 2: Soit A un anneau commutatif.

(1) Soit $a \in A$ et $I \subset A$ un idéal. Montrer que si les idéaux $I + Aa$ et $(I : Aa) := \{x \in A \mid ax \in I\}$ sont de type fini alors I est de type fini.

(2) [Utilise Zorn] Montrer que A est noetherien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.

Exercice 3: Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est irréductible si pour tout idéaux I_1, I_2 de A, $I = I_1 \cap I_2$ implique $I = I_1$ ou $I = I_2$. On suppose de plus A noetherien. Montrer que

(1) tout idéal $I \subset A$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux irréductibles;

(2) pour tout idéal $I \subset A$ irréductible, $\sqrt{I}$ est premier;

(3) tout idéal radiciel $I \subset A$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers;

(4) A ne possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux pour $\subset$.

Exercice 4: Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 5: Si K est un corps, on note $K(X_1, \dots, X_n) := Frac(K[X_1, \dots, X_n])$. Montrer que si A est un anneau intègre de corps des fractions K alors $Frac(A[X_1, \dots, X_n]) = K(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 6: Soit k un corps et $A = k[X_1, \dots, X_4]/X_1X_2 - X_3X_4$. On note $x_i \in A$ l'image de X_i par la projection canonique $p : k[X_1, \dots, X_4] \to A$, $i = 1, \dots, 4$.

(1) En observant que, dans A, on a $\underline{X}^{\underline{a}} = X_1^{a_1+a_3}X_2^{a_2+a_3}X_4^{a_4-a_3}$ si $a_4 \geq a_3$ ou $\underline{X}^{\underline{a}} = X_1^{a_1+a_4}X_2^{a_2+a_4}X_3^{a_3-a_4}$ si $a_3 \geq a_4$, montrer que tout $P \in k[X_1, \dots, X_4]$ s'écrit sous la forme

$$P = A_P(X_1, X_2) + X_3B_P(X_1, X_2, X_3) + X_4C_P(X_1, X_2, X_4) \text{ modulo } (X_1X_2 - X_3X_4).$$

(2) Montrer que le morphisme canonique d'anneaux $\phi : k[X_1, \dots, X_4] \to k(X_3)[X_1, X_2]$, $X_i \mapsto X_i$, $i = 1, 2, 3$, $X_4 \mapsto \frac{X_1X_2}{X_3}$ a pour noyau l'idéal engendré par $X_1X_2 - X_3X_4$. En déduire que A est intègre.

(3) Montrer que les x_i, $i = 1, \dots, 4$ sont irréductibles et deux à deux non associés dans A.

(4) En déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 7: (Entiers de Gauss) L'anneau des entiers de Gauss est, par définition, le sous-anneau $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ engendré par $i := \sqrt{-1}$. Notons $\mathcal{P}_\mathbb{Z} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ≥ 2 et

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a, b \in \mathbb{N},\ n = a^2 + b^2\}.$$

(1) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}[T]/T^2 + 1 \tilde{\to} \mathbb{Z}[i]$.

Notons $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $z \mapsto z\overline{z}$.

(2) Montrer que $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ est un morphisme de monoïdes et montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid N(z) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$;

(3) Montrer que $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ munit $\mathbb{Z}[i]$ d'un stathme euclidien;

(4) Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}$ les PSSE.

(i) p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$;
(ii) $p \equiv 3[4]$;
(iii) p n'est pas somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.

(5) Montrer que les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont - modulo $\mathbb{Z}[i]^\times$ - les éléments $\begin{array}{r} p \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p \equiv 3[4]; \\ z \in \mathbb{Z}[i] \text{ tels que } N(z) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}. \end{array}$
(6) Montrer qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés ssi pour tout $p \equiv 3[4]$, $2|\nu_p(n)$.

Exercice 8: L'objectif de cet exercice est de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal mais non euclidien.
(1) Soit A un anneau euclidien. Montrer qu'il existe un élément $a \in A$, $a \notin A^\times$ tel que l'application $p_{Aa} : A^\times \cup \{0\} \to A/Aa$ soit surjective.
Dans ce qui suit, on note $\alpha := \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $\overline{\alpha} := \frac{1-i\sqrt{19}}{2}$, $A := \mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$.
(2) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}[X]/X^2 - X + 5 \tilde{\to} A$;
(3) Montrer que $A/2A$ et $A/3A$ sont des corps;
(4) Déterminer $A^\times$ et en déduire que A n'est pas euclidien;
(5) Montrer que pour tout $0 \neq a, b \in A$ il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et soit $a = qb + r$ soit $2a = qb + r$;
(6) En déduire que A est principal.

Exercice 9. On dit qu'un anneau A intègre de corps des fraction K est intégralement clos si

$$A = \{x \in K \mid \exists\, P_x = T^d + \sum_{0 \leq n \leq d-1} a_n T^n \in A[X] \text{ tel que } P_x(x) = 0\}.$$

Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

Exercice 10: (Deux critères d'irréductibilité dans les anneaux de polynômes)
(1) **(Critère d'Eisenstein)**
  (a) Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in A[X]$. Montrer que s'il existe un irréductible p de A tel que $v_p(a_0) \leq 1$, $v_p(a_n) \geq 1$, $0 \leq n \leq deg(P) - 1$ et $v_p(a_{deg(P)}) = 0$ alors P est irréductible dans $K[X]$.
  (b) Montrer que $P \in K[X]$ est irréductible si et seulement si $P(X+1) \in K[X]$ est irréductible. En déduire que pour tout nombre premier p, le polynôme $\Phi_p(X) = X^{p-1} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
(2) **(Critère de réduction)**
  (a) Soit A, B des anneaux intègres et L le corps des fractions de B. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On note encore $\phi = A[X] \to B[X]$ l'unique morphisme de A-algèbres $A[X] \to B[X]$, $X \mapsto X$ (pro. univ. de $A[X]$); explicitement $\phi(\sum_{n \geq 0} a_n X^n) = \sum_{n \geq 0} \phi(a_n) X^n)$. Soit $P \in A[X]$. Montrer que si $deg(\phi(P)) = deg(P)$ et $\phi(P)$ est irréductible dans $L[X]$ alors P ne peut s'écrire sous la forme $P = P_1 P_2$ avec $P_1, P_2 \in A[X]$ de degré ≥ 1.
  (b) Montrer que $P = X^5 - 5X^2 - 6X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 11: (Polynômes cyclotomiques) Notons $\mu_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines $n$ièmes de 1 et $\mathfrak{u}_n \subset \mu_n$ le sous-ensemble des générateurs de μ_n (les racines primitives n-ièmes de 1). Soit $\Phi_n = \prod_{u \in \mathfrak{u}_n} (T - u) \in \mathbb{C}[T]$ le $n$ième polynôme cylotomique.
(1) Montrer que $(X^n - 1) = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
(2) Montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 2$;
(3) Soit $\zeta \in \mathfrak{u}_n$ et notons P le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$. On veut montrer que $P = \Phi_n$.
  (a) Montrer qu'il suffit de prouver que si p est un nombre premier $\not| n$, ζ^p est aussi une racine de P.
  (b) Supposons le contraire et notons Q le polynôme minimal de ζ^p sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $\Phi_n = PQR$ dans $\mathbb{Q}[T]$ avec $P, Q, R \in \mathbb{Z}[T]$ unitaire.
  (c) Montrer que $P|Q(T^p)$ dans $\mathbb{Z}[T]$ et en déduire que tout diviseur irréductible Π de la réduction modulo p $\overline{P}$ de P dans $\mathbb{F}_p[T]$ est aussi un diviseur irréductible de $\overline{Q}$ dans $\mathbb{F}_p[T]$.
  (d) En déduire que $\Pi^2 | T^n - \overline{1}$ dans $\mathbb{F}_p[T]$ et conclure.