Algèbre Commutative 2023/2024
T.D.3

Exercice 1: Soit A un anneau commutatif et $S \subset A \setminus \{0\}$ une partie multiplicative.
(1) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $S^{-1}(A[X]) \tilde{\to} (S^{-1}A)[X]$.
(2) Montrer que les localisés d'un anneau principal en ses idéaux premiers non nuls sont des anneaux de valuation discrète (on rappelle qu'un anneau de valuation discrète est un anneau principal ne possèdant qu'un seul idéal premier non nul).
(3) Si $I, J \subset A$ sont des idéaux, montrer que $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$ et $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$.
(4) Si $I \subset J$ sont des idéaux et si on note $\overline{S} \subset A/I$ l'image de S *via* la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/I$, montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$S^{-1}I/S^{-1}J \tilde{\to} \overline{S}^{-1}(I/J).$$

Exercice 2:
(1) Soit A un anneau commutatif et $a \in A$ non nilpotent. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[T]/(Ta-1) \tilde{\to} A_a$.
(2) Soit p, q deux premiers distincts. Déterminer les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $A := \mathbb{Z}/pq$ et déterminer dans chaque cas le localisé $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$.
(3) Soit A un anneau principal de corps des fractions $A \hookrightarrow K := Frac(A)$ et soit $A \subset B \subset K$ un sous-anneau de K contenant A. On pose $S := A \cap B^\times$. Montrer que $S \subset A \setminus \{0\}$ est une partie multiplicative de A et que le morphisme canonique $S^{-1}A \to B$ induit par l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un isomorphisme.

Exercice 3: Soit A un anneau commutatif.
(1) Déterminer le noyau du morphisme canonique $A \to \prod_{\mathfrak{m} \in Spm(A)} A_\mathfrak{m}$;
(2) Montrer que les PSSE:

(i) A est réduit;
(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, $A_\mathfrak{p}$ est réduit;
(iii) Pour tout $\mathfrak{m} \in Spm(A)$, $A_\mathfrak{m}$ est réduit;

(3) L'énoncé de 2. reste-t-il vrai si on remplace réduit par intègre?
(4) Soit $S \subset A \setminus \{0\}$ une partie multiplicative. Montrer que si A est réduit, (resp. intègre, resp. intégralement clos, resp. factoriel) alors $S^{-1}A$ l'est aussi.

Exercice 4: Montrer qu'on a un morphisme canonique injectif d'anneaux $A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p}) := A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Montrer que $\mathfrak{p}$ est maximal ssi ce morphisme est un isomorphisme.

Exercice 5: Soit k un corps et A une k-algèbre.
(1) Supposons que A est un corps. Pour tout $x \in A$, on note $k(x) \subset A$ le plus petit sous-corps de A contenant x et k. Montrer qu'on a l'alternative suivante (algébrique / transcendant - *cf.* TD1, Ex. 4):
- Soit le morphisme d'évalutation $ev_x : k[X] \tilde{\to} k[x]$ est un isomorphisme de k-algèbres et le morphisme $k[X] \overset{ev_x}{\tilde{\to}} k[x] \hookrightarrow k(x)$ se localise en un isomorphisme de corps $k(X) \tilde{\to} k(x)$. En particulier $k[x]$ (donc a fortiori $k(x)$) est de dimension infinie sur k.
- Soit il existe un unique polynôme irréductible unitaire $P_x \in k[X]$ tel que $\ker(ev_x) = k[X]P_x$ et le morphisme de k-algèbres $ev_x : k[X] \twoheadrightarrow k[x]$ se factorise en un isomorphisme $k[X]/P_x \tilde{\to} k[x]$. En particulier $k[x] = k(x)$ et $k(x)$ est de dimension finie sur k, égale au degré de P_x.

(2) Montrer que le corps des fractions $k(X)$ de l'anneau des polynômes à une indéterminée $k[X]$ sur k n'est pas une k-algèbre de type fini.
(3) (Nullstellensatz) Supposons encore que A est un corps. Montrer que si A est de type fini sur k alors A est de dimension finie sur k. On pourra procéder par récurrence sur le nombre de générateurs de A comme k-algèbre.

(4) Soit A une k-algèbre de type fini. Soit $a \in A$ non nilpotent et $\mathfrak{m} \in spm(A_a)$.
  (a) Montrer que $A_a/\mathfrak{m}$ est de k-dimension finie.
  (b) On note $\iota_a : A \to A_a$ le morphisme de localisation. Montrer que $\mathfrak{p} := \iota_a^{-1}(\mathfrak{m}) \in spm(A)$.

(5) Soit A une k-algèbre de type fini. Montrer que $\cap_{\mathfrak{p}\in spec(A)}\mathfrak{p} = \cap_{\mathfrak{m}\in spm(A)}\mathfrak{m}$. En déduire que pour tout idéal $I \subset A$

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in spm(A),\ I\subset\mathfrak{m}} \mathfrak{m}.$$

(6) On suppose dans cette question que k est algébriquement clos *i.e.* que la seule extension de corps de k-dimension finie est l'extension triviale (*e.g.* $\mathbb{C}$ a cette propriété).
  (a) Montrer que les idéaux maximaux de $k[X_1, \dots, X_r]$ sont les idéaux engendrés par les $X_1 - a_1, \dots, X_r - a_r$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in k^r$.
  (b) Soit $I \subset k[X_1, \dots, X_r]$ un idéal. On note $V(I) := \{\underline{a} \in k^r \mid P(\underline{a}) = 0,\ P \in I\} \subset k^r$ et $V^m(I) := \{\mathfrak{m} \in spm(A) \mid I \subset \mathfrak{m}\}$. Montrer qu'on a des bijections canoniques

$$V^m(I)\tilde{\to}Hom_{Alg/k}(k[X_1, \dots, X_r]/I, k)\tilde{\to}V(I).$$