Algèbre Commutative 2023/2024
T.D.5

Exercice 1: Soit A un anneau.

(1) Montrer que si $I, J \subset A$ sont des idéaux on a un isomorphisme canonique de A-modules (en fait de A-algèbres) $A/I \otimes_A A/J \tilde{\to} A/(I+J)$. En déduire que si I, J sont premiers entre eux $A/I \otimes_A A/J = 0$.

(2) (a) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n] \tilde{\to} A[X_1, \ldots, X_n]$.

(b) Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et $P \in A[X]$, montrer qu'on a un isomorphisme canonique de B-algèbres $B \otimes_A (A[X]/P) \tilde{\to} B[X]/\varphi(P)$ (en particulier, si $P = 0$, on obtient $B \otimes_A A[X] \tilde{\to} B[X]$, où on note encore $\varphi : A[X] \to B[X]$ le morphisme obtenu en appliquant φ aux coefficients.

(c) Calculer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Est-ce un corps? Même question avec $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice 2: Soit M un A-module. Montrer que pour toute suite exacte courte de A-modules

$$0 \to N' \overset{u}{\to} N \overset{v}{\to} N'' \to 0$$

(1) La suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \overset{u\circ}{\to} \mathrm{Hom}_A(M, N) \overset{v\circ}{\to} \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$

est exacte. (On dit que $Hom_A(M, -)$ est un foncteur exact à gauche).

(2) La suite

$$M \otimes_A N' \overset{Id \otimes u}{\to} M \otimes_A N \overset{Id \otimes v}{\to} M \otimes_A N'' \to 0$$

est exacte. (On dit que $M \otimes_A -$ est un foncteur exact à droite).

Exercice 3:

(1) Soit $S \subset A \setminus A_{tors}$ une partie multiplicative et M, N deux A-modules. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de $S^{-1}A$-modules $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \tilde{\to} S^{-1}(M \otimes_A N)$

(2) Soit $S \subset A \setminus A_{tors}$ une partie multiplicative. Montrer que pour toute suite exacte de A-modules $M' \to M \to M''$ la suite $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ est encore une suite exacte de $S^{-1}A$-modules.

(3) Montrer que pour tout A-module M, les PSSE:

(a) $M = 0$;
(b) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$;
(c) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$;

(4) On dit qu'un A-module N est plat si pour toute suite exacte courte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ la suite $0 \to N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$ est encore une suite exacte courte de A-modules. Montrer que les PSSE:

(a) N est un A-module plat;
(b) $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module plat pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$;
(c) $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$.