Algèbre Commutative 2023/2024
T.D.5

Exercice 1:

(1) Soit A un anneau. Montrer que pour tout A-module M et idéal $I \subset A$ on a un isomorphisme canonique de A-modules $A/I \otimes_A M \tilde{\to} M/IM$.

(2) Soit A un anneau. Montrer que si $I, J \subset A$ sont des idéaux on a un isomorphisme canonique de A-modules (en fait de A-algèbres) $A/I \otimes_A A/J \tilde{\to} A/(I+J)$. En déduire que si I, J sont premiers entre eux $A/I \otimes_A A/J = 0$.

(3) Soit A un anneau principal, $\mathfrak{p} \in spec(A)$ et M un A-module de type fini. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ calculer $A/\mathfrak{p}^n \otimes_A M$ en fonction des invariants de M. Si N est un autre A-module de type fini, calculer les invariants de $M \otimes_A N$ en fonction de ceux de M et N.

(1) L'application $\phi : A \times M \to M/IM$, $(a, m) \mapsto \overline{am}$ est A-2-linéaire. De plus, pour tout $m \in M$, $I \subset \ker(\phi(-, m))$ donc (prop. univ. du quotient) $\phi(-, m) : A \to M/IM$ se factorise de façon unique en un morphisme de A-modules $\overline{\phi}(-, m) : A/I \to M/IM$ et on vérifie immédiatement que l'application induite $\overline{\phi} : A/I \times M \to M/IM$, $(\overline{a}, m) \mapsto \overline{am}$ est encore A-2-linéaire donc (prop. univ. du produit tensoriel) se factorise de façon unique en un morphisme de A-modules $\widetilde{\phi} : A/I \otimes M \to M/IM$, $\overline{a} \otimes m \mapsto \overline{am}$. Inversement, considérons le morphisme de A-modules $\psi : M \to A/I \otimes_A M$, $m \mapsto \overline{1} \otimes m$. Par définition $IM \subset \ker(\psi)$ donc (prop. univ. du quotient) $\psi : M \to A/I \otimes_A M$ se factorise de façon unique en un morphisme de A-modules $\overline{\psi} : M/IM \to A/I \otimes_A M$. On vérifie sur les constructions que $\overline{\psi} \circ \widetilde{\phi} = Id$, $\widetilde{\phi} \circ \overline{\psi} = Id$.

(2) On applique la Question (1) avec $M = A/J$ pour obtenir un isomorphisme de A-modules $A/I \otimes_A A/J \tilde{\to} (A/J)/I(A/J) = (A/J)/((I+J)/J) \tilde{\to} A/(I+J)$.

(3) Si $\mathfrak{p} \in spec(A)$ et $m \geq n$, comme $\mathfrak{p}^m + \mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^n$ on obtient (en prenant $I := \mathfrak{p}^m$ et $J = \mathfrak{p}^n$) $A/\mathfrak{p}^m \otimes_A A/\mathfrak{p}^n \tilde{\to} A/\mathfrak{p}^n$. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$, pour tout $m, n \geq 1$, on a $\mathfrak{p}^m + \mathfrak{q}^n = A$ donc (en prenant $I := \mathfrak{p}^m$ et $J = \mathfrak{q}^n$) $A/\mathfrak{p}^m \otimes_A A/\mathfrak{q}^n \tilde{\to} 0$. Ecrivons $M = A^r \oplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \oplus_{m \geq 0} A/\mathfrak{q}^{\alpha_{M,\mathfrak{q}}(m)}$. En utilisant ce qui précède et les propriétés d'associativité / distributivité / transitivité du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned} A/\mathfrak{p}^n \otimes_A M &\tilde{\to} (A/\mathfrak{p}^n \otimes_A A^r) \oplus \oplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \oplus_{m \geq 0} (A/\mathfrak{p}^n \otimes_A A/\mathfrak{q}^{\alpha_{M,\mathfrak{q}}(m)}) \\ &\tilde{\to} (A/\mathfrak{p}^n \otimes_A A)^r \oplus_{m \geq 0} (A/\mathfrak{p}^n \otimes_A A/\mathfrak{q}^{\alpha_{M,\mathfrak{p}}(m)}) \\ &\tilde{\to} (A/\mathfrak{p}^n)^r \oplus_{m \geq 0} A/\mathfrak{p}^{\min\{n, \alpha_{M,\mathfrak{p}}(m)\}}. \end{aligned}$$

Ecrivons également $N = A^s \oplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \oplus_{m \geq 0} A/\mathfrak{q}^{\alpha_{N,\mathfrak{q}}(m)}$ et posons $M(\mathfrak{q}) := \oplus_{m \geq 0} A/\mathfrak{q}^{\alpha_{M,\mathfrak{q}}(m)}$, $N(\mathfrak{q}) := \oplus_{m \geq 0} A/\mathfrak{q}^{\alpha_{N,\mathfrak{q}}(m)}$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$. En utilisant à nouveau ce qui précède et les propriétés d'associativité / distributivité / transitivité du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned} N \otimes_A M &\tilde{\to} (A^r \otimes_A A^s) \oplus (A^r \otimes_A T_N) \oplus (T_M \otimes_A A^s) \oplus_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} M(\mathfrak{p}) \otimes_A N(\mathfrak{q}) \\ &\tilde{\to} A^{rs} \oplus T_N^r \oplus T_M^s \oplus \oplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} M(\mathfrak{p}) \otimes N(\mathfrak{p})) \\ &\tilde{\to} A^{rs} \oplus T_N^r \oplus T_M^s \oplus \oplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \oplus_{m,n \geq 0} A/\mathfrak{p}^{\min\{\alpha_{\mathfrak{p},M}(m), \alpha_{\mathfrak{p},N}(n)\}}. \end{aligned}$$

Exercice 2:

(1) Soit A un anneau. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n] \tilde{\to} A[X_1, \ldots, X_n]$.

(2) Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et $P \in A[X]$, montrer qu'on a un isomorphisme canonique de B-algèbres $B \otimes_A (A[X]/P) \tilde{\to} B[X]/\varphi(P)$ (en particulier, si $P = 0$, on obtient $B \otimes_A A[X] \tilde{\to} B[X]$, où on note encore $\varphi : A[X] \to B[X]$ le morphisme obtenu en appliquant φ aux coefficients.

(3) Calculer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Est-ce un corps? Même question avec $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(1) Notons $\iota_i : A \to A[X_i]$ le morphisme canonique, $i = 1, \dots, n$ et $\iota : A \to A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n]$, $a \to a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 (= 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 etc)$; ce dernier morphisme est un morphisme d'anneaux qui munit $A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n]$ d'une structure de A-algèbre. Fixons une A-algèbre (commutative) $\phi : A \to B$ et $b_1, \dots, b_n \in B$. Il existe un unique morphisme de A-algèbre $e_i : A[X_i] \to B$ tel que $e_i(X_i) = b_i$, $i = 1 \dots, n$ d'où une application $A[X_1] \times \cdots \times A[X_n] \to B$, $(P_1, \dots, P_n) \to e_1(P_1) \cdots e_n(P_n)$, qui est clairement n-A-linéaire donc se factorise en un morphisme de A-modules $e : A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n] \to B$, $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n \to e_1(P_1) \cdots e_n(P_n)$. On vérifie immédiatement sur la construction que c'est en fait un morphisme de A-algèbres. On a donc construit un morphisme de A-algèbre $e : A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n] \to B$ tel que $e(1 \otimes \cdots \otimes X_i \otimes \cdots \otimes 1) = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Ce morphisme est automatiquement unique car $A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n]$ est engendré, comme A-algèbre, par les éléments $\tilde{X}_i := 1 \otimes \cdots \otimes X_i \otimes \cdots \otimes 1$, $i = 1, \dots, n$. Autrement dit, on a montré que $\iota : A \to A[X_1] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_n]$ muni de $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ vérifie la propriété universelle de $\iota_A : A \to A[X_1, \dots, X_n]$ et on conclut par l'unicité de l'objet universel. (Evidemment, on aurait aussi pu constuire les morphismes dans les deux sens en utilisant les propriétés universelles et vérifier que les morphismes construits sont inverses l'un de l'autre).

(2) Le sous-A-module A[X]P$\subset A[X]$ est contenu dans le noyau du morphisme $A[X] \to B[X]/\varphi(P)$, $Q \to \overline{\varphi(Q)}$, qui se factorise donc en un morphisme $A[X]/P \to B[X]/\varphi(P)$, $\overline{Q} \to \overline{\varphi(Q)}$. On en déduit une application $B \times A[X]/P \to B[X]/\varphi(P)$, $(b, \overline{Q}) \to \overline{bQ}$, qui est clairement A-bilinéaire donc se factorise en un morphisme de A-modules $\phi : B \otimes_A A[X]/P \to B[X]/\varphi(P)$. Inversement, il existe un unique morphisme de B-algèbres $\tilde{\psi} : B[X] \to B \otimes A[X]/P$ tel que $\tilde{\psi}(X) = 1 \otimes \overline{X}$ et $\varphi(P) \in \ker(\tilde{\psi})$ car en écrivant $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ on a $\tilde{\psi}(\varphi(P)) = \sum_{n \geq 0} \varphi(a_n) \otimes \overline{X}^n = \sum_{n \geq 0} 1 \otimes \overline{a_n X^n} = 1 \otimes \overline{P} = 0$ (on a utilisé que la structure de A-algèbre sur B est donnée par $a \cdot b = \varphi(a)b$). Donc $\tilde{\psi} : B[X] \to B \otimes A[X]/P$ se factorise en un morphisme de A-algèbres $\psi : B[X]/\varphi(P) \to B \otimes A[X]/P$. On vérifie que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre, ce qui implique automatiquement que $\phi = \psi^{-1}$ est aussi un morphisme de A-algèbres.

(3) On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[X]/X^2+1 \simeq \mathbb{C}[X]/(X-i)(X+i) \simeq \mathbb{C}[X]/X+i \times \mathbb{C}[X]/(X-i) \simeq \mathbb{C}^2$$

(qui n'est pas un corps puisque même pas intègre). Par contre

$$\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q}[T]/T^2+1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})[T]/T^2+1$$

est un corps car T^2+1 est irréductible dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[T]$.

Exercice 3: Soit M un A-module. Montrer que pour toute suite exacte courte de A-modules

$$0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \to 0$$

(1) La suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{u\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{v\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$

est exacte. (On dit que $Hom_A(M, -)$ est un foncteur exact à gauche).

(2) La suite

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{Id\otimes u} M \otimes_A N \xrightarrow{Id\otimes v} M \otimes_A N'' \to 0$$

est exacte. (On dit que $M \otimes_A -$ est un foncteur exact à droite).

(1) Facile.

(2) Soit $N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. La surjectivité de $N \otimes_A M \xrightarrow{v \otimes_A Id_M} N'' \otimes_A M$ se montre en utilisant que $N'' \otimes_A M$ est engendré par les éléments de la forme $n'' \otimes m$. En effet, comme $v : N \to N''$ est surjective, on peut écrire $n'' = v(n)$ donc $n'' \otimes m = v(n) \otimes m = (v \otimes Id_M)(n \otimes m)$. Pour l'exactitude au milieu, l'inclusion $(u \otimes Id_M)(N' \otimes_A M) \subset \ker(v \otimes Id_M)$ est immédiate (fonctorialité). Pour l'inclusion réciproque, il y a deux méthodes.

- Méthode 'directe': Notons $I := (u \otimes Id_M)(N' \otimes_A M)$. Le morphisme $v \otimes Id_M : N \otimes_A M \twoheadrightarrow N'' \otimes_A M$ se factorise *via*

$$\overline{v \otimes Id_M} : N \otimes_A M/I \twoheadrightarrow N'' \otimes_A M$$

dont on veut montrer que c'est un isomorphisme de A-modules. Pour cela, il suffit de construire un morphisme de A-modules $s : N'' \otimes_A M \to N \otimes_A M/I$ tel que $\overline{sv \otimes Id_M} = Id_{N'' \otimes_A M}$. Considérons donc l'application $s : N'' \times M \to N \otimes_A M/I$ définie par $s(n'', m) = (\sigma(n'') \otimes m) modI$, où $\sigma : N'' \to N$ est une section ensembliste de $v : N \twoheadrightarrow N''$. Tout d'abord, s ne dépend pas de σ car si $\sigma' : N'' \to N$ est une autre section ensembliste de $v : N \twoheadrightarrow N''$, pour tout $n'' \in N''$ on a $\sigma(n'') - \sigma'(n'') \in \ker(v) = u(N')$ donc $\sigma(n'') \otimes m - \sigma'(n'') \otimes m = (\sigma(n'') - \sigma'(n'')) \otimes m \in I$. Cela permet de vérifier que s est A-bilinéaire. Qu'elle le soit en m est immédiat. Pour vérifier qu'elle l'est en n'', calculons $s(a_1 n_1'' + a_2 n_2'', m) = (\sigma(a_1 n_1'' + a_2 n_2'') \otimes m) modI$. Mais on a montré qu'on pouvait remplacer $\sigma(a_1 n_1'' + a_2 n_2'')$ par n'importe quel autre élément dans $v^{-1}(a_1 n_1'' + a_2 n_2'')$ donc, en particulier, $a_1 \sigma(n_1'') + a_2 \sigma(n_2'')$. Par propriété universelle du produit tensoriel, $s : N'' \times M \to N \otimes_A M/I$ se factorise *via* $\overline{s} : N'' \otimes_A M \to N \otimes_A M/I$ et, par construction, $\overline{sv \otimes Id_M} = Id_{N'' \otimes_A M}$.

- Méthode utilisant (1). Plus précisément, il faut observer (laisser en exercice - facile) qu'en fait, si on a une suite de A-modules

$$(*) \;\; N' \overset{u}{\to} N \overset{v}{\to} N'' \to 0$$

alors $(*)$ est exacte *si et* seulement si pour tout A-module M, la suite Hom

$$0 \to \mathrm{Hom}(N'', M) \overset{-\circ v}{\to} \mathrm{Hom}(N, M) \overset{-\circ u}{\to} \mathrm{Hom}(N', M).$$

Ensuite, on raisonne comme suit: $(**)$ $N' \otimes_A M \overset{u \otimes Id}{\to} N \otimes_A M \overset{v \otimes Id}{\to} N'' \otimes_A M \to 0$ est exacte si et seulement si pour tout A-module L la suite

$$(\#\#, L) \;\; 0 \to \mathrm{Hom}(N'' \otimes_A M, L) \overset{-\circ v \otimes Id_M}{\to} \mathrm{Hom}(N \otimes_A M, L) \overset{-\circ u \otimes Id_M}{\to} \mathrm{Hom}(N' \otimes_A M, L)$$

est exacte. Mais en utilisant la propriété d'adjonction - 1, cette suite est canoniquement isomorphe à la suite

$$(\#, L) \;\; 0 \to \mathrm{Hom}(N'', \mathrm{Hom}(M, L)) \overset{-\circ v}{\to} \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, L)) \overset{-\circ u}{\to} \mathrm{Hom}(N', \mathrm{Hom}(M, L)).$$

Mais on a vu que si on suppose que $(*)$ est exacte alors pour tout A-module L $(\#, L)$ l'est aussi.

Exercice 4:

(1) Soit $S \subset A \setminus A_{tors}$ une partie multiplicative et M, N deux A-modules. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de $S^{-1}A$-modules $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \tilde{\to} S^{-1}(M \otimes_A N)$

(2) Soit $S \subset A \setminus A_{tors}$ une partie multiplicative. Montrer que pour toute suite exacte de A-modules $M' \to M \to M''$ la suite $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ est encore une suite exacte de $S^{-1}A$-modules.

(3) Montrer que pour tout A-module M, les PSSE:
   (a) $M = 0$;
   (b) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$;
   (c) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$;

(4) On dit qu'un A-module N est plat si pour toute suite exacte courte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ la suite $0 \to N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$ est encore une suite exacte courte de A-modules. Montrer que les PSSE:
   (a) N est un A-module plat;
   (b) $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module plat pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$;
   (c) $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$.

(1) Soit $S \subset A \setminus A_{tors}$ une partie multiplicative et M, N deux A-modules. Par prop. univ. du produit tensoriel l'application 2-A-bilinéaire $\phi : M \times N \to S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$, $(m, n) \mapsto (m/1) \otimes (n/1)$ se factorise de façon unique en un morphisme de A-modules $\widetilde{\phi} : M \otimes_A N \to S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$, $m \otimes n \mapsto (m/1) \otimes (n/1)$ ou, plus précisément, $M \otimes_A N \to \iota_{S*}(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N)$ donc par prop. univ. de la localisation, $\widetilde{\phi} : M \otimes_A N \to \iota_{S*}(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N)$ se factorise de façon unique en un morphisme de $S^{-1}A$-modules $S^{-1}\widetilde{\phi} : S^{-1}(M \otimes_A N) \to S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$, $(m \otimes n)/s \mapsto (m/s) \otimes (n/1) = (m/1) \otimes (n/s) = ((m/1) \otimes (n/1))/s$. Inversement, considérons l'application $\psi : (S \times M) \times (S \times N) \to S^{-1}(M \otimes_A N)$, $((s, m), (t, n)) \mapsto (m \otimes n)/st$. Si $(s, m) \sim (s', m')$, $(t, n) \sim (t', n')$ *i.e.* il existe $u, v \in S$ tel que

$u(s'm - sm') = 0$ et $v(t'n - tn') = 0$ on a

$$uv(st(m' \otimes n') - s't'(m \otimes n)) = uv((sm') \otimes (tn') - (s'm) \otimes (t'n)) = (u(sm' - s'm)) \otimes (v(tn' - t'n)) = 0$$

donc $(S \times M) \times (S \times N) \to S^{-1}(M \otimes_A N)$ se factorise en une application $\overline{\psi} : S^{-1}M \times S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$, $(m/s, n/t) \mapsto (m \otimes n)/st$ dont on vérifie immdíatement qu'elle est $S^{-1}A$-bilinéaire donc (prop. univ. du produit tensoriel) se factorise de façon unique en un morphisme de $S^{-1}A$-modules $S^{-1}\overline{\psi} : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$, $(m/s) \otimes (n/t) \mapsto (m \otimes n)/st$. On vérifie immédiatement sur les constructions que $S^{-1}\overline{\psi} \circ S^{-1}\widetilde{\phi} = Id$, $S^{-1}\widetilde{\phi} \circ S^{-1}\overline{\psi} = Id$.

(2) Se vérifie sur les définition; il n'y a aucune difficulté.

(3) (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) sont tautologiques. Pour (c) $\Rightarrow$ (a), pour tout $m \in M$ on veut montrer que $Ann_A(m) = A$. Sinon, il existerait $m \in M$ et $\mathfrak{m} \in spm(A)$ tel que $Ann_A(m) \subset \mathfrak{m}$ ou encore $A \setminus \mathfrak{m} \subset A \setminus Ann_A(m)$. Mais comme $M_\mathfrak{m} = 0$ on a, en particulier $m/1 = 0$ dans $M_\mathfrak{m}$ *i.e.* il existe $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ tel que $sm = 0$ donc $s \in Ann_A(m)$: contradiction.

(4) En utilisant l'isomorphisme canonique $S^{-1}M \tilde{\to} (S^{-1}A \otimes_A M)$ on sait déjà (Exercice 3) que pour tout A-module N et pour toute suite exacte courte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ la suite $N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$ est encore une suite exacte de A-modules. Lénoncé revient donc à montrer que pour tout morphisme de A-modules $u : M'M$ les PSSE

(a) $u : M'M$ est injectif;

(b) $u_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ est injectif pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$;

(c) $u_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ est injectif pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$.

D'après la Question (2) on a aussi (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Reste à voir (c) $\Rightarrow$ (a). Par (c), pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$, on a $\ker(u_\mathfrak{m}) = 0$. Or comme la suite de morphismes de A-modules

$$0 \to \ker(u) \to M \xrightarrow{u} N$$

est exacte, d'après la question (3),

$$0 \to \ker(u)_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{u_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m}$$

est exacte. En particulier, $\ker(u)_\mathfrak{m} \simeq \ker(u_\mathfrak{m}) \overset{(c)}{=} 0$. D'après la question (3), on en déduit $\ker(u) = 0$.