Groupes de Galois motiviques en famille

I.M.A.G. - Colloquium, 27 septembre 2018

Anna Cadoret

(IMJ-PRG, Sorbonne Université)

Géométrie arithmétique

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique

Théorie des nombres

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

Géométrie algébrique

Théorie des nombres

Théorie des représentations

Equation de Fermat

$$F_n(\mathbb{Q}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3 \mid x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0\}$$

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \ \textbf{variété} \text{ (algébrique) } /k$$

$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique **Théorie des nombres**

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \ \textbf{variété} \text{ (algébrique) } /k$$

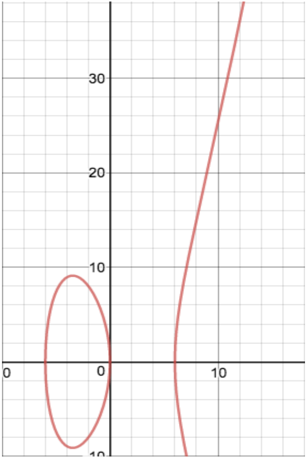
$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique **Théorie des nombres**

k algébriquement clos (*e.g.* $k = \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{Q}},\ \overline{\mathbb{F}}_p$)
ou k complet (*e.g.* $k = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}_p,\ \mathbb{F}_p((T))$)

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique



$$Y^2 - X^3 + 36X = 0$$

$$X(\mathbb{R})$$

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \ \textbf{variété} \ \text{(algébrique)} \ /k$$

$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique **Théorie des nombres**

k algébriquement clos $(e.g.\ k = \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{Q}},\ \overline{\mathbb{F}}_p)$
ou k complet $(e.g.\ k = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}_p,\ \mathbb{F}_p((T)))$

'forme' des solutions
méthodes géométriques

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$ **variété** (algébrique) $/k$

$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique

k algébriquement clos (*e.g.* $k = \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{Q}},\ \overline{\mathbb{F}}_p$)
ou k complet (*e.g.* $k = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}_p,\ \mathbb{F}_p((T))$)

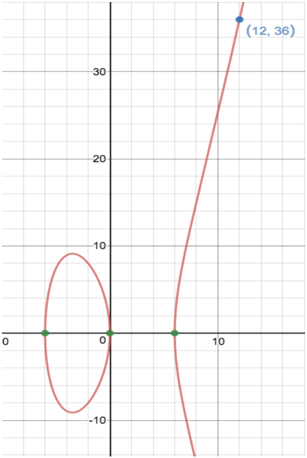
'forme' des solutions
méthodes géométriques

Théorie des nombres

k de type fini
(*e.g.* $k = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(T),\ \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(T)$)

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique



$$Y^2 - X^3 + 36X = 0$$
$$X(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \ \textbf{variété} \text{ (algébrique) } /k$$

$$X(R) \overset{Def.}{=} \text{ensemble des } R\text{-points de } X$$

Géométrie algébrique

k algébriquement clos (*e.g.* $k = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$)
ou k complet (*e.g.* $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((T))$)

'forme' des solutions
méthodes géométriques

Théorie des nombres

k de type fini
(*e.g.* $k = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(T)$, $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(T)$)

'nombre' de solutions
méthodes algébriques

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \ \textbf{variété} \text{ (algébrique) } /k$$

$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique

k algébriquement clos (*e.g.* $k = \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{Q}},\ \overline{\mathbb{F}}_p$)
ou k complet (*e.g.* $k = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}_p,\ \mathbb{F}_p((T))$)

'forme' des solutions
méthodes géométriques

Théorie des nombres

k de type fini
(*e.g.* $k = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(T),\ \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(T)$)

'nombre' de solutions
méthodes algébriques

$k \hookrightarrow \overline{k}$

Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\} \text{ **variété** (algébrique) } /k$$

$X(R) \overset{Def.}{=}$ ensemble des R-points de X

Géométrie algébrique

k algébriquement clos (*e.g.* $k = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$)
ou k complet (*e.g.* $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((T))$)

'forme' des solutions
méthodes géométriques

Théorie des nombres

k de type fini
(*e.g.* $k = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(T)$, $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(T)$)

'nombre' de solutions
méthodes algébriques

$$k \hookrightarrow \overline{k}$$

$$X(k) = X(\overline{k})^{\pi_1(k)}$$

Théorie des représentations

Invariants

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués

Invariants

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*)

Invariants

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$X : k \subset R \to X(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*)
  Plus conceptuellement, foncteurs

$$H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A} : \text{Catégories abéliennes}$$

Invariants en familles

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{Y}, \underline{X}]$

$$X_{\underline{a}} : k \subset R \to X_{\underline{a}}(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{a}, \underline{x}) = 0\}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*) Plus conceptuellement, foncteurs

$$H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A} : \text{Catégories abéliennes}$$

Invariants en familles

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{Y}, \underline{X}]$, $\underline{Q} \in k[\underline{Y}]$

$$X_{\underline{a}} : k \subset R \to X_{\underline{a}}(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{a}, \underline{x}) = 0\}$$

$$\underline{a} \in Y(R) = \{\underline{y} \in R^m \mid \underline{Q}(\underline{y}) = 0\}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*) Plus conceptuellement, foncteurs

$$H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A} : \text{Catégories abéliennes}$$

Invariants en familles

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{Y}, \underline{X}]$, $\underline{Q} \in k[\underline{Y}]$

$$X_{\underline{a}} : k \subset R \to X_{\underline{a}}(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{a}, \underline{x}) = 0\}$$

$$\underline{a} \in Y(R) = \{\underline{y} \in R^m \mid \underline{Q}(\underline{y}) = 0\}$$

$$\begin{array}{c} (\underline{x}, \underline{y}) \\ \downarrow \\ \underline{y} \end{array} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X_{\underline{a}} := f^{-1}(\underline{a}) \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & \underline{a} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*) Plus conceptuellement, foncteurs

$$H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A} : \text{Catégories abéliennes}$$

Invariants en familles

k corps, $\underline{P} \in k[\underline{Y}, \underline{X}]$, $\underline{Q} \in k[\underline{Y}]$

$$X_{\underline{a}} : k \subset R \to X_{\underline{a}}(R) := \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{P}(\underline{a}, \underline{x}) = 0\}$$

$$\underline{a} \in Y(R) = \{\underline{y} \in R^m \mid \underline{Q}(\underline{y}) = 0\}$$

$$\begin{tikzcd} (\underline{x}, \underline{y}) \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X_{\underline{a}} := f^{-1}(\underline{a}) \arrow[l] \arrow[d] \\ \underline{y} & Y & \underline{a} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- Variétés $/k$ objets très compliqués
- Pour les étudier, introduction d'**invariants** plus simples ('abéliens') (*e.g.* nombres, groupes abéliens, complexes de groupes abéliens *etc.*)
  Plus conceptuellement, foncteurs

$$H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A} : \text{Catégories abéliennes}$$

Comment l'invariant $H(X_{\underline{a}})$ varie-t-il avec $\underline{a} \in Y$?

Invariants en familles

Comment l'invariant $H(X_{\underline{a}})$ varie-t-il avec $\underline{a} \in Y$?

Description de $Y(H) := \{\underline{a} \in Y \mid H(X_{\underline{a}}) \neq H(X_\eta)\}$?

Invariants en familles

Comment l'invariant $H(X_{\underline{a}})$ varie-t-il avec $\underline{a} \in Y$?

Description de $Y(H) := \{\underline{a} \in Y \mid H(X_{\underline{a}}) \neq H(X_\eta)\}$?

Invariants capturés par la cohomologie étale

$$\begin{array}{rcll} H^*(-_{\overline{k}}, \Lambda) : & \text{Variétiés } /k & \to & \Lambda\text{-algèbres graduées de rang fini} \\ & & & + \text{ action continue de } \pi_1(k) \\ & X & \to & H^*(X_{\overline{k}}, \Lambda) \end{array}$$

$\Lambda = \mathbb{Z}/\ell,\ \mathbb{Z}_\ell,\ \mathbb{Q}_\ell,\ \mathbb{A}_\mathbb{Q}$

Invariants en familles

Comment l'invariant $H(X_{\underline{a}})$ varie-t-il avec $\underline{a} \in Y$?

Description de $Y(H) := \{\underline{a} \in Y \mid H(X_{\underline{a}}) \neq H(X_\eta)\}$?

Invariants capturés par la cohomologie étale

$$\begin{array}{rcll} H^*(-_{\overline{k}}, \Lambda) : & \text{Variétiés } /k & \to & \Lambda\text{-algèbres graduées de rang fini} \\ & & & + \text{ action continue de } \pi_1(k) \\ & X & \to & H^*(X_{\overline{k}}, \Lambda) \end{array}$$

$\Lambda = \mathbb{Z}/\ell,\ \mathbb{Z}_\ell,\ \mathbb{Q}_\ell,\ \mathbb{A}_\mathbb{Q}$

E.g. Cycles algébriques
Groupes de Galois (motivés) motiviques | mesure 'complexité' de X

Invariants en familles

Comment l'invariant $H(X_{\underline{a}})$ varie-t-il avec $\underline{a} \in Y$?

Description de $Y(H) := \{\underline{a} \in Y \mid H(X_{\underline{a}}) \neq H(X_\eta)\}$?

Invariants capturés par la cohomologie étale

$$\begin{array}{llcl} H^*(-_{\overline{k}}, \Lambda) : & \text{Variétiés } /k & \rightarrow & \Lambda\text{-algèbres graduées de rang fini} \\ & & & + \text{ action continue de } \pi_1(k) \\ & X & \rightarrow & H^*(X_{\overline{k}}, \Lambda) \end{array}$$

$\Lambda = \mathbb{Z}/\ell, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell, \mathbb{A}_\mathbb{Q}$

E.g. Cycles algébriques | mesure 'complexité' de X
Groupes de Galois (motivés) motiviques

- Aujourd'hui : torsion ℓ-primaire des variétés abéliennes
  $(\sim H^1(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell))$

Géométrie arithmétique

Géométrie arithmétique

"La forme de $X(\overline{k})$ détermine en partie $X(k)$"

Géométrie arithmétique

"La forme de $X(\overline{k})$ détermine en partie $X(k)$"

X/k (irréductible) $\rightsquigarrow d_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dimension

Courbes

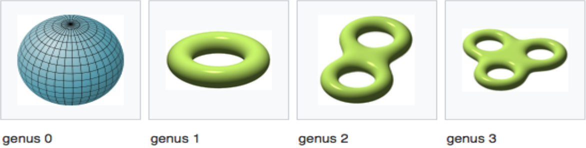
"La forme de $X(\overline{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre

Courbes

"La forme de $X(\bar{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre



E.g. $g_{F_n} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Courbes

"La forme de $X(\bar{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre

Thm (**Conj de Mordell** ; Faltings, 1983)

$$k/\mathbb{Q} \textit{ de type fini}, \; g_X \geq 2 \Rightarrow X(k) \textit{ fini}$$

Courbes

"La forme de $X(\overline{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre

Thm (**Conj de Mordell** ; Faltings, 1983)

$$k/\mathbb{Q} \textit{ de type fini}, \, g_X \geq 2 \Rightarrow X(k) \textit{ fini}$$

- Si $g_X = 0$, $X(k) = \emptyset$ ou infini

Courbes

"La forme de $X(\bar{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre

Thm (Conj de Mordell ; Faltings, 1983)

$$k/\mathbb{Q} \text{ de type fini, } g_X \geq 2 \Rightarrow X(k) \text{ fini}$$

- Si $g_X = 0$, $X(k) = \emptyset$ ou infini
- Si $g_X = 1$, $X(k) \neq \emptyset \Rightarrow X(k)$ groupe abélien (X/k courbe *elliptique*)

  Thm (Mordell-Weil)

  k de type fini $\Rightarrow X(k)$ groupe abélien de type fini (fini ou infini)

  En part. $|X(k)_{tors}| < +\infty$

Courbes

"La forme de $X(\overline{k})$ détermine en partie $X(k)$"

$d_X = 1$ (courbe) $\rightsquigarrow g_X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genre

Thm (**Conj de Mordell** ; Faltings, 1983)

$$k/\mathbb{Q} \text{ de type fini}, \; g_X \geq 2 \Rightarrow X(k) \text{ fini}$$

- Si $g_X = 0$, $X(k) = \emptyset$ ou infini
- Si $g_X = 1$, $X(k) \neq \emptyset \Rightarrow X(k)$ groupe abélien (X/k courbe *elliptique*)

  Thm (Mordell-Weil)

  k de type fini $\Rightarrow X(k)$ groupe abélien de type fini (fini ou infini)

  En part. $|X(k)_{tors}| < +\infty$

Comment $|X(k)_{tors}|$ varie-t-il avec la courbe elliptique X/k ?

Courbes elliptiques en famille

$$X_j(k) := \{(x, y) \in k^2 \mid P_j(x, y) = 0\} \to \mathbb{A}^1_j$$

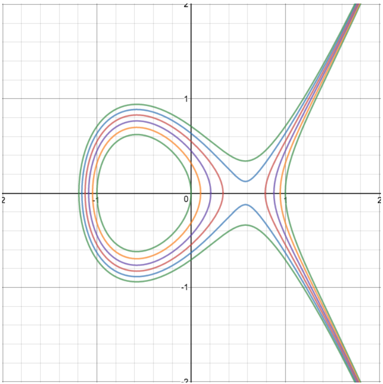
Courbes elliptiques en famille

$$X_j(k) := \{(x,y) \in k^2 \mid P_j(x,y) = 0\} \to \mathbb{A}^1_j$$

$P_j = Y^2 + XY - X^3 - \frac{36}{j-1728}X - \frac{1}{j-1728}$, $j \neq 0, 1728$

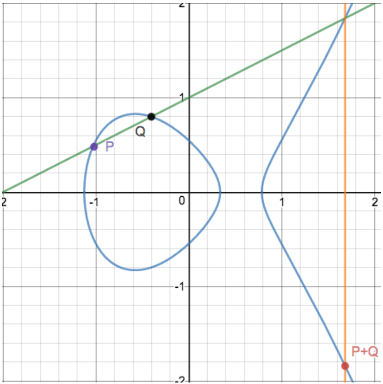
$P_0 = Y^2 - X^3 - 1$, $P_{1728} = Y^2 - X^3 - 36X$

Courbes elliptiques en famille



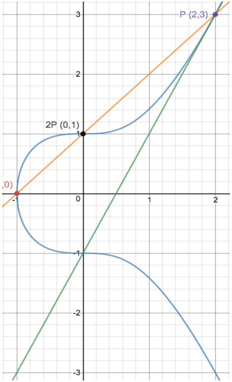
$$X_j(\mathbb{R})$$
$$j = \ldots$$

Courbes elliptiques en famille



Addition sur $X_j(\mathbb{R})$

Courbes elliptiques en famille



$X_{1728}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \qquad X_0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/6$

Courbes elliptiques en famille

$$X_j(k) := \{(x, y) \in k^2 \mid P_j(x, y) = 0\} \to \mathbb{A}^1_j$$

$$P_j = Y^2 + XY - X^3 - \tfrac{36}{j-1728}X - \tfrac{1}{j-1728},\ j \neq 0, 1728$$

$$P_0 = Y^2 - X^3 - 1,\ P_{1728} = Y^2 - X^3 - 36X$$

Comment $|X_j(\mathbb{Q})_{tors}|$ varie-t-il avec $j \in \mathbb{Q}$?

Courbes elliptiques en famille

- ℓ : premier, $n \geq 1$, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^n]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

- ℓ : premier, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

- $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})_{tors}| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$? ?

Courbes elliptiques en famille

- ℓ : premier, $n \geq 1$, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^n]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui, $X_j(\mathbb{Q})[\ell^n] \subset X_j(\mathbb{C})[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n)^2$

- ℓ : premier, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

- $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})_{tors}| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$? ?

Courbes elliptiques en famille

- ℓ : premier, $n \geq 1$, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^n]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui, $X_j(\mathbb{Q})[\ell^n] \subset X_j(\mathbb{C})[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n)^2$

- ℓ : premier, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui (Manin, 1969)

- $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})_{tors}| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$? ?

  Oui (Mazur, 1977)

Courbes elliptiques en famille

- ℓ : premier, $n \geq 1$, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^n]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui, $X_j(\mathbb{Q})[\ell^n] \subset X_j(\mathbb{C})[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n)^2$

- ℓ : premier, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui (Manin, 1969)

  - Généralisé par Faltings-Frey 1984 (corps de nombres k arbitraire, borne ne dépendant que de $[k : \mathbb{Q}]$)

- $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})_{tors}| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$? ?

  Oui (Mazur, 1977)

  - Généralisé par Merel 1996 (corps de nombres k arbitraire, borne ne dépendant que de $[k : \mathbb{Q}]$) et Parent 1999 (bornes explicites)

Courbes elliptiques en famille

- ℓ : premier, $n \geq 1$, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^n]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui, $X_j(\mathbb{Q})[\ell^n] \subset X_j(\mathbb{C})[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n)^2$

- ℓ : premier, $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$?

  Oui **(Manin, 1969)**

  - Généralisé par Faltings-Frey 1984 (corps de nombres k arbitraire, borne ne dépendant que de $[k : \mathbb{Q}]$)

- $\sup\{|X_j(\mathbb{Q})_{tors}| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$? ?

  Oui (Mazur, 1977)

  - Généralisé par Merel 1996 (corps de nombres k arbitraire, borne ne dépendant que de $[k : \mathbb{Q}]$) et Parent 1999 (bornes explicites)

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ *: premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ *: premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires :

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ *: premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) *ℓ : premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} /\overline{k}\text{-Isom}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) *ℓ : premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\}/\bar{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \quad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ *: premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} / \overline{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \quad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ : *premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

- Genre de $Y_1(\ell^n) \geq 2$, $n \gg 0$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} /\overline{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \quad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ : *premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

- Genre de $Y_1(\ell^n) \geq 2$, $n \gg 0 \Rightarrow |Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q})|$ fini, $n \gg 0$ (Mordell)

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} /\overline{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \quad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ *: premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

- Genre de $Y_1(\ell^n) \geq 2$, $n \gg 0 \Rightarrow |Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q})|$ fini, $n \gg 0$ (Mordell)
- $Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$, $n \geq 1$

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X, x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} /\overline{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \qquad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X, x) & \to & (X, n \cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) *ℓ : premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

- Genre de $Y_1(\ell^n) \geq 2$, $n \gg 0 \Rightarrow |Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q})|$ fini, $n \gg 0$ (Mordell)
- $Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$, $n \geq 1 \Rightarrow \varprojlim Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$: $\lightning$ Mordell-Weil

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\}/\bar{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \quad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Courbes elliptiques : borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Thm (Manin 1969) ℓ : *premier,*

$$\sup\{|X_j(\mathbb{Q})[\ell^\infty]| \mid j \in \mathbb{Q}\} < +\infty \Leftrightarrow Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad n \gg 0$$

- Genre de $Y_1(\ell^n) \geq 2$, $n \gg 0 \Rightarrow |Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q})|$ fini, $n \gg 0$ (Mordell)
- $Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$, $n \geq 1 \Rightarrow \varprojlim Y_1(\ell^n)(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$: $\lightning$ Mordell-Weil

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Courbes modulaires : $Y_1(N)/\mathbb{Q}$ courbe algébrique, pour tout $k/\mathbb{Q}$

$$Y_1(N)(k) \leftrightarrow \left\{(X,x) \mid \begin{array}{l} X/k \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(k)[N]^\times \text{ (d'ordre exactement } N) \end{array}\right\} /\bar{k}\text{-Isom}$$

$$Y_1(nN) \to Y_1(N) \qquad \begin{array}{ccc} Y_1(nN)(k) & \to & Y_1(N)(k) \\ (X,x) & \to & (X, n\cdot x) \end{array}$$

Points clefs : Construction explicite de $Y_1(N)$
Calcul genre / gonalité géométrique par méthodes top.

Description explicite de $Y_1(N)$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$$

$$\mathbb{C} \supset \mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) > 0\}$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$$

$$\mathbb{C} \supset \mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) > 0\}$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathfrak{H}, \quad M \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

$$\mathbb{C} \supset \mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) > 0\}$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathfrak{H}, \quad M \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0[N],\ a \equiv d \equiv 1[N] \right\}$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma_1(nN) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(nN)(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
& \Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(N)(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma_1(nN)\backslash\mathfrak{H} = Y_1(nN)(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
& \Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H} = Y_1(N)(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
Y_1(N)(\mathbb{C}) & \leftrightarrow & \left\{ (X,x) \mid \begin{array}{l} X/\mathbb{C} \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(\mathbb{C})[N]^\times \end{array} \right\} /\mathrm{Isom} \\
[\tau] & \mapsto & [\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau), \frac{1}{N}]
\end{array}$$

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma_1(nN) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(nN)(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
& \Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(N)(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
Y_1(N)(\mathbb{C}) & \leftrightarrow & \left\{ (X, x) \mid \begin{array}{l} X/\mathbb{C} \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(\mathbb{C})[N]^{\times} \end{array} \right\} /\mathrm{Isom} \\
[\tau] & \mapsto & [\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau), \frac{1}{N}]
\end{array}$$

- $Y_1(N)(\mathbb{C})$: courbe analytique complexe

Description explicite de $Y_1(N)$

Plongeons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

$$\text{Courbes elliptiques } X/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{Tores complexes } \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma_1(nN) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(nN)(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
& \Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H} = Y_1(N)(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
Y_1(N)(\mathbb{C}) & \leftrightarrow & \left\{ (X, x) \mid \begin{array}{l} X/\mathbb{C} \text{ courbe elliptique} \\ x \in X(\mathbb{C})[N]^\times \end{array} \right\} /\mathrm{Isom} \\
[\tau] & \mapsto & [\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau), \frac{1}{N}]
\end{array}$$

- $Y_1(N)(\mathbb{C})$: courbe analytique complexe mais, en fait, ensemble des $\mathbb{C}$-points d'une courbe algébrique $/\mathbb{Q}$

Et ensuite ?

Et ensuite ?

Courbes elliptiques = variétés abéliennes de dimension 1

Et ensuite ?

Courbes elliptiques = variétés abéliennes de dimension 1

Variété abélienne X/k : groupe algébrique connexe, propre $/k$

Et ensuite ?

Courbes elliptiques = variétés abéliennes de dimension 1

Variété abélienne X/k : groupe algébrique connexe, propre $/k$

- Pour tout $k \subset R$, $X(R)$ groupe abélien
- (Mordell Weil)
  k de type fini $\Rightarrow X(k)$ groupe abélien de type fini
  En part. $|X(k)_{tors}| < +\infty$

Et ensuite ?

Courbes elliptiques = variétés abéliennes de dimension 1

Variété abélienne X/k : groupe algébrique connexe, propre $/k$

- Pour tout $k \subset R$, $X(R)$ groupe abélien
- (Mordell Weil)
  k de type fini $\Rightarrow X(k)$ groupe abélien de type fini
  En part. $|X(k)_{tors}| < +\infty$

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\qquad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$
X/k variété abélienne de dimension g

Et ensuite ?

Courbes elliptiques = variétés abéliennes de dimension 1

Variété abélienne X/k : groupe algébrique connexe, propre $/k$

- Pour tout $k \subset R$, $X(R)$ groupe abélien
- (Mordell Weil)
  k de type fini $\Rightarrow X(k)$ groupe abélien de type fini
  En part. $|X(k)_{tors}| < +\infty$

Conj (Borne uniforme pour la torsion ~~ℓ-primaire~~)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$
X/k variété abélienne de dimension g

$$|X(k)\cancel{[\ell^\infty]}_{tors}| \leq B_{\cancel{\ell}}(g,d)$$

Et ensuite ?

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k : \mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g, d)$
X/k *variété abélienne de dimension* g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Et ensuite ?

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$
X/k variété abélienne de dimension g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Approche modulaire

Et ensuite ?

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\qquad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$
X/k variété abélienne de dimension g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Approche modulaire

- Généralisation "raisonnable" $Y_{g,1}(N)$ de $Y_1(N)$ muni d'un revêtement fini ramifié "$A_{g,N} \to Y_{g,1}(N)$"

Et ensuite ?

Conj (**Borne uniforme pour la torsion** ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\qquad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$
X/k variété abélienne de dimension g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Approche modulaire

- Généralisation "raisonnable" $Y_{g,1}(N)$ de $Y_1(N)$ muni d'un revêtement fini ramifié "$A_{g,N} \to Y_{g,1}(N)$"

  $A_{g,N}$: Variété modulaire de Siegel (variété de Shimura ; espace localement symétrique, uniformisation complexe)

Et ensuite ?

Conj (**Borne uniforme pour la torsion** ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$
X/k variété abélienne de dimension g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Approche modulaire

- Généralisation "raisonnable" $Y_{g,1}(N)$ de $Y_1(N)$ muni d'un revêtement fini ramifié "$A_{g,N} \to Y_{g,1}(N)$"

  $A_{g,N}$: Variété modulaire de Siegel (variété de Shimura ; espace localement symétrique, uniformisation complexe)

- **Mais** $\dim(A_{g,N}) = \frac{g(g+1)}{2} \geq 3$ for $g \geq 2$

Et ensuite ?

Conj (**Borne uniforme pour la torsion** ℓ-primaire)

k corps de nombres $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\qquad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$

X/k variété abélienne de dimension g

- Pour $g = 1$: Manin / Faltings-Frey. Complètement ouvert pour $g \geq 2$.

Approche modulaire

- Généralisation "raisonnable" $Y_{g,1}(N)$ de $Y_1(N)$ muni d'un revêtement fini ramifié "$A_{g,N} \to Y_{g,1}(N)$"

  $A_{g,N}$: Variété modulaire de Siegel (variété de Shimura ; espace localement symétrique, uniformisation complexe)

- **Mais** $\dim(A_{g,N}) = \frac{g(g+1)}{2} \geq 3$ for $g \geq 2$
- **Pas de Conj=Thm de Mordell pour les variétés de dim** ≥ 2 **! !**

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

X de type général : dimension de Kodaira = dimension

Courbes :	Genre	dimension de Kodaira
	0	$-\infty$
	1	0
	≥ 2	1

Pas Zariski-dense = fini

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour $\dim = 1$: Conj Mordell.
- Pour $\dim \geq 2$, (complètement) ouverte.

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

X de type général $\Rightarrow X(k)$ n'est pas Zariski-dense dans X.

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.
- Pour dim ≥ 2, (complètement) ouverte. Connue seulement pour les sous-variétés des variétés abéliennes (Faltings ; 1984)

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \textit{ de type général} \Rightarrow X(k) \textit{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.
- Pour dim ≥ 2, (complètement) ouverte. Connue seulement pour les sous-variétés des variétés abéliennes (Faltings ; 1984)
$\overset{Frey}{\Rightarrow}$ Si X/k courbe et $\gamma_X \geq 2d+1$ alors

$$X^{\leq d} := \{x \in X \mid [k(x):k] \leq d\} \text{ est fini.}$$

γ_X gonalité géométrique ($=$ degré minimal d'un morphisme non constant $X_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. *E.g.* $\gamma_{F_n} = n-1$)
$\gamma_{Y_1(\ell^n)} \to +\infty \Rightarrow |X_j[\ell^\infty]| \leq B_\ell([k(j):\mathbb{Q}]),\ j \in \overline{\mathbb{Q}}$

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.
- Pour dim ≥ 2, (complètement) ouverte. Connue seulement pour les sous-variétés des variétés abéliennes (Faltings ; 1984)
  $\overset{Frey}{\Rightarrow}$ Si X/k courbe et $\gamma_X \geq 2d+1$ alors

  $$X^{\leq d} := \{x \in X \mid [k(x):k] \leq d\} \text{ est fini.}$$

  γ_X gonalité géométrique (= degré minimal d'un morphisme non constant $X_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. *E.g.* $\gamma_{F_n} = n-1$)
  $\gamma_{Y_1(\ell^n)} \to +\infty \Rightarrow |X_j[\ell^\infty]| \leq B_\ell([k(j):\mathbb{Q}])$, $j \in \overline{\mathbb{Q}}$
- Toute sous variété de $A_{g,N}$ est de type général $N \gg 0$ (Mumford, Tai, Zuo, Brunebarbe ; 2016)

Et ensuite ?

Conj (**Lang**) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.
- Pour dim ≥ 2, (complètement) ouverte. Connue seulement pour les sous-variétés des variétés abéliennes (Faltings ; 1984)
  $\overset{Frey}{\Rightarrow}$ Si X/k courbe et $\gamma_X \geq 2d+1$ alors
  $$X^{\leq d} := \{x \in X \mid [k(x):k] \leq d\} \text{ est fini.}$$
  γ_X gonalité géométrique (= degré minimal d'un morphisme non constant $X_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. *E.g.* $\gamma_{F_n} = n-1$)
  $\gamma_{Y_1(\ell^n)} \to +\infty \Rightarrow |X_j[\ell^\infty]| \leq B_\ell([k(j):\mathbb{Q}]),\ j \in \overline{\mathbb{Q}}$
- Si $Y_{g,1}(N)$ était de type général pour $N \gg 0$

  Conj Lang $\Rightarrow$ Conj borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Et ensuite ?

Conj (Lang) *k corps de nombres, X/k projective lisse*

$$X \text{ de type général} \Rightarrow X(k) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } X.$$

- Pour dim $= 1$: Conj Mordell.
- Pour dim ≥ 2, (complètement) ouverte. Connue seulement pour les sous-variétés des variétés abéliennes (Faltings ; 1984)
  $\overset{Frey}{\Rightarrow}$ Si X/k courbe et $\gamma_X \geq 2d+1$ alors
  $$X^{\leq d} := \{x \in X \mid [k(x):k] \leq d\} \text{ est fini.}$$
  γ_X gonalité géométrique (= degré minimal d'un morphisme non constant $X_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. *E.g.* $\gamma_{F_n} = n-1$)
  $\gamma_{Y_1(\ell^n)} \to +\infty \Rightarrow |X_j[\ell^\infty]| \leq B_\ell([k(j):\mathbb{Q}])$, $j \in \overline{\mathbb{Q}}$
- On ne sait pas si $Y_{g,1}(N)$ est de type général pour $N \gg 0$ si $g \geq 2$...

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)
k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}]\leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]|\leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j\to\mathbb{A}^1_j$

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j \to \mathbb{A}^1_j$
- Peut-on borner uniformément la torsion ℓ-primaire dans une famille de variétés abéliennes de dimensions ≥ 2 paramétrées par une courbe ?

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j \to \mathbb{A}^1_j$
- Peut-on borner uniformément la torsion ℓ-primaire dans une famille de variétés abéliennes de dimensions ≥ 2 paramétrées par une courbe ?

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g (schéma abélien)

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j \to \mathbb{A}^1_j$
- Peut-on borner uniformément la torsion ℓ-primaire dans une famille de variétés abéliennes de dimensions ≥ 2 paramétrées par une courbe ?

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g (schéma abélien)

$$(1)\ \ \sup_{y \in Y^{\leq d}} \{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j \to \mathbb{A}^1_j$
- Peut-on borner uniformément la torsion ℓ-primaire dans une famille de variétés abéliennes de dimensions ≥ 2 paramétrées par une courbe ?

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g (schéma abélien)

$$(1)\ \ \sup_{y \in Y^{\leq d}} \{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) variant (très) faible du résultat de Mazur/Merel

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

- Particularité du cas des courbes elliptiques : elles sont paramétrées par une courbe $X_j \to \mathbb{A}^1_j$
- Peut-on borner uniformément la torsion ℓ-primaire dans une famille de variétés abéliennes de dimensions ≥ 2 paramétrées par une courbe ?

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g (schéma abélien)

$$(1)\ \ \sup_{y\in Y^{\leq d}}\{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) variant (très) faible du résultat de Mazur/Merel
- (1), (2) pour $p > 0$ avec $d = 1$

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Conj (Borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire)

k corps de nombres avec $[k:\mathbb{Q}] \leq d$ $\quad |X(k)[\ell^\infty]| \leq B_\ell(g,d)$.
X/k variété abélienne de dimension g

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dim. g (schéma abélien)

$$(1)\ \ \sup_{y\in Y^{\leq d}}\{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) Variante (très) faible du résultat de Mazur/Merel
- (1), (2) pour $p > 0$ avec $d = 1$

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dim. g (schéma abélien)

$$(1) \quad \sup_{y \in Y^{\leq d}} \{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) Variante (très) faible du résultat de Mazur/Merel
- (1), (2) pour $p > 0$ avec $d = 1$

(1), $p > 0$: C-Tamagawa, [Inv. Math. 2012]
(1), $p = 0$: C-Tamagawa, [Duke 2012 and 2013]
(2), $p = 0$: Ellenberg-Hall-Kowalski [Duke 2012]
(2), $p > 0$: C-Tamagawa, [Crelles 2016], [Compositio 2016]

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dim. g (schéma abélien)

$$(1)\ \ \sup_{y \in Y^{\leq d}} \{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) Variante (très) faible du résultat de Mazur/Merel
- (1), (2) pour $p > 0$ avec $d = 1$

(1), $p > 0$: C-Tamagawa, [Inv. Math. 2012]
(1), $p = 0$: C-Tamagawa, [Duke 2012 and 2013]
(2), $p = 0$: Ellenberg-Hall-Kowalski [Duke 2012]
(2), $p > 0$: C-Tamagawa, [Crelles 2016], [Compositio 2016]

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Borne uniforme pour la torsion : un compromis

Thm *$k/\mathbb{Q}$ de type fini*
Y/k curve
$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dim. g (schéma abélien)

$$(1)\ \sup_{y\in Y^{\leq d}}\{|X_y(k(y))[\ell^\infty]|\} \leq B_{X\to Y,\ell}(d)$$

- (2) Variante (très) faible du résultat de Mazur/Merel
- (1), (2) pour $p > 0$ avec $d = 1$

(1), $p > 0$: C-Tamagawa, [Inv. Math. 2012]
(1), $p = 0$: C-Tamagawa, [Duke 2012 and 2013]
(2), $p = 0$: Ellenberg-Hall-Kowalski [Duke 2012]
(2), $p > 0$: C-Tamagawa, [Crelles 2016], [Compositio 2016]

Comment montre-t-on un tel résultat ?

Schémas modulaires abstraits (SMA) (C-Tamagawa)

L'idée

L'idée

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, dash, bend right=60, "\Gamma_1(nN)"'] \arrow[dd, dash, bend right=60, "\Gamma_1(N)"'] \arrow[ddd, dash, bend right=60, "\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})"'] & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddl] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & \\
Y_1(N) \arrow[d] & \\
\mathbb{A}^1_j &
\end{tikzcd}
$$

Construction **explicite** 'en partant d'en haut', *via* l'uniformisation complexe par $\mathfrak{H}$

L'idée

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, bend right=60, dash, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, bend right=60, dash, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, bend right=70, dash, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddl] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & \\
Y_1(N) \arrow[d] & \\
\mathbb{A}^1_j &
\end{tikzcd}
$$

L'idée

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[d, dash, bend right=50, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, dash, bend right=60, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, dash, bend right=70, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dll] \arrow[ddll] \arrow[dddll] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & & \\
Y_1(N) \arrow[d] & & \\
Y := \mathbb{A}^1_j \setminus \{0, 1728\} & &
\end{tikzcd}$$

L'idée

$$\begin{tikzcd}
\cancel{\mathfrak{H}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[d, bend right=60, dash, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, bend right=70, dash, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, bend right=80, dash, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dll] \arrow[ddll] \arrow[dddll] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & & \\
Y_1(N) \arrow[d] & & \\
Y := \mathbb{A}^1_j \setminus \{0, 1728\} & &
\end{tikzcd}$$

- Construction **non explicite** 'en partant d'en bas', *via* l'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}), y)$ sur les fibres $Y_1(N)_y$, $N \geq 1$

L'idée

$$
\begin{tikzcd}
\cancel{\mathfrak{H}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, bend right, dash, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, bend right=50, dash, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, bend right=70, dash, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddl] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & \\
Y_1(N) \arrow[d] & \\
Y := \mathbb{A}^1_j \setminus \{0, 1728\} &
\end{tikzcd}
$$

- Construction **non explicite** 'en partant d'en bas', *via* l'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}), y)$ sur les fibres $Y_1(N)_y$, $N \geq 1$
- De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{Q}$?

L'idée

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, bend right, dash, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, bend right=60, dash, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, bend right=80, dash, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & \underset{\longleftarrow}{\lim}\, Y_1(N) \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddl] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & \\
Y_1(N) \arrow[d] & \\
Y := \mathbb{A}^1_j \setminus \{0, 1728\} &
\end{tikzcd}
$$

- Construction **non explicite** 'en partant d'en bas', *via* l'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}), y)$ sur les fibres $Y_1(N)_y$, $N \geq 1$
- De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{Q}$? **Travailler directement sur** $\mathbb{Q}$

L'idée

$$
\begin{tikzcd}
\cancel{\mathfrak{H}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[d, dash, bend right=60, "\cancel{\Gamma_1(nN)}"'] \arrow[dd, dash, bend right=70, "\cancel{\Gamma_1(N)}"'] \arrow[ddd, dash, bend right=80, "\cancel{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}"'] & & \varprojlim Y_1(N) \arrow[dll] \arrow[ddll] \arrow[dddll] \\
Y_1(nN) \arrow[d] & & \\
Y_1(N) \arrow[d] & & \\
Y := \mathbb{A}^1_j \setminus \{0, 1728\} & &
\end{tikzcd}
$$

- Construction **non explicite** 'en partant d'en bas', *via* l'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}), y)$ sur les fibres $Y_1(N)_y$, $N \geq 1$
- De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{Q}$? **Travailler directement sur** $\mathbb{Q}$ en utilisant le

groupe fondamental étale

Groupe fondamental étale

Groupe fondamental étale

Vaste généralisation par Grothendieck (SGA 1, $\sim$ 1960) de

$$\text{Rev. topologiques de } Y(\mathbb{C}) \leftrightarrow \pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}), y)\text{-ens. discrets}$$

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

$\bar{y}$ point géométrique sur Y

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

$\overline{y}$ point géométrique sur Y

$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ foncteur fibre

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

$\overline{y}$ point géométrique sur Y

$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ foncteur fibre

$\pi_1(Y, \overline{y}) = \mathrm{Aut}(F_{\overline{y}})$ groupe profini = *groupe fondamental étale de Y*

Thm (Grothendieck) $F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ *se factorise via une équivalence de catégories*

$$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to \pi_1(Y, \overline{y})\text{-}FSets \text{ continus}$$

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

$\overline{y}$ point géométrique sur Y

$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ foncteur fibre

$\pi_1(Y) = \mathrm{Aut}(F)$ groupe profini = *groupe fondamental étale de Y*

Thm (Grothendieck) $F : Rev_Y \to FSets$ *se factorise via une équivalence de catégories*

$$F : Rev_Y \to \pi_1(Y)\text{-}FSets \text{ continus}$$

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

e.g. $Y = \mathrm{spec}(k)$ point

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

e.g. algèbres étales $/k$

$\overline{y}$ point géométrique sur Y

e.g. Ω/k algébriquement clos

$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ foncteur fibre

e.g. $F_{\overline{y}}(R) = \mathrm{Hom}_k(R, \Omega)$

$\pi_1(Y) = \mathrm{Aut}(F)$ groupe profini = *groupe fondamental étale de* Y

Thm (Grothendieck) $F : Rev_Y \to FSets$ *se factorise via une équivalence de catégories*

$$F : Rev_Y \to \pi_1(Y)\text{-}FSets \text{ continus}$$

e.g. $\pi_1(\mathrm{spec}(k)) = \pi_1(k) = \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$: correspondance de Galois pour les corps

Groupe fondamental étale

Y variété connexe

e.g. Y variété $/\mathbb{C}$

Rev_Y categorie des rev. étales de Y

e.g. rev. toplogiques finis de $Y(\mathbb{C})$

$\overline{y}$ point géométrique sur Y

e.g. $\overline{y} \in Y(\mathbb{C})$

$F_{\overline{y}} : Rev_Y \to FSets$ foncteur fibre

e.g. $F_{\overline{y}}(f : Y' \to Y) = f^{-1}(\overline{y})$

$\pi_1(Y) = \mathrm{Aut}(F)$ groupe profini = *groupe fondamental étale de* Y

Thm (Grothendieck) $F : Rev_Y \to FSets$ *se factorise via une équivalence de catégories*

$$F : Rev_Y \to \pi_1(Y)\text{-}FSets\ continus$$

e.g. $\pi_1(\mathrm{spec}(k)) = \pi_1(k) = \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$: correspondance de Galois pour les corps

$\pi_1(Y) = \widehat{\pi_1^{top}(Y(\mathbb{C}))}$: correspondance de Galois pour les rev. top. finis

SMA et représentations du groupe fondamental étale

SMA et représentations du groupe fondamental étale

Γ groupe profini
$\rho : \pi_1(Y) \to \Gamma$ morphisme (continu) de groupes profinis

SMA et représentations du groupe fondamental étale

Γ groupe profini
$\rho : \pi_1(Y) \to \Gamma$ morphisme (continu) de groupes profinis

$U \subset \mathrm{im}(\rho)$ sous-groupe ouvert $\leftrightarrow \pi_1(Y)/\rho^{-1}(U)$ $\pi_1(Y)$-FSet continus
$\leftrightarrow Y_U \to Y$ rev. étale

SMA et représentations du groupe fondamental étale

Γ groupe profini
$\rho : \pi_1(Y) \to \Gamma$ morphisme (continu) de groupes profinis

$U \subset \mathrm{im}(\rho)$ sous-groupe ouvert $\leftrightarrow \pi_1(Y)/\rho^{-1}(U)$ $\pi_1(Y)$-FSet continus
$\leftrightarrow Y_U \to Y$ rev. étale

$y : \mathrm{spec}(k) \to Y$ $(y \in Y(k))$

$$\rho_y : \pi_1(y) = \pi_1(k) \to \pi_1(Y) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ `localisation en } y\text{'}$$

SMA et représentations du groupe fondamental étale

Γ groupe profini
$\rho : \pi_1(Y) \to \Gamma$ morphisme (continu) de groupes profinis

$U \subset \mathrm{im}(\rho)$ sous-groupe ouvert $\leftrightarrow \pi_1(Y)/\rho^{-1}(U)$ $\pi_1(Y)$-FSet continus
$\leftrightarrow Y_U \to Y$ rev. étale

$y : \mathrm{spec}(k) \to Y$ $(y \in Y(k))$

$$\rho_y : \pi_1(y) = \pi_1(k) \to \pi_1(Y) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ `localisation en } y\text{'}$$

Point-clef :

$$\mathrm{im}(\rho_y) \subset U \Leftrightarrow \begin{tikzcd} Y_U \arrow[d] & \\ Y & \mathrm{spec}(k) \arrow[l, "y"] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

k-points de Y_U au-dessus de y controlent $\mathrm{im}(\rho_y)$
$Y_U \to Y$ *Schéma modulaire abstrait SMA*

Retour au pb de la borne uniforme

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$
$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = X_y(\bar{k})[N]^{\pi_1(y)}$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = F(X[N])^{\pi_1(y)}$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = \left\{ v \in F(X[N]) \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{Stab}_{\mathrm{im}(\rho)}(v) =: U_v \right\}$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = \left\{ v \in F(X[N]) \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{Stab}_{\mathrm{im}(\rho)}(v) =: U_v \right\}$$

$$Y_1(N) := \bigsqcup_{v \in F(X[N])^\times} Y_{U_v} \to Y \ \text{ rev. étale (non-connexe)}$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = \left\{ v \in F(X[N]) \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{Stab}_{\mathrm{im}(\rho)}(v) =: U_v \right\}$$

$$Y_1(N) := \bigsqcup_{v \in F(X[N])^\times} Y_{U_v} \to Y \ \text{ rev. étale (non-connexe)}$$

$$U_v \subset U_{nv} \curvearrowright Y_{U_v} \to Y_{U_{nv}} \curvearrowright Y_1(nN) \to Y_1(N)$$

Retour au pb de la borne uniforme

$X \to Y$ famille de variétés abéliennes de dimension g

$$\ker([N] : X \to X) =: X[N] \to Y \text{ rev. étale de } Y$$

$$F(X[N]) \simeq (\mathbb{Z}/N)^{2g}$$

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(F(X[N])) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N)$$

$$X_y(k)[N] \quad = \left\{ v \in F(X[N]) \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{Stab}_{\mathrm{im}(\rho)}(v) =: U_v \right\}$$

$$Y_1(N) := \bigsqcup_{v \in F(X[N])^\times} Y_{U_v} \to Y \ \text{ rev. étale (non-connexe)}$$

$$U_v \subset U_{nv} \curvearrowright Y_{U_v} \to Y_{U_{nv}} \curvearrowright Y_1(nN) \to Y_1(N)$$

$$X_y(k)[N]^\times \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{tikzcd} Y_1(N) \arrow[d] & \\ Y & \mathrm{spec}(k) \arrow[l, "y"] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

Retour au pb de la borne uniforme

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Courbes modulaires classiques	Courbes modulaires abstraites
Facile	
Uniformisation complexe $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \setminus \mathfrak{H}$	

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Courbes modulaires classiques	Courbes modulaires abstraites
Facile	Délicat
Uniformisation complexe $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \setminus \mathfrak{H}$	

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Courbes modulaires classiques	Courbes modulaires abstraites
Facile	Délicat
Uniformisation complexe $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \setminus \mathfrak{H}$	Devt de **techniques anabéliennes** *ad-hoc*

Propriétés de la représentation ρ $\leftrightarrow$ Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Courbes modulaires classiques	Courbes modulaires abstraites
Facile	Délicat
Uniformisation complexe $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \setminus \mathfrak{H}$	Devt de **techniques anabéliennes** *ad-hoc* Arithmétique des courbes algébriques Théorie 'géométrique' des groupes adaptée au type de coefficients $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{F}_\ell$ ...

Propriétés de la représentation ρ $\leftrightarrow$ Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$

e.g. ramification de $Y_1(N) \to Y$ ($\overset{\text{R.-H.}}{\Rightarrow}$ genre), gonalité de $Y_1(N)$

Retour au pb de la borne uniforme

Si Y courbe : Genre / gonalité géométrique de $Y_1(\ell^n)$ / $Y_1(\ell) \to +\infty$?

Courbes modulaires classiques	Courbes modulaires abstraites
Facile	Délicat
Uniformisation complexe $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \setminus \mathfrak{H}$	Devt de **techniques anabéliennes** *ad-hoc* Arithmétique des courbes algébriques Théorie 'géométrique' des groupes adaptée au type de coefficients $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{F}_\ell$ ...

Propriétés de la représentation ρ $\leftrightarrow$ Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$

bornée

modération ($p > 0$)

semisimplicité géom.

e.g. ramification de $Y_1(N) \to Y$ ($\overset{\text{R.-H.}}{\Rightarrow}$ genre), gonalité de $Y_1(N)$

Generalisations

Propriétés de la représentation ρ	$\leftrightarrow$	Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$
bornée modération ($p > 0$) semisimplicité géom.		

Generalisations

Propriétés de la représentation ρ	$\leftrightarrow$	Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$
bornée		
modération ($p > 0$)		
semisimplicité géom.		

Vérifiées par les **représentations motiviques**

Generalisations

Propriétés de la représentation ρ	$\leftrightarrow$	Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$
bornée		
modération ($p > 0$)		
semisimplicité géom.		

Vérifiées par les **représentations motiviques** = construites à partir des groupes de cohomologie $H^*(Y_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}/N)$ pour $X \to Y$ lisse, propre et, plus généralement, de n'importe quelle famille de compagnons (Représentations automorphes)

Generalisations

Propriétés de la représentation ρ	$\leftrightarrow$	Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$

bornée
modération ($p > 0$)
semisimplicité géom.

Vérifiées par les **représentations motiviques** $=$ construites à partir des groupes de cohomologie $H^*(Y_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}/N)$ pour $X \to Y$ lisse, propre et, plus généralement, de n'importe quelle famille de compagnons (Représentations automorphes)

- Yoga de cohomologie étale et groupe fondamental (SGAs ; $\sim$ 60's)
- Comparison étale $\leftrightarrow$ singulier ($p = 0$)
- Théorie des poids (Deligne ; 1980), Altérations (De Jong ; 1996)
- Spécialisation sous différents avatars (SGA1, Pinceaux de Lefschetz, Bertini, irr. de Hilbert)

Generalisations

Propriétés de la représentation ρ	$\leftrightarrow$	Propriétés arithmetico-géométriques de $Y_1(N)$
bornée		
modération ($p > 0$)		
semisimplicité géom. $p > 0$		

Vérifiées par les **représentations motiviques** = construites à partir des groupes de cohomologie $H^*(Y_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}/N)$ pour $X \to Y$ lisse, propre et, plus généralement, de n'importe quelle famille de compagnons (Représentations automorphes)

- Yoga de cohomologie étale et groupe fondamental (SGAs ; $\sim$ 60's)
- Comparison étale $\leftrightarrow$ singulier ($p = 0$)
- Théorie des poids (Deligne ; 1980), Altérations (De Jong ; 1996)
- Spécialisation sous différents avatars (SGA1, Pinceaux de Lefschetz, Bertini, irr. de Hilbert)

Deligne ; 1980 pour $\mathbb{Q}_\ell$-coefficients ;
C-Hui-Tamagawa ; 2016 pour $H^*(Y_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell)$, $\ell \gg 0$;
C, 2017 pour réduction modulo ℓ des familles de compagnons (coefficients ultraproduits)

Image ouverte uniforme

Image ouverte uniforme

Thm (**Image ouverte uniforme**, C-Tamagawa ; 2013)
$k/\mathbb{Q}$ de type fini, Y/k curve
V_ℓ $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie

$$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(V_\ell) \text{ tel que } \mathrm{Lie}(\rho(\pi_1(Y_{\bar{k}})))^{ab} = 0$$

$$Y(\rho) := \{y \in Y \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{im}(\rho) \text{ Pas ouverte}\}$$

Alors, pour tout $d \geq 1$, $Y(\rho)^{\leq d}$ est fini et pour tout $y \in Y^{\leq d} \setminus Y(\rho)^{\leq d}$,

$$[\mathrm{im}(\rho) : \mathrm{im}(\rho_y)] \leq B_\rho(d)$$

- Vrai aussi pour $p > 0$ et $d = 1$ (Ambrosi ; 2017)

Image ouverte uniforme/ Applications

Thm (**Image ouverte uniforme**, C-Tamagawa ; 2013)
$k/\mathbb{Q}$ de type fini, Y/k curve
V_ℓ $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie

$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(V_\ell)$ *tel que* $\mathrm{Lie}(\rho(\pi_1(Y_{\bar{k}})))^{ab} = 0$

$$Y(\rho) := \{y \in Y \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{im}(\rho) \text{ Pas ouverte}\}$$

Alors, pour tout $d \geq 1$, $Y(\rho)^{\leq d}$ est fini et pour tout $y \in Y^{\leq d} \setminus Y(\rho)^{\leq d}$,

$$[\mathrm{im}(\rho) : \mathrm{im}(\rho_y)] \leq B_\rho(d)$$

- Vrai aussi pour $p > 0$ et $d = 1$ (Ambrosi ; 2017)

$$\text{Invariant} \quad H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A}$$

Image ouverte uniforme/ Applications

Thm (**Image ouverte uniforme**, C-Tamagawa ; 2013)
$k/\mathbb{Q}$ de type fini, Y/k curve
V_ℓ $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie

$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(V_\ell)$ *tel que* $\mathrm{Lie}(\rho(\pi_1(Y_{\bar{k}})))^{ab} = 0$

$$Y(\rho) := \{y \in Y \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{im}(\rho) \text{ Pas ouverte}\}$$

Alors, pour tout $d \geq 1$, $Y(\rho)^{\leq d}$ est fini et pour tout $y \in Y^{\leq d} \setminus Y(\rho)^{\leq d}$,

$$[\mathrm{im}(\rho) : \mathrm{im}(\rho_y)] \leq B_\rho(d)$$

- Vrai aussi pour $p > 0$ et $d = 1$ (Ambrosi ; 2017)

Invariant H : Variétés $/k$ $\to$ $\mathcal{A}$

$X \to Y$ propre, lisse

Image ouverte uniforme/ Applications

Thm (**Image ouverte uniforme**, C-Tamagawa ; 2013)
$k/\mathbb{Q}$ de type fini, Y/k curve
V_ℓ $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie

$\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(V_\ell)$ *tel que* $\mathrm{Lie}(\rho(\pi_1(Y_{\bar{k}})))^{ab} = 0$

$$Y(\rho) := \{y \in Y \mid \mathrm{im}(\rho_y) \subset \mathrm{im}(\rho) \text{ Pas ouverte}\}$$

Alors, pour tout $d \geq 1$, $Y(\rho)^{\leq d}$ est fini et pour tout $y \in Y^{\leq d} \setminus Y(\rho)^{\leq d}$,

$$[\mathrm{im}(\rho) : \mathrm{im}(\rho_y)] \leq B_\rho(d)$$

- Vrai aussi pour $p > 0$ et $d = 1$ (Ambrosi ; 2017)

$$\text{Invariant} \quad H : \quad \text{Variétés } /k \quad \to \quad \mathcal{A}$$

$X \to Y$ propre, lisse $\curvearrowright$ pour un choix adapté de $\rho_H : \pi_1(Y) \to \mathrm{GL}(V_\ell)$

$$Y(\rho_H) = Y(H) := \{y \in Y \mid H(X_y) \neq H(X_\eta)\}$$

Image ouverte uniforme / Applications

$\mathbb{Q} \subset k$ de type fini, Y/k courbe
$X \to Y$ lisse, propre

- dégénération du **groupe de Galois motivique** dans la famille $X_{\overline{y}}$, $y \in Y$ *i.e.* le lieu où $X_{\overline{y}}$ a d'avantage de cycles motivés (est 'plus simple') (C ; 2012)
  - en part., 'jumping locus' du rang du groupe de Néron-Severi, des anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes, *etc.* - *cf.* Maulik-Poonen ; 2012)
- dégénération des 1-**cocycles** (C ; 2016)
  - spécialisation des algebraic cycles algébriques (homologiquement triviaux) (en part. 'jumping locus' du rang des variétés abéliennes - *e.g.* Silverman ; 1983)
- borne uniforme pour la **torsion** ℓ**-primaire des variétés abéliennes** (C-T ; 2012)
- 'jumping locus' de la partie ℓ-**primaire du groupe de Brauer** (C-Charles ; 2017)
  - en part. borne uniforme pour $Br(X_{\overline{y}})^{\pi_1(y)}[\ell^\infty]$, $y \in Y$ si $X \to Y$ famille de surfaces $K3$ ou de variétés abéliennes

Et ensuite ?

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,??$$

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,??$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,??$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ borne uniforme pour la torsion ℓ-primaire

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,?\,?$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ lieu de dégénérescence des groupes de Galois motiviques 'négligeable'

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,?\,?$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ lieu de dégénérescence des groupes de Galois motiviques 'négligeable'
- Contournement de la Conj Lang ?

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,??$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ lieu de dégénérescence des groupes de Galois motiviques 'négligeable'
- Contournement de la Conj Lang ?
  - $\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$
    X_n de type général, $n \gg 0 \Rightarrow \mathrm{im}(\varprojlim X_n(k) \to X)$ pas Zariski-dense ?

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,??$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ lieu de dégénérescence des groupes de Galois motiviques 'négligeable'
- Contournement de la Conj Lang ?
  - $\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$
    X_n de type général, $n \gg 0 \Rightarrow \mathrm{im}(\varprojlim X_n(k) \to X)$ pas Zariski-dense ?
  - Structure de $Y(\rho)^{\leq d}$, $d \to +\infty$? ($\sim$ sous-variétés spéciales des variétés de Shimura)

Et ensuite ?

La construction des SMA marche pour Y de dim arbitraire donc,

$$\text{Et si } \dim(Y) \geq 2\,?\,?$$

- $Y_1(\ell^n)$ de type général pour $n \gg 0$ (dimension de Kodaira *via* dictionnaire anabélien) ?
  Conj Lang $\Rightarrow$ lieu de dégénérescence des groupes de Galois motiviques 'négligeable'
- Contournement de la Conj Lang ?
  - $\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$
    X_n de type général, $n \gg 0 \Rightarrow \mathrm{im}(\varprojlim X_n(k) \to X)$ pas Zariski-dense ?
  - Structure de $Y(\rho)^{\leq d}$, $d \to +\infty$? ($\sim$ sous-variétés spéciales des variétés de Shimura)
- $\mathbb{Z}/\ell$-coefficients, $\ell \gg 0$: même pour $\dim(Y) = 1$ les résultats (E-H-K, C-T) ne semblent pas complets. Liens avec *abc* ($\dim(Y) = 1$) et Conj Vojta ($\dim(Y) \geq 2$) ; résultats partiels (C-Tamagawa ; 2018).