Séminaire BOURBAKI Janvier 2019
71e année, 2018–2019, no 1156

# LA CONJECTURE DES COMPAGNONS
# [d'après Deligne, Drinfeld, L. Lafforgue, T. Abe, ...]

par **Anna Cadoret**

## 1. INTRODUCTION

Dans tout l'exposé $k$ désignera un corps fini de caractéristique $p$ et de cardinal $q$ et $\overline{k}$ un clôture algébrique de $k$ ; on notera $\pi_1(k) := \pi_1(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(\overline{k}))$ le groupe de Galois absolu de $k$ et $\varphi \in \pi_1(k)$ le Frobenius géométrique *i.e.* l'inverse de $a \to a^q$. Une $k$-variété est un schéma séparé de type fini sur $k$ et une $k$-courbe est une $k$-variété de dimension 1. Si $X$ est une $k$-variété, on note $|X|$ l'ensemble des points fermés de $X$. Pour $x \in X$ (non nécessairement fermé), on note $k(x)$ le corps résiduel et si $\overline{x}$ est un point géométrique au-dessus de $x$, $\pi_1(x) := \pi_1(x, \overline{x})$ le groupe de Galois absolu de $k(x)$ ; si $x \in |X|$, on note $\varphi_x \in \pi_1(x)$ le Frobenius géométrique.
La lettre $\ell$ désignera toujours un premier $\neq p$. Soit $X$ une $k$-variété normale, $*$ un premier et $Q$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}_*$. On utilisera la terminologie (empruntée à Kedlaya) $Q$-coefficient sur $X$ pour désigner de façon uniforme :

— Si $* \neq p$ : un $Q$-faisceau de Weil lisse ;

— Si $* = p$ : un $Q$-F-isocristal surconvergent.

Soit $\mathcal{C}$ un $Q$-coefficient sur $X$. La fibre $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ en un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de $x \in |X|$ est un $Q$-espace vectoriel de dimension finie naturellement muni d'une action du Frobenius $\varphi_x$. On notera $\chi_x(\mathcal{C}, T) := \det(1 - \varphi_x T|\mathcal{C}_x) \in Q[T]$ le polynôme caractéristique inverse ; il ne dépend pas de $\overline{x}$. Le corps des traces $Q_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est la $\mathbb{Q}$-sous-extension de $Q$ engendrée par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C}, T)$, $x \in |X|$. Si $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ est un isomorphisme, un $\sigma$-compagnon de $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-coefficient $\mathcal{C}'$ tel que $\sigma\chi_x(\mathcal{C}, T) = \chi_x(\mathcal{C}', T),\ x \in |X|$. On notera $\mathcal{C} \sim_\sigma \mathcal{C}'$. La conjecture dite 'des compagnons', sous une forme un peu simplifiée, est l'énoncé suivant.

*Conjecture 1.1.* — (Conjecture des compagnons ; Deligne [D80b, (1.2.10)]) Soit $X$ une $k$-variété normale, géométriquement connexe et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$, irréductible et de déterminant fini.

a) [Pureté] $\mathcal{C}$ est pur de poids 0 : pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \mathbb{C}$ et pour tout $x \in |X|$ les racines de $\iota\chi_x(\mathcal{C}, T)$ sont de module 1 ;

b) [Finitude] $Q_{\mathcal{C}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$ ;

c) [Compagnons] Pour tout isomorphisme $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$, $\mathcal{C}$ admet un $\sigma$-compagnon.

On verra que, s'il existe, le $\sigma$-compagnon est unique à isomorphisme près, irréductible et de déterminant fini.

### 1.1. Statut

La conjecture des compagnons telle qu'elle apparaît dans Weil II est un peu différente de l'énoncé 1.1. Deligne demande notamment que les compagnons ne soient pas seulement des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients mais qu'il existe une extension finie $Q$ de $Q_{\mathcal{C}}$ tels que les compagnons soient définis sur les complétés de $Q$ ( [D80b, (1.2.10) (v)]). La descente du corps des coefficients est traitée au paragraphe 8.2 ; c'est en fait une conséquence 'formelle' de le Conjecture 1.1. L'autre différence est la partie $p$-adique de la conjecture. Dans Weil II Deligne énonce la conjecture pour les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et émet l'espoir qu'il existe 'de petits camarades cristallins' ( [D80b, (1.2.10) (vi)]). C'est Crew [Cr92, Conj. 4.13] (*cf.* aussi [A18a, Conj. (D)]) qui a identifié la catégorie des F-isocristaux surconvergents de Berthelot [B91] comme étant un analogue $p$-adique raisonnable de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et a obtenu les premiers résultats à l'appui - notamment l'analogue du théorème de monodromie globale ; un ingrédient essentiel de la théorie des poids de Deligne (*cf.* 2.2 ci-dessous).

**1.1.1.** —Lorsque $X$ est une courbe, la conjecture des compagnons est une conséquence de la correspondance de Langlands (pour $GL_r$) pour le corps de fonctions $k(X)$ de $X$. La correspondance $\ell$-adique en rang 2 avait déjà été établie par Drinfeld [Dr78] à la fin des années 70 et c'est ce résultat qui est sans doute à l'origine de la conjecture des compagnons. Deligne avait noté que la preuve de Drinfeld n'établissait pas seulement une correspondance 'abstraite' préservant les facteurs L locaux entre faisceaux $\ell$-adiques irréductibles de rang 2 sur les ouverts de $X$ et représentations automorphes pour $GL_2$ des adèles de $k(X)$ mais qu'elle exhibait les faisceaux $\ell$-adiques en question comme la réalisation de certains motifs découpés dans la cohomologie des champs de Chtoucas, montrant donc qu'ils sont d'origine géométrique. En développant l'approche de Drinfeld, L. Lafforgue [L02] a démontré la correspondance $\ell$-adique en rang quelconque, établissant ainsi automatiquement la conjecture des compagnons pour les courbes dans le cadre $\ell$-adique. La preuve de la version $p$-adique de la correspondance ( [A18a, Conj. (L)]) a été l'un des moteurs de la construction d'un formalisme en cohomologie rigide parallèle à celui de la cohomologie $\ell$-adique. Ces développements techniques ont permis à T. Abe [A18a], [A18b] d'établir la version $p$-adique de la correspondance de Langlands et, partant, de compléter la conjecture des compagnons pour les courbes.

**1.1.2.** —En dimension supérieure, il n'y a pas d'analogue - même conjectural - de la correspondance de Langlands mais dans le contexte de la philosophie des motifs (*e.g.* [EKer11, §2]) et notamment par analogie avec une conjecture de Simpson pour les systèmes locaux rigides quasi unipotents sur une $\mathbb{C}$-variété lisse ( [Si91, Conj. 4], [LaS18, Conj. 1.1] si $X$ est projective - *cf* 9), on s'attend à ce que les $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients irréductibles de déterminant fini sur une $k$-variété $X$ lisse de dimension arbitraire soient encore la réalisation de motifs découpés dans la cohomologie de certains champs sur $X$. Si de tels résultats semblent actuellement hors de portée, la conjecture des compagnons est maintenant en grande partie établie en toute dimension.

*Théorème 1.2.* — (Deligne, Drinfeld, L. Lafforgue, Abe, Abe-Esnault, Kedlaya) Les énoncés 1.1 a), b) sont établis. L'énoncé 1.1 c) est établi si $X$ est une courbe ou si $*' \neq p$ et $X$ est lisse.

Pour établir la Conjecture 1.1 en dimension supérieure, la stratégie n'est donc pas de chercher à construire une réalisation motivique des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients mais de se ramener au cas des courbes par des arguments géométriques. L'énoncé 1.1 a) peut se tester en un seul point et est invariant par extension de corps ; après quelques réductions standard, il suffit donc, étant donné un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ irréductible de déterminant fini, de savoir construire une courbe $C \to X$ (dépendant de $\mathcal{C}$) telle que $\mathcal{C}|_C$ est encore irréductible. C'est essentiellement ainsi que procède Deligne [D12, Thm. 1.6] (corrigeant un argument de L. Lafforgue) pour $* \neq p$ et Abe-Esnault [AE16, Thm. 2.6], Kedlaya [Ked18b, Lem. 3.1.3] pour $* = p$. Les énoncés 1.1 b) et 1.1 c) sont eux de nature globale et l'existence de telles courbes n'est pas suffisant pour les démontrer. L'énoncé 1.1 b) pour $* \neq p$ est démontré par Deligne [D12, Thm. 3.1]. Le point-clef est de prouver que si $X$ est une courbe, le corps $Q_{\mathcal{C}}$ est engendré par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C}, T)$ pour $x \in |X|$ de degré résiduel borné seulement en termes de la 'complexité' de $\mathcal{C}$ (un invariant qui ne dépend que de $X$ et de la ramification de $\mathcal{C}$) puis de montrer que sur une variété $X$ de dimension arbitraire on peut faire passer en tout point $x \in |X|$ une courbe $C^x$ telle que la complexité de $\mathcal{C}|_{C^x}$ reste suffisamment petite par rapport au degré résiduel de $x$. L'énoncé 1.1 c) pour $*' \neq p$ est lui démontré par Drinfeld [Dr12, Thm. 1.1], inspiré par des techniques de Wiesend. L'idée est de considérer l'ensemble $Cu(X)$ des courbes tracées sur $X$, d'appliquer 1.1 c) aux restrictions $\mathcal{C}|_C$, $C \in Cu(X)$ puis de montrer que les $\sigma(\mathcal{C}|_C)$, $C \in Cu(X)$ proviennent en fait d'un $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-coefficient $\sigma\mathcal{C}$ sur $X$. L'énoncé sous-jacent est donc un critère (Théorème 7.1) caractérisant les familles de faisceaux $\ell$-adiques $\mathcal{C}|_C$, $C \in Cu(X)$ vérifiant la condition de compatibilité évidente : $\mathcal{C}_C|_{C\times_X C'} \simeq \mathcal{C}_{C'}|_{C\times_X C'}$, $C, C' \in Cu(X)$ (ce que, en suivant Esnault-Kerz, on appellera un squelette $\ell$-adique) qui proviennent d'un faisceau $\ell$-adique sur $X$ en fonction de propriétés (finitude du corps des coefficients, et modération) préservées par les compagnons sur les courbes. La preuve de l'énoncé 1.1 b) s'applique non seulement aux faisceaux $\ell$-adiques $\mathcal{C}$ sur $X$ dont le corps $Q_{\mathcal{C}}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ mais à n'importe quel squelette $\ell$-adique $\mathcal{C}_C$, $C \in Cu(X)$ dont les corps $Q_{\mathcal{C}_C}$ sont des extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ et qui sont modérés par une même altération génériquement étale de $X$. Cette observation permet de montrer la finitude et l'existence de compagnons $\ell$-adiques pour les F-isocristaux surconvergents. Comme l'a noté Kedlaya, la preuve de 1.1 b) peut aussi se transposer telle quelle au cadre $p$-adique. Il n'en va pas de même de la preuve de 1.1 c), qui utilise de façon essentielle la description galoisienne (*cf.* 2.1.3) de la catégorie des faisceaux $\ell$-adiques, description dont on ne dispose pas dans le cadre $p$-adique.

### 1.2. Structure du texte

Le second paragraphe rassemble un certain nombre de notations et de préliminaires qui seront utilisés dans la suite. Nous n'avons pas tenté de donner la construction des catégories de $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients qui interviennent dans la conjecture des compagnons. Cela nous aurait conduit au-delà des objectifs de l'exposé. Mais nous avons essayé d'en dégager quelques propriétés essentielles, qui suffisent pour les manipuler. Le troisième paragraphe passe brièvement en revue la correspondance de Langlands pour $GL_r$. Au quatrième paragraphe, nous formalisons l'idée consistant à étudier un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients sur une variété $X$ de dimension supérieure *via* l'ensemble de ses restrictions aux courbes tracées sur $X$ en introduisant les notions de squelettes et de squelettes géométriques. Le cinquième paragraphe est consacré à la preuve de l'énoncé de finitude 1.1 b) et les sixième et septième paragraphes à celle de l'existence de compagnons 1.1 c) pour $*' \neq p$ et $X$ lisse. Au huitième paragraphe, nous déduisons du Théorème 1.2 certaines propriétés de descente du corps des coefficients et de $*$-indépendance. Enfin, au dernier paragraphe, nous donnons une application - due à Esnault-Groechenig - de la Conjecture 1.1 à la Conjecture de Simpson évoquée plus haut.

Au-delà de sa beauté conceptuelle, la Conjecture 1.1 fournit un substitut aux théorèmes de comparaison cohomologique, permettant de transférer certaines propriétés entre cohomologies $\ell$-adiques et cohomologie rigide. Ces aspects apparaissent un peu à la marge dans l'exposé (*cf.* notamment la fin du paragraphe 7.1 et le Corollaire 8.3) ; pour limiter la longueur du texte, nous ne les avons pas traités systématiquement.

### 1.3. Remerciements.

Je remercie Vincent Lafforgue, Javier Fresàn, Hélène Esnault et Marco d'Addezio pour leur relecture et corrections - notamment mathématiques. Je suis reconnaissante à Emiliano Ambrosi et Atsushi Shiho de m'avoir signalé un problème dans une première version de la preuve du Corollaire 3.8. Je remercie également les participants au groupe de travail organisé dans le cadre de l'A.N.R. ECOVA à l'I.H.P. au printemps 2017. C'est grâce à Emiliano Ambrosi, qui n'a pas hésité à s'attaquer aux isocristaux, que j'ai appris à avoir un peu moins peur des aspects $p$-adiques de la conjecture. La tentative de présenter uniformément les aspects $\ell$-adiques et $p$-adiques doit beaucoup aux textes de Kedlaya [Ked18b], [Ked18a] et d'Addezio [D'A18].

## 2. PRÉLIMINAIRES

Soit $X$ une $k$-variété normale, géométriquement connexe (pour simplifier), de dimension $d$.

## 2.1. $Q$-coefficients

Soit $*$ un nombre premier et $Q$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}_*$. Les catégories de $Q$-coefficients sont des catégories tannakiennes neutres sur $Q$ *i.e.* des $\otimes$-catégories abéliennes rigides $Q$-linéaires $\mathfrak{C}$ que l'on peut munir de $\otimes$-foncteurs 'fibres' $F : \mathfrak{C} \to \mathrm{Vect}_Q$, fidèles exacts de cible la $\otimes$-catégorie $\mathrm{Vect}_Q$ des $Q$-espaces vectoriels de dimension finie. A tout foncteur fibre est associé le $Q$-schéma en groupe affine $G(\mathfrak{C}, F) := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(F)$ des $\otimes$-automorphismes de $F$ - appelé groupe de Tannaka. Le foncteur fibre $F : \mathfrak{C} \to \mathrm{Vect}_Q$ induit une $\otimes$-équivalence de catégories entre $Q$-coefficients et $Q$-représentations de dimension finie de $G(\mathfrak{C}, F)$. Si $\mathcal{C}$ est un objet de $\mathfrak{C}$, on peut restreindre les foncteurs fibres à la plus petite sous-catégorie tannakienne $\langle \mathcal{C} \rangle^{\otimes}$ de $\mathfrak{C}$ contenant $\mathcal{C}$ ; le groupe de Tannaka correspondant $G(\mathcal{C}, F) := G(\langle \mathcal{C} \rangle^{\otimes}, F)$ est un $Q$-sous-groupe fermé de $GL(F(\mathcal{C}))$, quotient de $G(\mathfrak{C}, F)$. On renvoie par exemple à [D90] pour un exposé systématique du formalisme tannakien.

Les groupes de Tannaka dépendent des foncteurs fibres à forme intérieure près ; ceci n'interviendra pas dans l'exposé et on commettra un premier abus de notation en n'indiquant pas les foncteurs fibres.

**2.1.1.** — Rappelons que l'on a défini la catégorie des $Q$-coefficients sur $X$ comme :
— Si $* \neq p$ : la catégorie des $Q$-faisceaux de Weil lisses sur $X$.
— Si $* = p$ : la catégorie des $Q$-F-isocristaux surconvergents sur $X$.
Après choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k$, la catégorie des $Q$-coefficients sur $\mathrm{Spec}(k)$ est équivalente à la catégorie des $Q$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action du Frobenius géométrique $\varphi$. Si $\mathcal{C}$ est un $Q$-coefficient sur $X$ et $\overline{x}$ un point géométrique au-dessus de $x \in |X|$ (et si $* = p$, $Q$ contient le corps des fractions des vecteurs de Witt de $k(x)$), la fibre $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ en $\overline{x}$ est donc un $Q$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de $\varphi_x$. Cette action ne dépend du choix de $\overline{x}$ qu'à isomorphisme près, ce qui, là encore n'interviendra pas dans l'exposé et justifie notre deuxième abus de notation ($\mathcal{C}_x$ plutôt que $\mathcal{C}_{\overline{x}}$). On commettra un troisième abus en notant encore $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_x$ le foncteur composé du foncteur fibre en $x$ et du foncteur d'oubli de l'action de $\varphi_x$ ; munie de $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_x$, la catégorie des $Q$-coefficients est tannakienne neutre sur $Q$.

**2.1.2.** — On dispose d'une version géométrique des catégories de $Q$-coefficients sur $X$, à savoir :
— Si $* \neq p$ : la catégorie des $Q$-faisceaux lisses sur $X_{\overline{k}}$.
— Si $* = p$ : la catégorie des $Q$-isocristaux surconvergents sur $X$.
La catégorie des $Q$-coefficients géométriques sur $\mathrm{Spec}(k)$ est équivalente à la catégorie des $Q$-espaces vectoriels de dimension finie. Si $\mathcal{C}$ est un $Q$-coefficient géométrique sur $X$ et $x \in |X|$ (et si $* = p$, $Q$ contient le corps des fractions des vecteurs de Witt de $k(x)$), la fibre $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ en $x$ est donc un $Q$-espace vectoriel de dimension finie. Munie du foncteur $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_x$ la catégorie des $Q$-coefficients géométriques est tannakienne neutre sur $Q$. On dispose d'un foncteur naturel $\mathcal{C} \mapsto \overline{\mathcal{C}}$ (on notera aussi parfois $\mathcal{C}|_{X_{\overline{k}}} := \overline{\mathcal{C}}$ si $* \neq p$) de la

catégorie des $Q$-coefficients sur $X$ vers celle des $Q$-coefficients géométriques sur $X$. Si $* \neq p$, c'est le pullback par la projection canonique $X_{\overline{k}} \to X$. Si $* = p$, c'est le foncteur d'oubli de la structure de Frobenius.

**2.1.3.** *Le cas* $* = \ell$. — La catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux (étales) lisses est construite par passages à la limite à partir des catégories de faisceaux localement constants constructibles à coefficients finis de caractéristique $\ell$, qui sont des catégories galoisiennes. On en déduit que pour tout point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de $x \in X$, la fibre $\mathcal{C}_x$ d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathcal{C}$ est munie d'une action continue du groupe fondamental étale $\pi_1(X) := \pi_1(X, \overline{x})$ de $X$ (là encore $\pi_1(X, \overline{x})$ et son action sur $\mathcal{C}_x$ ne dépendent qu'à isomorphisme près du choix de $\overline{x}$, justifiant un quatrième abus de notation...) et que le foncteur fibre $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_x$ induit une équivalence de catégories entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $X$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations continues de dimension finie de $\pi_1(X)$. Comme $\pi_1(X)$ est compact, la condition de continuité implique que l'action de $\pi_1(X)$ stabilise un sous $Z$-réseau $H \subset V$ pour $Z$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ et que l'action de $\pi_1(X)$ sur $H$ est continue pour les topologies profinies (*e.g.* [KSa99, Rem. 9.0.7]). Les groupes $G(\overline{\mathcal{C}}), G(\mathcal{C}) \subset GL(\mathcal{C}_x)$ s'identifient respectivement à l'adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(X_{\overline{k}}), \pi_1(X)$ agissant sur $\mathcal{C}_x$. Les morphismes $X_{\bar{k}} \to X \to \mathrm{Spec}(k)$ induisent une suite exacte courte (on a supposé $X$ géométriquement connexe)

$$1 \to \pi_1(X_{\bar{k}}) \to \pi_1(X) \to \pi_1(k) \to 1$$

Par ailleurs, le Frobenius géométrique définit un morphisme $\mathbb{Z} \to \pi_1(k) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$. La catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses peut être décrite de la même façon en remplaçant le groupe fondamental étale par le groupe de Weil $W(X)$, qui est le produit fibré $W(X) := \pi_1(X) \times_{\pi_1(k)} \mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par le produit des topologie profinie sur $\pi_1(X_{\overline{k}})$ et discrète sur $\mathbb{Z}$. Par exemple, la donnée d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau de Weil lisse de rang 1 sur $\mathrm{Spec}(k)$ est équivalente à celle d'un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ ; la sous-catégorie pleine des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $\mathrm{Spec}(k)$ correspond au sous-groupe $\overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ des unités $\ell$-adiques. Si $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau de Weil lisse sur $X$, les groupes $G(\overline{\mathcal{C}}), G(\mathcal{C}) \subset GL(\mathcal{C}_x)$ s'identifient encore respectivement à l'adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(X_{\overline{k}}), W(X)$ agissant sur $\mathcal{C}_x$.

La catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses est introduite par commodité pour maintenir le caractère purement algébrique de la correspondance de Langlands et, *a posteriori*, le parallélisme avec la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_p$-F-isocristaux surconvergents. Nous verrons plus bas que la différence entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses n'est pas essentielle.

On trouvera dans [F18, §2] une introduction un peu plus détaillée aux faisceaux $\ell$-adiques et dans l'ouvrage [Mi] une présentation 'for the working mathematician' des principaux résultats de la théorie. Pour une introduction aux F-isocristaux surconvergents, on renvoie à l'exposé de survol de Kedlaya [Ked18a]. En première approximation, on peut penser aux $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients comme aux analogues en caractéristique positive des systèmes locaux de la géométrie complexe.

## 2.2. Cohomologie

On dispose de groupes de cohomologie $H^i(X,-)$ et de groupes de cohomologie à support compact $H^i_c(X,-)$, qui sont des $Q$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $i > 2d$. Lorsque $* = \ell$, il s'agit des groupes de cohomologie $\ell$-adiques $H^i(X,-) = H^i(X_{\overline{k}}, -|_{X_{\overline{k}}})$, $H^i_c(X,-) = H^i_c(X_{\overline{k}}, -|_{X_{\overline{k}}})$, construits à partir de la cohomologie étale à coefficients de torsion. Lorsque $* = p$, il s'agit des groupes de cohomologie rigide $H^i(X,-) = H^i_{rigid}(X_{\overline{k}}, -|_{X_{\overline{k}}})$, $H^i_c(X,-) = H^i_{c,rigid}(X_{\overline{k}}, -|_{X_{\overline{k}}})$ construits par Berthelot ; si $X$ est propre et lisse sur $k$, ils coïncident avec les groupes de cohomologie cristalline. Ces $Q$-espaces vectoriels sont munis d'une action naturelle du Frobenius géométrique $\varphi$.

## 2.3. Images inverses, images directes

Si $f : Y \to X$ est un revêtement étale, on dispose d'un foncteur image directe par $f$ que l'on note $f_*$ de la catégorie des $Q$-coefficients (resp. des $Q$-coefficients géométriques) sur $Y$ vers celle des $Q$-coefficients (resp. des $Q$-coefficients géométriques) sur $X$. Par exemple, si $* = \ell$ et $Y$ est connexe, $\pi_1(Y)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(X)$ et le foncteur $f_*$ correspond en termes de représentations $\ell$-adiques au foncteur d'induction de $\pi_1(Y)$ à $\pi_1(X)$ (ou de $W(Y)$ à $W(X)$).

Si $f : Y \to X$ est un morphisme de $k$-variétés, on dispose d'un foncteur image inverse par $f$ que l'on note $f^*$ ou $-|_Y$ de la catégorie des $Q$-coefficients (resp. des $Q$-coefficients géométriques) sur $X$ vers celle des $Q$-coefficients (resp. des $Q$-coefficients géométriques) sur $Y$. Si $* = \ell$ et $Y$ est connexe, $f : Y \to X$ induit un morphisme de groupes topologiques $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ et le foncteur $f^*$ correspond en termes de représentations $\ell$-adiques au foncteur de restriction de l'action de $\pi_1(X)$ à $\pi_1(Y)$. Mentionnons deux cas particuliers, utiles dans les réductions.

**2.3.1.** *Revêtement étale.* — Soit $\mathcal{C}$ un $Q$-coefficient sur $X$. En utilisant encore que les revêtements étales connexes de $X$ correspondent aux sous-groupes ouverts de $\pi_1(X)$, il est immédiat que, si $* \neq p$ et $X' \to X$ est un revêtement étale connexe, le morphisme $G(\mathcal{C}|_{X'}) \to G(\mathcal{C})$ est une immersion ouverte. Ce résultat est encore vrai mais un peu plus délicat pour $* = p$ (*e.g.* [D'A18, Prop. 3.3.4]).

**2.3.2.** *Immersion ouverte d'image dense.* — Soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte d'image dense. En utilisant que le groupe fondamental étale d'un schéma normal connexe est le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée au-dessus des points de codimension 1 de son corps des fonctions, on déduit immédiatement que le morphisme de groupes profinis $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ est surjectif. En particulier, pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathcal{C}$ sur $X$, le morphisme $G(\mathcal{C}|_U) \to G(\mathcal{C})$ est un isomorphisme. Cette formulation tannakienne s'étend au $\overline{\mathbb{Q}}_p$-F-isocristaux surconvergents sous réserve que $U$ soit lisse sur $k$ ; modulo un lemme tannakien, c'est un résultat de Tsuzuki [Ts12, Cor. 1.2] — *cf.* [AE16, §4.6].

### 2.4. Quelques résultats de structure

Un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ de rang 1 sur $X$ est dit d'ordre fini s'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathcal{C}^{\otimes n}$ est trivial.

Notons $pr : X \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural et soit $\mathcal{L}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient de rang 1 sur $\mathrm{Spec}(k)$. Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ sur $X$ le twist de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{L}$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C} \otimes pr^*\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est déterminé par l'image $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_*^\times$ de $\varphi$, on notera aussi parfois $\mathcal{C}^{(\alpha)} := \mathcal{C} \otimes pr^*\mathcal{L}$.

L'énoncé suivant permet de se ramener au cas des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients de déterminant fini et de passer des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses aux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses. Pour $* \neq p$, c'est une conséquence de la théorie du corps de classes, pour $* = p$, il faut travailler un peu plus.

*Théorème 2.1.* — ( [D80b, Prop. 1.3.4], [A18a, Lem. 6.1]) Tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient de rang 1 sur $X$ est le twist d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient fini. En particulier, tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$ est le twist d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient de déterminant fini.

*Corollaire 2.2.* — (Monodromie globale ; Grothendieck - [D80b, Thm. 1.3.8], [Cr92, Thm. 4.9]) Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$. Le radical de $G(\overline{\mathcal{C}})^\circ$ est unipotent.

*Corollaire 2.3.* — ( [D'A18, Lem. 3.4.4, Cor. 3.4.5]) Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple sur $X$.

a) Soit $X' \to X$ un revêtement étale connexe. Si tous les constituants irréductibles de $\mathcal{C}$ sont de déterminant fini, il en est de même de $\mathcal{C}|_{X'}$.
b) Sous l'hypothèse de 2.3 a), le groupe $G(\overline{\mathcal{C}})$ est semisimple, normal d'indice fini dans $G(\mathcal{C})$ (donc $G(\mathcal{C})$ est semisimple).

*Corollaire 2.4.* — ( [D12, 0.4]) Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau de Weil lisse irréductible sur $X$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a) $\mathcal{C}$ est étale ;
b) $\det(\mathcal{C})$ est étale ;
c) $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{(\alpha)}$, où $\mathcal{S}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse irréductible de déterminant fini et $\alpha$ est une unité $\ell$-adique.

Pour $n \geq 1$ notons $k_n$ l'extension de degré $n$ de $k$ dans $\overline{k}$ et $p_n : X_{k_n} \to X$ la projection canonique.

*Lemme 2.5.* — ( [D12, 1.3, 1.4], [Ked18b, Rem. 9.13]) Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient.

a) $\overline{\mathcal{C}}$ est irréductible si et seulement si $\mathcal{C}|_{X_{k_n}}$ est irréductible, $n \geq 1$ ;
b) Supposons $\mathcal{C}$ irréductible de rang $r$. Il existe $n|r$ tel que $\mathcal{C} = p_{n*}\mathcal{C}_n^{(\alpha_n)}$, où $\mathcal{C}_n$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient de rang $r/n$ et de déterminant fini sur $X_{k_n}$ tel que $\overline{\mathcal{C}}_n$ est irréductible, $\alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}_*^\times$ et l'orbite de $\mathcal{C}_n$ sous l'action de $\varphi$ est de longueur $n$.

### 2.5. Fonctions L et poids

Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$.

**2.5.1.** *Polynôme caractéristique et corps des traces.* — Le rang $r$ de $\mathcal{C}_x$ est indépendant de $x$ et on dispose d'une application polynôme caractéristique inverse

$$\begin{array}{rccc} \chi_-(\mathcal{C},T): & |X| & \to & \mathbb{P}_r(\overline{\mathbb{Q}}_*) \\ & x & \to & \chi_x(\mathcal{C},T) := \det(1-\varphi_x T|\mathcal{C}_x) \end{array}$$

à valeurs dans les $\overline{\mathbb{Q}}_*$-points de la $\mathbb{Q}$-variété $\mathbb{P}_r := \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^{r-1}$ des polynômes de degré $r$ et terme constant 1. On rappelle que le corps des traces de $\mathcal{C}$ est la $\mathbb{Q}$-sous-extension de $Q$ engendrée par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C},T)$, $x \in |X|$. On dira que $\mathcal{C}$ est algébrique si $Q_{\mathcal{C}}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Si $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ est un isomorphisme, on dira que $\mathcal{C}$ est $\sigma$-unitaire si pour tout $x \in |X|$ et pour toute valeur propre $\alpha$ de $\varphi_x$ agissant sur $\mathcal{C}_x$, $\sigma(\lambda) \in \overline{\mathbb{Z}}_*^\times$. Si $\mathcal{C}$ est $\sigma$-unitaire pour tout $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_*$ on dira que $\mathcal{C}$ est $*$-unitaire. Si $\mathcal{C}$ est $\sigma$-unitaire pour tout $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$, $*' \neq p$ on dira que $\mathcal{C}$ est $p'$-unitaire.

**2.5.2.** *Fonctions L.* — Supposons de plus $X$ *lisse*. Pour $x \in |X|$, on notera $n(x) := [k(x):k]$ le degré résiduel et $L_x(\mathcal{C}) := \chi_x(\mathcal{C}, T^{n(x)})^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}_*[[T]]$ la fonction L locale de $\mathcal{C}$ en $x$. La fonction L globale de $\mathcal{C}$ est le produit $L(\mathcal{C},T) := \prod_{x\in|X|} L_x(\mathcal{C},T) \in \overline{\mathbb{Q}}_*[[T]]$. La formule des traces et la dualité de Poincaré la relient aux groupes de cohomologie et aux groupes de cohomologie à support compact.

*Théorème 2.6.* — ( [Gro68], [EtLS97])

$$L(\mathcal{C},T) = \prod_{i\geq 0} \det(1-q^{-d}\varphi^{-1}T|H^i(X,\check{\mathcal{C}}))^{(-1)^{i+1}} = \prod_{i\geq 0} \det(1-\varphi T|H^i_c(X,\mathcal{C}))^{(-1)^{i+1}}.$$

**2.5.3.** *Poids.* — Étant donné un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \mathbb{C}$, les $\iota$-poids de $\mathcal{C}$ en $x \in |X|$ sont les $2\log_{|k(x)|}(|\iota\alpha|)$ pour $\alpha$ décrivant les racines inverses de $\chi_x(\mathcal{C},T)$. On dit que $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur de poids $w$ en $x \in |X|$ si tous ses $\iota$-poids en $x$ sont égaux à $w$ et que $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur de poids $w$ s'il l'est en tout $x \in |X|$. On dit que $\mathcal{C}$ est $\iota$-mixte s'il est extension successive de $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients $\iota$-purs. Enfin on dit que $\mathcal{C}$ est pur de poids $w$ (resp. mixte) s'il est $\iota$-pur de poids $w$ pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \mathbb{C}$ (resp. extension successive de $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients purs).
L'énoncé suivant est le résultat fondamental de la théorie des poids de Frobenius.

*Théorème 2.7.* — ( [D80b, (3.3.4), (3.3.5)], [Ked06, 6.6.2], [ACa13]) Si $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur de poids $w$ les groupes de cohomologie $H^i_c(X,\mathcal{C})$ sont de $\iota$-poids $\leq w+i$ (resp. $H^i(X,\mathcal{C})$ sont de $\iota$-poids $\geq w+i$).

On en déduit notamment

*Corollaire 2.8.* — ( [D80b, (3.4.1)], [ACa13, §4.3], [Ked18a, §9]) Soit $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$.

a) Si $\mathcal{C}$ est $\iota$-mixte, il admet une unique filtration —la filtration par le $\iota$-poids— $0 = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{C}_s = \mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1}$ est $\iota$-pur de poids $w_i$ avec $w_1 < \cdots < w_s$.

b) Si $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur, $\overline{\mathcal{C}}$ est semisimple ; en particulier, $G(\overline{\mathcal{C}})$ est semisimple.

**2.5.4.** *Conséquences pour les compagnons.* — Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple, $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ un isomorphisme et $\mathcal{C}'$ un $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-coefficient semisimple tel que $\mathcal{C} \sim_\sigma \mathcal{C}'$. Par définition, $\sigma L(\mathcal{C}, T) = L(\mathcal{C}', T)$ et $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur de poids $w$ si et seulement si $\mathcal{C}'$ est $\iota\sigma^{-1}$-pur de poids $w$. Les Théorèmes 2.6 et 2.7 impliquent immédiatement

*Corollaire 2.9.* — Supposons de plus que $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur.
— (2.5.4.1) $\det(1 - \varphi T | H^0(X, \mathcal{C})) = \det(1 - \varphi T | H^0(X, \mathcal{C}'))$,
$\det(1 - \varphi T | H_c^{2d}(X, \mathcal{C})) = \det(1 - \varphi T | H_c^{2d}(X, \mathcal{C}'))$.
Et si $X$ est une courbe,
$\det(1 - \varphi T | H_c^1(X, \mathcal{C})) = \det(1 - \varphi T | H_c^1(X, \mathcal{C}'))$,
$\det(1 - \varphi T | H^1(X, \mathcal{C})) = \det(1 - \varphi T | H^1(X, \mathcal{C}'))$.
— (2.5.4.2) Si $X$ est propre, $\det(1 - \varphi T | H^i(X, \mathcal{C})) = \det(1 - \varphi T | H^i(X, \mathcal{C}'))$, $i \geq 0$.

L'intérêt du Corollaire 2.9.a) vient de son interprétation tannakienne. En effet, le degré de $\det(1 - \varphi T | H^0(X, \mathcal{C}))$ est la dimension des $G(\overline{\mathcal{C}})$-invariants de $\mathcal{C}_x$ et la multiplicité de 1 comme racine de $\det(1 - \varphi T | H^0(X, \mathcal{C}))$ est la dimension des $G(\mathcal{C})$-invariants de $\mathcal{C}_x$.

— (2.5.4.3) Si $\sigma = Id$ et si $\mathcal{I}$ est un facteur irréductible de $\mathcal{C}$, $\check{\mathcal{I}} \otimes \mathcal{C}$, $\check{\mathcal{I}} \otimes \mathcal{C}'$ sont purs de poids 0 et on a encore $\check{\mathcal{I}} \otimes \mathcal{C} \sim_{Id} \check{\mathcal{I}} \otimes \mathcal{C}'$, donc la multiplicité de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ est égale à la multiplicité de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}'$. On en déduit que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$.
— (2.5.4.4) En observant que $\det(\mathcal{C}) \sim_\sigma \det(\mathcal{C}')$, $\mathcal{C}$ est de déterminant fini si et seulement si $\mathcal{C}'$ l'est, auquel cas $\det(\mathcal{C})$ et $\det(\mathcal{C}')$ ont même ordre.

En utilisant la filtration par le $\iota$-poids, on a l'amplification suivante de (2.5.4.1).

*Corollaire 2.10.* — (Cebotarev tannakien ; Tsuzuki — *e.g.* [Ked18b, Thm. 3.2.4]) Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients semisimples $\iota$-mixtes [(1)] $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, $\chi_x(\mathcal{C}, T) = \chi_x(\mathcal{D}, T)$, $x \in |X|$ si et seulement si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

En particulier, un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple admet au plus un $\sigma$-compagnon semisimple $\iota$-mixte (modulo isomorphisme).

Pour $* = p$, le Corollaire 2.10 sert de substitut au Théorème de densité de Cebotarev classique, qui affirme que l'union des classes de conjugaison des Frobenii géométriques est dense dans $\pi_1(X)$ - *e.g.* [S65, Thm. 7]. Il découle directement de ce dernier que, pour $*' \neq p$, le $\sigma$-compagnon d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient est unique modulo (isomorphisme et) semisimplification sans hypothèse de mixité.

On peut appliquer les observations ci-dessus non seulement à $\mathcal{C}$ mais aussi à tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient de la forme $T^{m,n}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\otimes m} \otimes \check{\mathcal{C}}^{\otimes n}$. En effet, $T^{m,n}(\mathcal{C})$ est encore pur et $\sigma T^{m,n}(\mathcal{C}) = T^{m,n}(\sigma\mathcal{C})$. Autrement dit, les fonctions

$$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (m,n) \to \dim(T^{m,n}(\mathcal{C}_x)^{G(\overline{\sigma\mathcal{C}})}),\ \dim(T^{m,n}(\sigma\mathcal{C}_x)^{G(\sigma\mathcal{C})})$$

1. *A posteriori*, l'énoncé de pureté 1.1 a) montre que cette hypothèse est superflue — *cf.* Remarque **??**.

ne dépendent que de $\mathcal{C}$ et pas de $\sigma$.

En particulier, en appliquant cela à $(m,n) = (1,1)$, il résulte immédiatement du Lemme de Schur que

— (2.5.4.5) $\mathcal{C}$ est irréductible (resp. $\overline{\mathcal{C}}$) si et seulement si $\sigma\mathcal{C}$ (resp. $\overline{\sigma\mathcal{C}}$) est irréductible.

— (2.5.4.6) Si $\mathcal{D}$ est un autre $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple $\iota$-pur, $\overline{\mathcal{C}} \simeq \overline{\mathcal{D}}$ si et seulement si $\overline{\sigma\mathcal{C}} \simeq \overline{\sigma\mathcal{D}}$.

Pour résumer, si la conjecture 1.1 vraie sur $X$, pour tout isomorphisme $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ le $\sigma$-compagnon d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ irréductible de déterminant fini est unique (modulo isomorphisme), irréductible et de déterminant fini. On le note $\sigma\mathcal{C}$. On a alors :

*Corollaire 2.11.* — a) Tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient est $\iota$-mixte ;

b) Soit $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ un isomorphisme. Tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ sur $X$ admet un $\sigma$-compagnon sur $X$, qui est unique modulo (isomorphisme et) semisimplification ; on le notera $\sigma\mathcal{C}$. De plus,

i) Si $*' \neq p$ et $\mathcal{C}$ est $\sigma$-unitaire, $\sigma\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-faisceau lisse.

ii) Les énoncés (2.5.4.1), 2), 5), 6) s'étendent sans hypothèse de pureté.

*Démonstration.* — Pour a), il suffit de considérer une filtration de Jordan-Hölder $0 = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{C}_s = \mathcal{C}$ et d'écrire $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1} = \mathcal{I}_i^{(\alpha_i)}$ avec $\mathcal{I}_i$ de déterminant fini (Théorème 2.1). D'après 1.1.a), $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1}$ est $\iota$-pur de poids $2\log_{|k|}(|\iota\alpha|)$. Pour b), on peut supposer $\mathcal{C}$ semisimple et écrire $\mathcal{C} = \oplus_{1\leq i\leq r}\mathcal{C}_i = \oplus_{1\leq i\leq r}(\mathcal{C}_i^{(\alpha_i)})^{(\alpha_i^{-1})}$ avec $\mathcal{C}_i$ irréductible, $\mathcal{C}_i^{(\alpha_i)}$ irréductible de déterminant fini et $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}_*^\times$. Par construction le $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-coefficient $\mathcal{C}' = \oplus_{1\leq i\leq r}\sigma(\mathcal{C}_i^{(\alpha_i)})^{(\sigma(\alpha)_i^{-1})}$ est un $\sigma$-compagnon semisimple de $\mathcal{C}$ ; par a) et le Théorème 2.10 il est unique. b).i) résulte du Corollaire 2.4 et b) ii) des énoncés correspondant dans le cas pur en raisonnant composante par composante. □

### 2.6. Ramification à l'infini

**2.6.1.** *Dimension* 1. — Soit $X$ une $k$-courbe lisse et $\overline{x}$ un point géométrique au-dessus de $x \in |X|$. Notons $U := X \setminus \{x\} \subset X$, $X_{(x)} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^h)$ le spectre de l'henselisé de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ en $x$, $X_{(\overline{x})} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}})$, le spectre de l'hensélisé strict défini par $\overline{x}$ (l'anneau local de $X$ en $x$ pour la topologie étale), $U_{(x)} := U \times_X X_{(x)}$, $U_{(\overline{x})} := U \times_X X_{(\overline{x})}$. Notons $I_x := \pi_1(U_{(\overline{x})}) \subset D_x := U_{(x)}$ les groupes de d'inertie et de décomposition de $X$ en $x$. On a une suite exacte courte scindée

$$1 \to I_x \to D_x \to \pi_1(x) \to 1$$

et, en notant $P_x \subset I_x$ l'unique $p$-Sylow de $I_x$ (le groupe d'inertie sauvage) et $I_x^t := I_x/P_x$ (le groupe d'inertie modéré), un isomorphisme $\pi_1(x)$-équivariant $I_x^t \tilde{\to} (\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p)(-1)$. Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$. À $\mathcal{C}|_{U_{(x)}}$ est attaché une représentation de $D_x$ sur un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-espace vectoriel $\mathcal{C}_x$ de dimension finie. Dans le cas $* \neq p$, c'est la représentation correspondant à $\mathcal{C}|_{U_{(x)}}$, dans le cas $* = p$ *cf.* [Ked18a, Rem. 4.12]. Cela permet de définir le conducteur de Swan local $Sw_x(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ en $x$. Le groupe $D_x$ est muni d'une filtration décroissante

$I_x^{(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ par des sous-groupes fermés normaux (sous-groupes de ramification en numérotation supérieure -*e.g.* [S68, Chap. IV]) tels que

— $\cap_{\lambda>\mu} I_x^{(\lambda)} = I_x^{(\mu)}$ , $\cap_{\lambda\geq 0} I_x^{(\lambda)} = \{1\}$ ;

— $I_x := I_x^{(0)} \subset D_x$ est le groupe d'inertie et $P_x := I_x^{(0+)} \subset I_X^{(0)}$ le groupe d'inertie sauvage,

où on a posé $I_x^{(\mu+)} := \cup_{\lambda<\mu} I_x^{(\lambda)} \subset I_x^{(\mu)}$.

Notons $\mathcal{C}_x^{ss}$ la $I_x$-semisimplification de $\mathcal{C}_x$. Si $W \subset \mathcal{C}_x^{ss}$ est un sous-$P_x$-module simple non trivial, il existe un unique $\lambda > 0$ tel que $W^{I_x^{(\lambda+)}} = 0$, $W^{I_x^{(\lambda)}} \neq 0$. On dit que $\lambda$ est la pente de $W$ ; $\mathcal{C}_x^{ss}(\lambda) := (\mathcal{C}_x^{ss})^{I_x^{(\lambda+)}}/(\mathcal{C}_x^{ss})^{I_x^{(\lambda)}}$ est donc la somme des sous $P_x$-modules simples de $\mathcal{C}_x^{ss}$ de pente $\lambda$. Avec ces notations, on pose

$$Sw_x(\mathcal{C}) = \sum_{\lambda>0} \lambda \dim(\mathcal{C}_x^{ss}(\lambda)).$$

Si $Sw_x(\mathcal{C}) = 0$ on dit que $\mathcal{C}$ est modérément ramifié en $x$. Dans le cas $* = p$, la condition $Sw_x(\mathcal{C}) = 0$ est aussi équivalente au fait que $\mathcal{C}$ admet un prolongement logarithmique en $x$.

Soit $X$ une courbe lisse sur $k$, $X \hookrightarrow \overline{X}$ sa compactification lisse et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$. Les conducteurs de Swan locaux sont liés à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_c(\mathcal{C}) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim H_c^i(X, \mathcal{C})(= -deg(L(\mathcal{C}, T)))$ par la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich.

*Théorème 2.12.* — ( [R65], [Ked06, Thm. 4.4.1])

$$\chi_c(\mathcal{C}) = rang(\mathcal{C})\chi_c(\overline{\mathbb{Q}}_*) - \sum_{x\in\overline{X}\setminus X} n(x) Sw_x(\mathcal{C}).$$

Il est parfois commode de globaliser la définition du conducteur de Swan en considérant le diviseur effectif $Sw(\mathcal{C}) = \sum_{x\in\overline{X}\setminus X} Sw_x(\mathcal{C})[x]$.

**2.6.2.** *Dimension* $\geq 2$. — En dimension supérieure, il y a plusieurs définitions possibles de la notion de modération à l'infini ; les relations entre celles-ci ont été clarifiées dans [KerS10]. Soit $X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification normale. Si $* \neq p$ (resp. $* = p$) on dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ sur $X$ est modérément ramifié en un point $x \in \overline{X} \setminus X$ de codimension 1 si la représentation de $\pi_1(X_{(\overline{x})})$ correspondant à $\mathcal{C}|_{X_{(\overline{x})}}$ l'est (resp. si $\mathcal{C}$ admet un prolongement logarithmique en $x$). On dit que $\mathcal{C}$ est modéré le long de $\overline{X} \setminus X$ s'il l'est en tout point $x \in \overline{X} \setminus X$ de codimension 1. Lorsque $X$ est lisse sur $k$ les conditions suivantes

— (C(courbe)-modération) Pour toute courbe $C$ lisse sur $k$ et tout morphisme $C \to X$, $\mathcal{C}|_C$ est modéré ;

— (D(iviseur)-modération) Pour toute compactification normale $X \hookrightarrow \overline{X}$, $\mathcal{C}$ est modérément ramifié le long de $\overline{X} \setminus X$

sont équivalentes et on dira simplement que $\mathcal{C}$ est modéré. Lorsque $X$ admet une compactification lisse $X \hookrightarrow \overline{X}$ telle que $\overline{X} \setminus X$ est un diviseur à croisements normaux, $\mathcal{C}$ est modéré si et seulement si il est modéré le long de $\overline{X} \setminus X$ ( [AE16, §1.2], [Ked18b, §1.4]).

On rappelle qu'une altération $f : Y \to X$ est un morphisme propre, surjectif et génériquement fini.

*Théorème 2.13.* — Si $* \neq p$ (resp. $* = p$) tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$ est modéré par un revêtement étale connexe (resp. une altération génériquement étale).

*Démonstration.* — Si $* = \ell$, c'est une conséquence élémentaire de la description galoisienne. En effet, on peut supposer $\mathcal{C}$ semisimple donc le dcomposer sous la forme $\mathcal{C} = \oplus_{i\in I} \mathcal{I}_i^{(\alpha_i)}$ avec les $\mathcal{I}_i$ irréductible de déterminant fini et les $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par $\oplus_{i\in I}\mathcal{I}_i$, ce qui n'affecte pas la ramification, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse donc provient par extension des scalaires d'un $Z_\lambda$-faisceau lisse $\mathcal{H}_\lambda$, où $Z_\lambda$ est l'anneau des entiers d'une extension finie $Q_\lambda$ de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En notant $\lambda$ l'uniformisante de $Z_\lambda$ on peut prendre le revêtement étale trivialisant $\mathcal{H}_\lambda/\lambda$. Dans le cas $* = p$ c'est un théorème difficile de Kedlaya [Ked11a, Thm. 2.4.4]. □

L'existence de compagnons $\ell$-adiques montre *a posteriori* que tout $\overline{\mathbb{Q}}_p$-F-isocristal surconvergent est aussi modéré par un revêtement étale connexe (*cf.* 7.1).

### 2.7. Notations

On notera $\mathcal{C}_{Q,r}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $Q$-coefficients *semisimples* de rang $r$ et $\mathcal{I}_{Q,r}(X) \subset \mathcal{C}_{Q,r}(X)$ le sous-ensemble de celles correspondant à des $Q$-coefficients irréductibles de déterminant fini. Si $* \neq p$, on notera aussi $\widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \subset \mathcal{C}_{Q,r}(X)$ le sous-ensemble de celles correspondant à des $Q$-faisceaux lisses. Tout morphisme de $k$-variétés $f : Y \to X$ induit par pull-back et semisimplification des applications $\mathcal{C}_{Q,r}(X) \to \mathcal{C}_{Q,r}(Y)$ et, si $* \neq p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \to \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(Y)$ que l'on notera $f^*(-)^{ss}$ ou $-|_Y^{ss}$.

On dira que $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$ sont équivalents modulo twists et on notera $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ s'il existe $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_r \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \overline{\mathbb{Q}}_*^\times$ tels que

$$\mathcal{C} = \oplus_{1\leq i\leq r}\mathcal{I}_i^{(\alpha_i)}, \quad \mathcal{D} = \oplus_{1\leq i\leq r}\mathcal{I}_i^{(\beta_i)}.$$

La relation $\approx$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$.

## 3. DIMENSION 1

Fixons un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \mathbb{C}$.

Soit $X$ une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur $k$. Notons $\eta$ son point générique et $K = k(\eta)$ son corps de fonctions. Pour $x \in |X|$, notons $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le complété de l'anneau local de $X$ en $x$, $K_x$ son corps des fractions et $t_x \in K_x$ une uniformisante. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $K$ et $\mathcal{O} := \prod_{x\in|X|} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \subset \mathbb{A}$. La théorie locale du corps de classes assure pour chaque $x \in |X|$ l'existence d'un morphisme continu injectif d'image dense —l'application de réciprocité locale— $rec_x : K_x^\times \hookrightarrow \pi_1(K_x)^{ab}$ qui s'insère dans le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x}^\times \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K_x^\times \arrow[r, "v_x"] \arrow[d, hook, "rec_x"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
1 \arrow[r] & I_x \arrow[r] & \pi_1(K_x)^{ab} \arrow[r] & \pi_1(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \simeq \pi_1(x) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où $v_x : K_x^\times \to \mathbb{Z}$ est la valuation attachée à $x$. Les applications de réciprocité locale se globalisent en un morphisme continu injectif d'image dense —l'application de réciprocité globale d'Artin $rec : K^\times \setminus \mathbb{A}^\times \hookrightarrow \pi_1(K)^{ab}$— qui induit un isomorphisme en passant à la completion profinie $\widehat{K^\times \setminus \mathbb{A}^\times} \tilde{\to} \pi_1(K)^{ab}$ et est compatible aux applications de réciprocité locale au sens que l'on imagine. La correspondance de Langlands pour les corps de fonctions [Lan67], [LanS70] est une généralisation non-abélienne et en rang supérieur de la théorie globale du corps de classes.

### 3.1. Représentations automorphes cuspidales

**3.1.1.** *Définition.* — Fixons un caractère fini $\pi_1(K)^{ab} \to \mathbb{C}^\times$ et notons $\delta : K^\times \setminus \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ sa composée avec l'application de réciprocité globale. Pour un entier $r \geq 1$, $GL_r(\mathbb{A})$ agit par translation à droite sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications localement constantes $GL_r(K) \setminus GL_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$. Cette action stabilise le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel $Cusp_{r,\delta}$ des formes automorphes cuspidales de caractère central $\delta$ *i.e.* des applications localement constantes $f : GL_r(K) \setminus GL_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes.
— $GL_r(\mathcal{O})$-finitude : la $GL_r(\mathcal{O})$-orbite de $f$ engendre un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ;
— Caractère central : Pour tout $z \in Z(GL_r(\mathbb{A})) = \mathbb{A}^\times$, $f \cdot z = \delta(z) f$ ;
— Cuspidalité : Pour toute partition $r = r_1 + \cdots + r_s$ en entiers $r_i > 0$ induisant un sous-groupe parabolique standard $P_{\underline{r}} \subset GL_r$ de radical unipotent $U_{\underline{r}}$,

$$\int_{U_{\underline{r}}(K)\setminus U_{\underline{r}}(\mathbb{A})} f(ug)du = 0, \quad g \in GL_r(\mathbb{A}).$$

Comme représentation de $GL_r(\mathbb{A})$, $Cusp_{r,\delta}$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles, chacune apparaissant avec multiplicité 1, appelées représentations automorphes cuspidales. Les représentations automorphes cuspidales sont celles qui ne proviennent pas (par induction parabolique) de groupes linéaires de rangs inférieurs.

**3.1.2.** *Invariants locaux.* — Fixons également un caractère additif non trivial $\Psi : k \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que les caractères additifs non triviaux $\psi : K \setminus \mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ sont paramétrés par $\Omega^1_{K|k} \setminus \{0\}$ (si $0 \neq \omega \in \Omega^1_{K|k}$, le caractère correspondant est donné par $\psi(a) = \sum_{x\in|X|} \Psi(tr_{k(x)|k}(Res_x(a_x \cdot \omega_x)))$, $a \in \mathbb{A}$ — la formule des résidus assure que $K \subset \ker(\psi)$). Fixons enfin un caractère additif non-trivial $\psi : K \setminus \mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$. A toute représentation automorphe cuspidale $\pi \subset Cusp_{r,\delta}$ sont attachés un ouvert dense $U_\pi \subset X$ et, pour chaque $x \in |X|$, une représentation irréductible $\pi_x$ de $GL_r(K_x)$, tels que

— La représentation $\pi_x$ est non ramifiée (*i.e.* le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel des vecteurs $GL_r(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$-invariants est de dimension 1) si et seulement si $x \in |U_\pi|$.
— $\pi$ est engendré par les vecteurs de la forme $\otimes_{x\in|X|} f_x$, où en dehors d'un nombre fini de $x \in |U_\pi|$, $f_x$ est un vecteur $GL_r(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$-invariant de $\pi_x$.

On note $\pi = \otimes'_{x\in|X|}\pi_x$. Cette décomposition permet de définir pour chaque $x \in |X|$ une fonction L locale $L(\pi_x, T) \in \mathbb{C}((T))$, qui ne dépend que de $\pi_x$ et vérifie une équation fonctionnelle [GJ72, (3.3)], où interviennent :

— un conducteur local $a(\pi_x, \psi_x) = a(\pi_x) + rc(\psi_x)$, où $a(\pi_x) \in \mathbb{N}$ et où $c(\psi_x)$ est le conducteur de $\psi_x$ *i.e.* le plus grand entier $c$ tel que $\psi_x(t_x^{-c}) = 1$ ;
— une constante locale $\epsilon(\pi_x, \psi_x) \in \mathbb{C}^\times$.

**3.1.2.1**. — Pour $r = 1$, $\pi_x$ coïncide avec son caractère central $\delta_x$ et on sait calculer explicitement $L(\pi_x, T)$, $a(\pi_x, \psi_x)$, $\epsilon(\pi_x, \psi_x)$ [Ta67], [Lau87, (3.1.3.2)].

**3.1.2.2**. — Chaque $r$-uplet $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^\times$ définit un caractère $\chi_{\underline{\lambda}} : B_r(K_x) \to \mathbb{C}^\times$ du Borel des matrices triangulaires supérieure de $GL_r(K_x)$ par $\chi_{\underline{\lambda}}(b) = \lambda_1^{v_x(b_{1,1})} \cdots \lambda_n^{v_x(b_{r,r})}$, $b = (b_{i,j}) \in B_r(K_x)$. La représentation induite à $GL_r(K_x)$ possède une unique sous-représentation irréductible non ramifiée $\pi_x(\underline{\lambda})$ et $\pi_x(\underline{\lambda}) \simeq \pi_x(\underline{\mu})$ si et seulement si $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ sont dans la même orbite sous le groupe symétrique $\mathcal{S}_r$. Pour $x \in |U_\pi|$, la représentation $\pi_x$ est isomorphe à une représentation de la forme $\pi_x(\underline{\lambda}_x(\pi))$ et on dit que le uplet non ordonné $\{\lambda_{1,x}(\pi), \ldots, \lambda_{r,x}(\pi)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke en $x$. Dans ce cas, on a

$$L(\pi_x, T) = \prod_{1\leq i\leq r} \frac{1}{1 - \lambda_{i,x}(\pi)T},\ a(\pi_x, \psi_x) = 0,\ \epsilon(\pi_x, \psi_x) = \prod_{1\leq i\leq r} (|k(x)|\lambda_{i,x}(\pi))^{c(\psi_x)}.$$

Le théorème de multiplicité 1 fort de Piatetski-Shapiro [P79] assure que la donnée des $\{\lambda_{1,x}(\pi), \ldots, \lambda_{r,x}(\pi)\}$, $x \in |U_\pi|$ détermine uniquement $\pi$.

**3.1.3.** *Fonction L globale.* — La fonction L globale de $\pi$ est le produit infini, convergeant dans $\mathbb{C}[[T]]$,

$$L(\pi, T) = \prod_{x\in|X|} L(\pi_x, T^{n(x)}).$$

C'est le développement d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(T)$ et il vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$\text{(3.1.3.1)}\quad L(\pi, T) = \epsilon(\pi)T^{a(\pi)}L(\check{\pi}, (|k|T)^{-1})$$

obtenue comme produit des 'équations fonctionnelles locales' [GJ72, (13.8)] avec

$$\text{(3.1.3.2)}\quad a(\pi) = \sum_{x\in|X|} n(x)a(\pi_x, \psi_x),\ \ \epsilon(\pi) = |k|^{r(1-g)} \prod_{x\in|X|} \epsilon(\pi_x, \psi_x).$$

*Remarque 3.1.* — La disparition de la dépendance en $\psi$ dans les termes globaux provient de Riemann-Roch. Par exemple pour $a(\pi)$, si $0 \neq \omega \in \Omega^1_{K|k}$ correspond à $\psi : K\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ on a $c(\psi_x) = v_x(\omega_x)$ et $\sum_{x\in|X|} n(x)c(\psi_x) = \sum_{x\in|X|} n(x)v_x(\omega_x) = 2(1-g)$.

On notera que (3.1.3.2) est bien défini puisque $a(\pi_x, \psi_x) = 0$, $x \in |U_\pi|$ et $c(\psi_x) = v_x(\omega_x) = 0$ en dehors d'un nombre fini de $x \in |X|$.

### 3.2. Enoncé

Pour tout $r \geq 1$ et tout premier $\ell \neq p$, notons :

— $\mathcal{A}_r$ : l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ de caractère central fini ;

— $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta) = \varinjlim_{\emptyset\neq U\subset X \text{ ouvert}} \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(U)$ : l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}_*$- coefficients irréductibles de déterminant fini définis sur un ouvert non vide de $X$.

Pour $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta)$, notons $U_\mathcal{C} \subset X$ le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{C}$ est défini.

On dit que $\pi \in \mathcal{A}_r$ et $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta)$ se correspondent au sens de Langlands, ce que l'on notera $\pi \sim \mathcal{C}$, si $L(\pi_x, T) = L(\mathcal{C}_x, T)$, $x \in U_\pi \cap U_\mathcal{C}$. Si $\pi \sim \mathcal{C}$, le caractère central de $\chi$ correspond à $det(\mathcal{C})$ *via* l'application de réciprocité globale.

*Théorème 3.2.* — (Correspondance de Langlands - Drinfeld, L. Lafforgue, T. Abe ; [Dr78], [Dr83], [L02], [A18a]) Il existe des applications inverses l'une de l'autre

$$\mathcal{A}_r \underset{\pi_{*,-}}{\overset{\mathcal{C}_{*,-}}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta)$$

telles que pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$, $U_\pi = U_{\mathcal{C}_{*,\pi}}$ et $\pi \sim \mathcal{C}_{*,\pi}$ et pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta)$ $U_\mathcal{C} = U_{\pi_{*,\mathcal{C}}}$ et $\pi_{*,\mathcal{C}} \sim \mathcal{C}$.

### 3.3. Résumé de la preuve

**3.3.1.** *Unicité.* — Les conditions de compatibilité pour les facteurs L locaux imposent que si les flèches existent, elles sont uniques et automatiquement inverses l'une de l'autre. Pour $\pi_{*,-} : \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(\eta) \to \mathcal{A}_r$ c'est le théorème de multiplicité 1 fort. Pour $\mathcal{C}_{\ell,-} : \mathcal{A}_r \to \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(\eta)$, c'est le théorème de densité de Cebotarev. En démontrant la correspondance de Langlands pour $* = \ell$, L. Lafforgue a montré simultanément :

*Théorème 3.3.* — (Conjecture de Ramanujan-Peterson ; L. Lafforgue [L02, VI.10 (i)]) Pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$, les facteurs locaux $\pi_x$, $x \in |X|$ sont tempérés (*e.g* [L02, p. 224]) ; en particulier, pour tout $x \in U_\pi$, les valeurs propres de Hecke sont de valeur absolue 1.

Donc si $\mathcal{C}_{p,-} : \mathcal{A}_r \to \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,r}(\eta)$ existe, le Théorème 3.3 assure que $\mathcal{C}_{p,\pi}$ est pur de poids 0 et l'unicité résulte donc de la version tannakienne 2.10 du théorème de Cebotarev.

**3.3.2.** *Rang* 1. — Pour $* = \ell$, l'existence de la correspondance $\mathcal{A}_1 \rightleftarrows \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,1}(\eta)$ résulte de la théorie du corps de classes. Pour $* = p$, puisque l'on dispose déjà de l'énoncé pour $* = \ell$, il suffit de construire $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,1}(U) \rightleftarrows \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_q,1}(U)$. D'après le Théorème 2.1, les éléments de $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,1}(\eta)$ sont finis donc $p$-unitaires. Fixons un ouvert non vide $U \subset X$. Le choix des isomorphismes $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\to} \mathbb{C} \tilde{\leftarrow} \overline{\mathbb{Q}}_p$ induit une bijection entre caractères finis de $\pi_1(U)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. Par ailleurs, Tsuzuki [Ts98, Thm. 4.2.6] a construit une équivalence de catégories entre $F$-isocristaux surconvergents $p$-unitaires de rang $r$ sur $U$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentations continues de rang $r$ potentiellement non ramifiées de $\pi_1(U)$. Le cas $r = 1$ de l'équivalence de Tsuzuki donne les bijections $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,1}(U) \rightleftarrows \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,1}(U)$ cherchées.

**3.3.3.** *Principe de récurence et formule du produit.* — La preuve se fait ensuite par récurrence sur $r$. Supposons d'abord $* = \ell$ et avoir construit les flèches $\mathcal{A}_{r'} \underset{\pi_{\ell,-}}{\overset{\mathcal{C}_{\ell,-}}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r'}(\eta)$ pour tout $r' < r$. Expliquons la construction de la flèche $\pi_{\ell,-} : \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(\eta) \to \mathcal{A}_r$. Fixons $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(\eta)$ et $j : U_\mathcal{C} \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. On définit $\pi = \otimes'_{x\in|X|}\pi_x$ en prenant pour $x \in |U_\mathcal{C}|$, $\pi_x = \pi_x(\underline{\lambda}_x)$ avec $\underline{\lambda}_x$ le $r$-uplet des valeurs propres de $\varphi_x$ sur $\mathcal{C}_x$ et pour $x \in X \setminus U_\mathcal{C}$, $\pi_x$ une induite de type Whittaker avec caractère central $\chi_{\pi_x} = \det((j_*\mathcal{C})_x) \circ rec_x$. Il faut montrer que, quitte à modifier $\pi_x$ aux $x \in X \setminus U_\mathcal{C}$, $\pi$ est automorphe cuspidale. Le point de départ est le théorème réciproque de Piatetski-Shapiro [L02, Thm. B.13], qui assure l'existence d'une représentation automorphe (*i.e.* sous-quotient de l'espace des applications localement constantes $f : GL_r(K) \setminus GL_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$) irréductible $\tilde{\pi}$ de $GL_r(\mathbb{A})$ telle que $\tilde{\pi}_x = \pi_x$, $x \in |U_\mathcal{C}|$ sous la condition suivante.

(3.3.3.1) Pour tout $r' < r$ et $\pi' \in \mathcal{A}_{r'}$ tel que $U_\pi \cup U_{\pi'} = X$, les séries formelles $L(\pi \times \pi', T)$, $L(\check{\pi} \times \check{\pi}', T)$ sont des polynômes et vérifient l'équation fonctionnelle (3.1.1) *i.e.* $L(\pi \times \pi', T) = \epsilon(\pi \times \pi')T^{a(\pi\times\pi')}L(\check{\pi} \times \check{\pi}', (|k|T)^{-1})$

Pour vérifier (3.3.3.1), il faut utiliser que si $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ la fonction L $L(j_*\mathcal{C}, T) := \prod_{x\in|X|} L_x(j_*\mathcal{C}, T)$ du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau constructible $j_*\mathcal{C}$ sur $X$ vérifie une équation fonctionnelle faisant intervenir des invariants locaux similaires à ceux de 3.1.2.

**3.3.3.1.** *Equation fonctionnelle.* — La formule des traces,

$$L(j_*\mathcal{C}, T) = \prod_{0\leq i\leq 2} \det(1 - \varphi T|H^i(X, j_*\mathcal{C}))^{(-1)^{i+1}}$$

combinée à la dualité de Poincaré donne [D73, §10] une équation fonctionnelle de la forme

$$L(j_*\mathcal{C}, T) = \epsilon(\mathcal{C})T^{-\chi(j_*\mathcal{C})}L(j_*\check{\mathcal{C}}, (|k|T)^{-1}), \tag{3.3.3.1.1}$$

faisant intervenir :

— la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(j_*\mathcal{C}) = \sum_{0\leq i\leq 2} (-1)^i \mathrm{dim} H^i(X, j_*\mathcal{C})$ ;

— la constante globale $\epsilon(j_*\mathcal{C}) = \prod_{0\leq i\leq 2} \det(-\varphi|H^i(X, j_*\mathcal{C}))^{(-1)^{i+1}}$.

**3.3.3.2.** *Invariants locaux.* — Par ailleurs, en chaque $x \in |X|$ on peut attacher à $\mathcal{C}$ :

— un conducteur local $a(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x) = a(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}) + rc(\psi_x)$, où

$$a(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}) = r - rang((j_*\mathcal{C})_{\bar{x}}) + Sw_x(\mathcal{C});$$

— une constante locale $\epsilon(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x) \in \mathbb{C}^\times$, qui ne dépend que de $j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}$ et $\psi_x$. La définition de $\epsilon(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x)$ est axiomatique. A tout triplet $(S, \mathcal{F}, \psi)$ formé d'un trait hensélien $S$ de point générique $\eta$, d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur $S$ et d'un caractère additif non trivial $\psi : \pi_1(\eta) \to \mathbb{C}^\times$ on peut associer de façon unique une constante $\epsilon(S, \mathcal{F}, \psi) \in \mathbb{C}^\times$ qui vérifie certains axiomes (multiplicativité en $\mathcal{F}$ *etc. - cf.* [D73, Thm. 4.1], [Lau87, Thm. (3.1.5.4)]) et qui, si $\mathcal{F}$ est de rang 1 *i.e.* correspond à un caractère $\chi : \pi_1(\eta) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, est définie par 3.1.2.1.

**3.3.3.3**. — (On suppose toujours fixé un caractère additif non trivial $\Psi : k \to \mathbb{C}^\times$). Contrairement à l'équation fonctionnelle (3.1.3.1), qui est obtenue par produit d'équations fonctionnelles locales, (3.3.3.1.1) est obtenue par voie globale et il n'est pas évident *a priori* que les analogues des relations (3.1.3.2) soient vérifiés par les invariants attachés à $j_*\mathcal{C}$. La relation

$$\chi(j_*\mathcal{C}) = \sum_{x\in|X|} n(x) a(\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x)$$

est la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich. La relation

$$\epsilon(j_*\mathcal{C}) = |k|^{r(1-g)} \prod_{x\in|X|} \epsilon(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x)$$

appelée 'formule du produit' est beaucoup plus difficile. Conjecturée par Deligne [D80a], elle a été démontrée par Laumon [Lau87, Thm. (3.2.1.1)] comme conséquence du 'principe de la phase stationnaire' pour la transformée de Fourier $\ell$-adique sur la droite affine. Nous renvoyons à l'exposé Bourbaki de Katz [K88] pour une introduction à la démonstration de Laumon.

**3.3.3.4**. — Revenons à (3.3.3.1). Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell, r'}(\eta)$ tel que $\pi' \sim \mathcal{C}'$. Des calculs locaux [DH81] montrent que quitte à tordre $\pi$ par un caractère $\xi : K^\times \setminus \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié aux places $x \in |X \setminus U_\mathcal{C}|$, les facteurs L locaux et les constantes locales de $\xi\pi \times \pi'$ et $\xi j_*\mathcal{C} \otimes j_*\mathcal{C}'$ d'une part et $\xi^{-1}\check{\pi} \times \check{\pi}'$ et $\xi^{-1} j_*\check{\mathcal{C}} \otimes j_*\check{\mathcal{C}}'$ d'autre part coïncident pour tout $x \in |X|$. Donc

$$L(\xi\pi \times \pi', T) = L(\xi j_*\mathcal{C} \otimes j_*\mathcal{C}', T), \quad L(\xi^{-1}\check{\pi} \times \check{\pi}', T) = L(\xi^{-1} j_*\check{\mathcal{C}} \otimes j_*\check{\mathcal{C}}', T)$$

sont des polynômes et vérifient (3.3.3.1.1) qui, d'après la formule du produit 3.3.3.3, coïncide avec (3.3.3.1). Cela montre donc que $\xi\pi$ donc $\pi$ est automorphe irréductible. Il reste à vérifier qu'elle est cuspidale. Sinon, il existerait une partition $r = r_1 + \cdots + r_s$ de $r$ et des représentations $\pi_i \in \mathcal{A}_{r_i}$ non ramifiées sur $U_{\mathcal{C}}$, $i = 1, \ldots, s$ telles que

$$L_x(\mathcal{C}, T) = L_x(\oplus_{1\leq i\leq s}\mathcal{C}_{\pi_i}, T),\ x \in |U_{\mathcal{C}}|$$

donc, par Cebotarev $\mathcal{C} \simeq \oplus_{1\leq i\leq s}\mathcal{C}_{\pi_i}$, ce qui contredit l'irréductibilité de $\mathcal{C}$.

*Remarque 3.4.* — L. Lafforgue montre en fait plus, à savoir que si on suppose en outre que les $\mathcal{C}_{\ell,\pi}$ sont purs de poids 0 alors la conjecture de Ramanujan-Peterson est vraie et pour tout couple $\pi \in \mathcal{A}_r$, $\pi' \in \mathcal{A}_{r'}$ correspondant au sens de Langlands à $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(\eta)$, $\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r'}(\eta)$, on a

$$\begin{aligned} L(\pi_x \times \pi'_x, T) &= L_x(j_*\mathcal{F} \otimes j_*\mathcal{F}', T), \qquad , \ x \in |X|. \\ a(\pi_x \times \pi'_x, \psi_x) &= a(j_*\mathcal{F} \otimes j_*\mathcal{F}'|_{X_{(x)}}, \psi_x), \\ \epsilon(\pi_x \times \pi'_x, \psi_x) &= \epsilon(j_*\mathcal{F} \otimes j_*\mathcal{F}'|_{X_{(x)}}, \psi_x). \end{aligned}$$

**3.3.3.5.** *Champs de Chtoucas.* — Pour conclure, il reste à construire la flèche $\mathcal{F}_{\ell,-} : \mathcal{A}_r \to \mathcal{G}_{r,\ell}$ de sorte que les $\mathcal{F}_{\ell,\pi}$ soient purs de poids 0. Cette construction est due à Drinfeld pour $r = 2$ [Dr78], [Dr83] et à L. Lafforgue pour $r$ arbitraire [L02]. Leur stratégie consiste à faire apparaitre $\mathcal{C}_{\ell,\pi} \boxtimes \check{\mathcal{C}}_{\ell,\pi}(1-r)$ dans la cohomologie essentielle de certains champs algébriques $Cht_r \to X \times X$ classifiants des Chtoucas de Drinfeld en rang $r$. Les calculs cohomologiques se font par comptage des points rationnels et utilisent la formule des traces d'Arthur-Selberg. Plus récemment V. Lafforgue a donné une autre démonstration, dans l'esprit de la correspondance de Langlands géométrique, et qui s'étend à tout groupe algébrique réductif [VL18]. V. Lafforgue ne calcule pas explicitement la cohomologie des champs de Chtoucas mais montre qu'il existe une décomposition canonique indexée par les paramètres de Langlands (*i.e.* $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(\eta)$ pour $GL_r$) de l'espace des formes automorphes cuspidales. Cette décomposition est obtenue comme décomposition spectrale d'une sous-algèbre commutative —l'algèbre des opérateurs d'excursion— de l'algèbre des endomorphismes de l'espace des formes automorphes cuspidales. Les ingrédients principaux de sa preuve de V. Lafforgue sont la généralisation des champs de Chtoucas de Drinfeld à tout groupe réductif et à un nombre arbitraires de pattes et l'équivalence de Satake géométrique ; elle n'utilise pas la formule des traces d'Arthur-Selberg. Nous renvoyons aux exposés Bourbaki de Laumon [Lau00] et Stroh [St16] pour une introduction aux démonstrations de L. Lafforgue et V. Lafforgue respectivement.

**3.3.3.6.** *Le cas* $* = p$. — La preuve de la correspondance de Langlands pour les F-isocristaux surconvergents suit de très près la stratégie esquissée ci-dessus. Il s'agit essentiellement de montrer que le formalisme de la cohomologie $\ell$-adique se transpose au cadre de la cohomologie rigide. Cette prouesse technique est menée à bien par Marmora [M08] (définition des facteurs $\epsilon$ locaux), Abe-Marmora [AM15] (formule du produit), Abe [A18a] (principe de réccurence), [A18b] (construction de la flèche $\mathcal{C}_{p,-} : \mathcal{A}_r \to \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,r}(\eta)$, formalisme des 6 opérations pour les D-modules arithmétiques sur les champs) et repose sur les contributions de nombreux auteurs, notamment Berthelot, Caro, Crew, Kedlaya *etc.* Nous renvoyons aux introductions de [AM15] et [A18b] pour une synthèse des développements de la théorie des F-isocristaux surconvergents et des D-modules arithmétiques.

### 3.4. Premières conséquences

Soit encore $X$ une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur $k$ et $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense.

**3.4.1.** *Finitude.* — Les relations de la Remarque 3.4 impliquent en particulier que si $\pi \sim \mathcal{C}$,

$$Sw(\mathcal{C}) = \sum_{x\in|X|}(r - rang(\mathcal{C}_{\bar{x}}))[x] + Ar(\pi) = \sum_{x\in|X|}(r - deg(L(\pi_x, T)^{-1})[x] + Ar(\pi) \geq Ar(\pi),$$

où l'on a noté $Ar(\pi) := \sum_{x\in|X|} a(\pi_x, \psi_x)[x]$ le conducteur d'Artin de $\pi$. Pour tout diviseur effectif $D \subset X$ à support dans $X \setminus U$, notons $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(U, \leq D) \subset \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(U)$ le sous-ensemble des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients $\mathcal{C}$ tels que $Sw(\mathcal{C}) \leq D$.

*Corollaire 3.5.* — L'ensemble $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(U, \leq D)/\approx$ est fini.

*Démonstration.* — Notons $\pi \in \mathcal{A}_r$ la représentation correspondant à $\mathcal{C}$. Puisque $Ar(\pi) \leq Sw(\mathcal{C}) \leq D$, $Ar(\pi)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Par ailleurs, il n'y a qu'un nombre fini de représentations automorphes cuspidales irréductibles de caractère central et de conducteur d'Artin fixés. Plus précisément, à $\pi$ est attachée une droite —la droite 'essentielle'— $\mathfrak{l}_\pi \subset \pi$, caractérisée par le fait que son fixateur sous $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ est un sous-groupe compact ouvert $K_\pi \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ [JP81]. Le sous-groupe $K_\pi$ ne dépend en fait de $\pi$ que *via* $Ar(\pi)$. Or d'après Harder, Gelfand, Piatetski-Shapiro [Lau87, Thm. 9.2.4], pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il n'y a qu'un nombre fini de représentations automorphes cuspidales irréductibles de caractère central fixé possédant un vecteur $K$-invariant. □

**3.4.2.** *Conjecture des compagnons en dimension* 1. — On déduit de la correspondance de Langlands 3.2 et de la conjecture de Ramanujan-Peterson 3.3 la Conjecture des compagnons 1.1 lorsque $X$ est une courbe. Dans 1.1 b), on peut prendre pour $Q_\mathcal{C}$ le compositum de $\mathbb{Q}(|k|^{1/2})$ et du corps de rationalité de $\pi_\mathcal{C}$ (qui est un corps de nombres).

*Corollaire 3.6.* — ( [L02, Thm. VII.7], [A18b, Thm. 4.4.1]) Si $X$ est une courbe, la conjecture 1.1 (donc le Corollaire 2.11) est vraie. De plus, pour tout $x \in |X|$, $L_x(j_*\sigma\mathcal{C}) = \sigma L_x(j_*\mathcal{C})$, $a(j_*\sigma\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x) = a(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x)$, $\epsilon(j_*\sigma\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x) = \epsilon(j_*\mathcal{C}|_{X_{(x)}}, \psi_x)$ (donc $Sw_x(\sigma\mathcal{C}) = Sw_x(\mathcal{C})$).

**3.4.3.** *Tests ponctuels.* — Soit P l'une des propriétés suivantes : algébrique, pur de poids 0, $p'$-unitaire.

*Corollaire 3.7.* — ( [D12, Prop. 1.9]) Soit $X$ une $k$-variété connexe. Un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ possède la propriété P si et seulement s'il existe $x \in |X|$ tel que $\mathcal{C}$ possède la propriété P en $x$.

*Démonstration.* — Supposons d'abord que $X$ est une courbe lisse connexe. On peut supposer $\mathcal{C}$ irréductible et écrire $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{(\alpha)})^{(\alpha^{-1})}$ avec $\mathcal{C}^{(\alpha)} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$. D'après le Corollaire 3.6, $\mathcal{C}^{(\alpha)}$ vérifie P. En testant en $x$, on voit que $\alpha$ vérifie P aussi et on a gagné. Dans le cas général, pour vérifier P, on peut remplacer $(X, \mathcal{C})$ par $(Y, \mathcal{C}|_Y^{ss})$ où $Y \to X$ est un morphisme surjectif quelconque de $k$-variétés. Il suffit donc d'observer que pour tout $x, x' \in |X|$, on peut construire une suite de morphismes de $k$-variétés $f_i : C_i \to X$, $i = 0, \ldots, n$ telle que $C_i$ soit une courbe lisse connexe, $f_i(C_i) \cap f_{i+1}(C_{i+1}) \neq \emptyset$, $x \in f_0(C_0)$, $x' \in f_n(C_n)$ (*e.g.* [KerS09, Prop. 2.3]). □

Cette observation permet d'établir l'énoncé de pureté 1.1 a) et la $p'$-unitarité en dimension supérieure. L'argument suivant est essentiellement dû à Kedlaya [Ked18b, §3.1] ; il s'applique uniformément aux cas $* \neq p$, $* = p$. Dans le cas $* = \ell$, on pourrait invoquer directement la variante quasi-modéré du Théorème de Bertini 6.1 que l'on verra un peu plus loin.

*Corollaire 3.8.* — Soit $X$ une $k$-variété normale. Tout $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$ est pur de poids 0 (donc algébrique) et $p'$-unitaire.

*Démonstration.* — D'après le Corollaire 3.7 on peut remplacer $X$ par un ouvert non vide et 2.3.2 appliqué à l'ouvert de lissité de $X$ (il est non vide puisque $k$ est parfait), on peut supposer que $X$ est lisse sur $k$. Par 2.3.1 , 2.3. a) et 2.5. b), on peut remlpacer $X$ par un revêtement étale donc (en raisonnant composante par composante), se ramener au cas où $\overline{\mathcal{C}}$ est irréductible et modérément ramifié (Théorème 2.13). Toujours d'après le Corollaire 3.7, il suffit de montrer que, quitte à remplacer $k$ par une extension finie, on sait construire une $k$-courbe lisse $C$ et un morphisme $C \to X$ tels que $\overline{\mathcal{C}|_C}$ est encore irréductible. On va en fait montrer qu'on peut assurer que l'immersion fermée $G(\overline{\mathcal{C}|_C}) \hookrightarrow G(\overline{\mathcal{C}})$ est un isomorphisme. L'idée est d'appliquer le Lemme 3.9 ci-dessous. Là encore, quitte à remplacer $X$ par un ouvert, on peut supposer que $X$ admet un morphisme étale fini $g : X \to \mathbb{A}_k^n$. Fixons $x \in |X|$. Soit $e : Y \to \mathbb{A}_k^n$ l'éclatement de $\mathbb{A}_k^n$ en $g(x)$ et $h : Y \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ la projection de centre $g(x)$. Le morphisme $f : X \times_{\mathbb{A}_k^n} Y \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ vérifie alors les hypothèses du Lemme 3.9. □

*Lemme 3.9.* — Soit $X$ une $k$-variété lisse, $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_*}(X)$ et $f : X \to S$ un morphisme lisse, de dimension relative 1, admettant une section $g : S \to X$ telle que $\mathcal{C}|_S$ soit trivial. Il existe alors un ouvert dense $U \subset S$ (dépendant de $\mathcal{C}$) tel que pour tout $s \in S$, le morphisme induit $H^0(X, \mathcal{C}) \to H^0(X_s, \mathcal{C})$ est un isomorphisme. Si de plus $\mathcal{C}$ est modérément ramifié sur $X$, il existe un ouvert dense $U \subset S$ (indépendant de $\mathcal{C}$) tel que pour tout $s \in S$, l'immersion fermée $G(\overline{\mathcal{C}|_{X_{\overline{s}}}}) \hookrightarrow G(\overline{\mathcal{C}})$ est un isomorphisme.

*Démonstration.* — On peut supposer $\mathcal{C}$ irréductible non constant donc, en particulier, $H^0(X,\mathcal{C})=0$ ($H^0(X,\mathcal{C})$ définit toujours un sous-objet constant de $\mathcal{C}$) et il faut montrer que $H^0(X_s,\mathcal{C})=0$. Quitte à remplacer $S$ par un ouvert dense et un revêtement purement inséparable, on peut supposer (*cf.* 2.3.2) que $X\to S$ se factorise *via*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

avec $\overline{X}\to S$ propre et lisse et $\overline{X}\setminus X\subset\overline{X}$ un diviseur, fini, étale sur $S$. On peut de plus assurer que le conducteur de Swan des $\mathcal{C}|_{X_{\overline{s}}}$, $s\in S$ est constant [Lau871, 2.1.1 (i)], [Laz00, 9.2. (1)] donc que $f_*\mathcal{C}$ existe dans la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients sur $S$ et commute à tout changement de base [Lau871, 2.1.2], [Laz00, 9.3 (2), 9.3 (2)]. Par adjonction, le morphisme $f^*f_*\mathcal{C}\hookrightarrow\mathcal{C}$ est injectif. Si c'était un isomorphisme, en appliquant $g^*$, on aurait $f_*\mathcal{C}\simeq g^*\mathcal{C}$ donc $0=H^0(X,\mathcal{C})=H^0(S,g^*\mathcal{C})\neq 0$ : contradiction. Si on suppose déjà que $\mathcal{C}$ est modérément ramifié sur $X$, le conducteur de Swan des $\mathcal{C}|_{X_s}$, $s\in S$ est trivial et cela reste vrai pour les $T^{m,n}(\mathcal{C})|_{X_s}$, $s\in S$. Autrement dit, pour tout $s\in S$ le sous-groupe $G(\overline{\mathcal{C}|_{X_{\overline{s}}}})\hookrightarrow G(\overline{\mathcal{C}})$ a les mêmes invariants tensoriels que $G(\overline{\mathcal{C}})$. Puisque $G(\overline{\mathcal{C}})$ est semisimple et que le groupe des caractères de $G(\overline{\mathcal{C}|_{X_{\overline{s}}}})$ est fini (Théorème 2.2), la conclusion résulte de [D82, 3.1. c)]. $\square$

## 4. SQUELETTES

Soit $Q$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}_*$. On peut formaliser l'idée consistant à associer à un $Q$-coefficient la famille de ses restrictions aux courbes sur $X$ en introduisant la notion de $Q$-squelette. Cette notion est utilisée par Drinfeld [Dr12] et en filigrane dans [D12] mais la terminologie est introduite dans [EKer12] et attribuée à Kindler.

### 4.1. Squelettes

Notons $Cu(X)$ l'ensemble des couples $(C,\phi)$, où $C$ est une courbe lisse sur $k$ et $\phi: C\to X$ un $k$-morphisme. On appelle $Q$-squelette de rang $r$ tout élément de l'égaliseur $\mathcal{S}_{Q,r}(X)$ défini par le diagramme ci-dessous, où les flèches sont les flèches évidentes - composées des flèches de restriction et semisimplification.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{Q,r}(X) \arrow[r] & \prod\limits_{C\in Cu(X)} \mathcal{C}_{Q,r}(C) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{C,C'\in Cu(X)} \mathcal{C}_{Q,r}((C\times_X C')_{red}) \\ & \mathcal{C}_{Q,r}(X,Q) \arrow[u] \arrow[ul, dotted, "Sq"] & \end{tikzcd}$$

Si $*\neq p$, on note $\widetilde{\mathcal{S}}_{Q,r}(X)\subset\mathcal{S}_{Q,r}(X)$ le sous-ensemble des $Q$-squelettes lisses, construits à partir des $Q$-coefficients lisses.

On prendra garde que si $X$ est de dimension $\geq 2$ il n'est pas du tout clair qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-squelette provienne par extension des scalaires d'un $Q$-squelette pour $Q$ une extension finie de $\mathbb{Q}_*$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_*$.

**4.1.1**. — Pour tout $x \in |X|$, l'application $\chi_x(-,T) : \mathcal{C}_{Q,r}(X) \to \mathbb{P}_r(Q)$ de 2.5.2 s'étend à $\mathcal{S}_{Q,r}(X)$ de la façon suivante. Pour chaque $x \in |X|$ on se fixe une courbe $C^x \in Cu(X)$ telle que $C^x \to X$ est une immersion fermée au voisinage de $x$ ; l'application $\chi_x : \mathcal{S}_{Q,r}(X) \to \mathbb{P}_r(Q)$ qui à $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_C)_{C\in Cu(X)} \in \mathcal{S}_{Q,r}(X)$ associe $\chi_x(\mathcal{C},T) := \chi_x(\mathcal{C}_{C^x},T)$ est alors bien définie, injective et vérifie $\chi_x(-,T) \circ Sq = \chi_x(-,T)$. En particulier, d'après la version tannakienne 2.10 du théorème de Cebotarev, l'application $Sq : \mathcal{C}_{Q,r}(X) \to \mathcal{S}_{Q,r}(X)$ est injective.

**4.1.2**. — On définit encore le corps des traces $Q_{\mathcal{C}}$ d'un $Q$-squelette $\mathcal{C}$ comme la sous-$\mathbb{Q}$-extension de $Q$ engendrée par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C},T)$, $x \in |X|$ (de façon équivalente, par les $Q_{\mathcal{C}_C}$, $C \in Cu(X)$). On dira qu'un $Q$-squelette $\mathcal{C}$ est $\iota$-pur de poids $w$, (resp. pur de poids $w$, resp. algébrique, resp. $\sigma$-unitaire, *etc.*) si les $\mathcal{C}_C$, $C \in Cu(X)$ le sont. On étend également de façon évidente aux $\overline{\mathbb{Q}}_*$-squelettes la notion de $\sigma$-compagnons. On définit enfin, toujours de façon évidente, la somme directe de deux squelettes et on dit qu'un squelette est irréductible s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux squelettes non nuls.

**4.1.3**. — On dira qu'un $Q$-squelette $\mathcal{C}$ est modéré si les $\mathcal{C}_C$, $C \in Cu(X)$ le sont. On définit l'image inverse $f^*\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{C}|_Y$) d'un $Q$-squelette $\mathcal{C}$ par un $k$-morphisme $f : Y \to X$ par

$$(f^*\mathcal{C})_{(C,\phi)} = \mathcal{C}_{(C,f\circ\phi)},\ (C,\phi \in Cu(Y))$$

et on dira que $f : Y \to X$ modère $\mathcal{C}$ si $f^*\mathcal{C}$ est modéré.

### 4.2. Squelettes géométriques

**4.2.1**. —Par définition, tout $Q$-coefficient provient par extension des scalaires d'une extension finie de $\mathbb{Q}_*$ dans $Q$. Dans le cas $* = \ell$, cette propriété est automatiquement vérifiée par les $Q$-squelettes dont le corps des traces est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. C'est un cas particulier du lemme galoisien suivant, pas tout à fait formel puisqu'il utilise la structure du groupe de Brauer d'un corps $\ell$-adique.

**Lemme.** ( [Dr12, Lem. 2.7]) *Soit $K$ un corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel quasi-fini et $K'$ une sous-$K$-extension finie d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$. Soit $\Gamma$ un groupe opérant de façon semisimple sur un $\overline{K}$-espace vectoriel de dimension $r$ et dont les traces sont contenues dans $K$. Si $r!|[K' : K]$ la $\Gamma$-représentation $V$ est définie sur $K'$.*

**4.2.2**. —On rappelle (Théorème 2.13) que si $* \neq p$ (resp. $* = p$) tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur $X$ est modéré par un revêtement étale connexe (resp. une altération génériquement étale). Dans le cas $* = \ell$, la description galoisienne nous dit même que si $Q_\lambda$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, pour tout $\mathcal{C} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{Q_\lambda}(X)$ il existe une famille de revêtements galoisiens

$X_n \to X$, $n \geq 1$ (les revêtements étale trivialisant $\mathcal{H}_\lambda/\lambda^n$ pour $\mathcal{H}_\lambda$ comme dans la preuve du Théorème 2.13) tels que

(4.2.2.1) Pour tout $x \in |X_n|$, $\chi_x(\mathcal{C}, T) \equiv (1-T)^r[\lambda^n]$, $n \geq 1$ ;
(4.2.2.2) $\pi_1(X)/\Pi$ est un groupe virtuellement pro-$\ell$, topologiquement de type fini, où $\Pi := \bigcap_{n\geq 1} \pi_1(X_n)$.

**4.2.3**. —On dira donc qu'un $Q$-squelette $\mathcal{C}$ est 1-géométrique si [(2)] il existe une altération génériquement étale $X' \to X$ qui modère $\mathcal{C}$ et on notera $\mathcal{S}^{1-geom}_{Q,r}(X) \subset \mathcal{S}_{Q,r}(X)$ le sous-ensemble correspondant. L'application de restriction canonique $Sq : \mathcal{C}_{Q,r}(X) \to \mathcal{S}_{Q,r}(X)$ se factorise donc *via* $Sq : \mathcal{C}_{Q,r}(X) \to \mathcal{S}^{1-geom}_{Q,r}(X)$.

Si $* = \ell$ on dira qu'un $Q$-squelette lisse est géométrique s'il vérifie (4.2.2.1), (4.2.2.2) pour une extension finie $Q_\lambda$ de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $Q$ et on notera $\widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(X) \subset \mathcal{S}^{1-geom}_{Q,r}(X)$ le sous-ensemble correspondant. L'application de restriction canonique $Sq : \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \to \widetilde{\mathcal{S}}_{Q,r}(X)$ se factorise donc *via* $Sq : \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \to \widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(X)$.

L'invariance du conducteur de Swan par passage au compagnon dans le Corollaire 3.6 montre que le $\sigma$-compagnon d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-squelette 1-géométrique est encore 1-géométrique.

## 5. FINITUDE DU CORPS DES TRACES

Soit $X$ une $k$-variété normale.

*Théorème 5.1.* — (Deligne ; [D12, Thm. 3.1]) Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{S}^{1-geom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X)$ algébrique, $Q_\mathcal{C}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Puisque d'après le Corollaire 3.8 tout $\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$ est automatiquement algébrique et $p'$-unitaire (donc, si $* = p$, admet des compagnons squelettiques $\ell$-adiques 1-géométriques), ceci établit l'énoncé de finitude 1.1 b).

Pour $N \geq 1$, notons $Q^{\leq N}_\mathcal{C} \subset Q_\mathcal{C}$ la sous-$\mathbb{Q}$-extension engendrée par les $tr_x(\mathcal{C}) := tr(\varphi_x|\mathcal{C}_x)$, $x \in X(k_n)$, $n \leq N$.

2. On notera que si l'image inverse d'un revêtement étale par une immersion fermée est encore un revêtement étale, ce n'est pas vraie pour une altŕation génériquement étale. Il serait donc plus naturel de demander que pour tout sous-schéma $Y \subset X$ il existe une altération génériquement étale $Y' \to Y$ qui modère $\mathcal{C}|_Y$ ; cependant la définition plus faible de $Q$-squelette 1-géométrique utilisée ici est suffisante pour montrer l'existence de compagnons $\ell$-adiques laquelle, comme on l'a déjà mentionné, implique *a posteriori* que tout $\overline{\mathbb{Q}}_p$-F-isocristal surconvergent est modéré par un revêtement étale.

### 5.1. Complexité

Si $X$ est une courbe lisse sur $k$ on note $b(X) := \dim H^1_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (la formule des traces assure que $b(X)$ ne dépend pas de $\ell(\neq p)$). Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$. D'après le Théorème 4.2.2, il existe un revêtement étale connexe $X' \to X$ qui modère $\mathcal{C}$. Notons

$$b(\mathcal{C}) := \min\{b(X') \mid X' \to X \text{ revêtement étale modérant } \mathcal{C}\},$$

auquel on pensera comme à une mesure de la 'complexité' de $\mathcal{C}$.

### 5.2. Version effective de l'énoncé de finitude 1.1 b)

On suppose ici que $X$ est une courbe *affine*, lisse, géométriquement connexe sur $k$. La première partie de la preuve consiste à rendre effectif 1.1 b) pour $X$.

*Théorème 5.2.* — Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X)$ algébrique $Q_{\mathcal{C}}^{\leq N(\mathcal{C})} = Q_{\mathcal{C}}$ avec

$$N(\mathcal{C}) = O \log^+_{|k|}(b(\mathcal{C})),$$

où $\log^+_{|k|}$ est la fonction $\sup\{0, \log_{|k|}\}$ et les constantes dans $O$ ne dépendent que de $r$.

**5.2.1.** — Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X)$ et $f : X' \to X$ un revêtement étale qui modère $\mathcal{C}$. La composée

$$H^1_c(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{f^*} H^1_c(X', \mathcal{C}) \xrightarrow{tr_f} H^1_c(X, \mathcal{C})$$

est la multiplication par le degré de $f : X' \to X$ donc $f^* : H^1_c(X, \mathcal{C}) \to H^1_c(X', \mathcal{C})$ est injective et d'après le Théorème 2.12 $\dim H^1_c(X, \mathcal{C}) \leq rb(X')$. D'où $\dim H^1_c(X, \mathcal{C}) \leq rb(\mathcal{C})$.

**5.2.2.** — Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_*,r}(X)$. Notons

$$N_0 := N_0(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := 2 \log^+_{|k|}(2r^2 b(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})), \quad N := N(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \lfloor N_0 \rfloor + 2r,$$

où $\lfloor - \rfloor$ est la fonction partie entière.

*Proposition 5.3.* — Si $tr_x(\mathcal{F}) = tr_x(\mathcal{G})$, $x \in X(k_n)$, $n \leq N$ alors $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$.

*Démonstration.* — Avec les notations du Lemme 2.5 on a

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{a \in A} p_{n(a)*}(\mathcal{S}_a \otimes pr^*_{n(a)} \mathcal{L}_a), \quad \mathcal{G} = \bigoplus_{a \in A} p_{n(a)*}(\mathcal{S}_a \otimes pr^*_{n(a)} \mathcal{L}'_a),$$

où, pour tout $a \in A$,
— $\mathcal{S}_a$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse, de rang $r_a$, irréductible et de déterminant fini sur $X_{n(a)}$ ;
— Si on note $\mathcal{S}_a^i$ le translaté de $\mathcal{S}_a$ par $\varphi^i$, les $\overline{\mathcal{S}_a^i}$, $i = 1, \ldots, n(a)$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses irréductibles sur $X_{\overline{k}}$ deux à deux non isomorphes ;
— $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}'_a$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses irréductibles sur $\mathrm{Spec}(k_{n(a)})$ et l'un au moins est non nul.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}_a = \mathcal{L}'_a$, $a \in A$.

Puisque $\overline{\mathcal{S}_a^i}$ est un facteur direct de $\overline{\mathcal{F}}$ ou de $\overline{\mathcal{G}}$, on a $b(\mathcal{S}_a^i \oplus \mathcal{S}_a^j) \leq b(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})$. On note $A(n)$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $n(a)|n$.

*Lemme 5.4.* — Si $n > N_0$, les fonctions

$$t_{(a,i)} : \begin{array}{ccc} X(k_n) & \to & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ x & \to & tr_x(\mathcal{S}_a^i) \end{array}, \ i = 1, \dots, n(a), \ a \in A(n)$$

sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

*Démonstration.* — D'après le Corollaire 3.6, les fonctions $t_{(a,i)}$ sont à valeurs dans un corps de nombres $Q \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Fixons un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\to} \mathbb{C}$ et montrons que les $t_{(a,i)} := \iota t_{(a,i)}$, $i = 1, \dots, n(a)$, $a \in A(n)$ sont 'presque orthogonales' dans $L^2(X(k_n), \mathbb{C})$. Toujours d'après le Corollaire 3.6, $\mathcal{S}_a^i$ est $\iota$-pure de poids 0 donc la conjuguée complexe de $t_{a,i}$ est la fonction associée au faisceau dual de $\mathcal{S}_a^i$ et

$$\langle t_{(a,i)}, t_{(b,j)} \rangle = \sum_{x \in X(k_n)} tr_x(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)) = \sum_{u \geq 0} (-1)^u tr(\varphi^n | H_c^u(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)),$$

où la seconde égalité est la formule des traces. On a

— $H_c^0(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)) = 0$ puisque $X$ est affine ;

— Les valeurs propres $\alpha$ de $\varphi^n$ sur $H_c^1(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i))$ vérifient $|\alpha| \leq |k|^{\frac{n}{2}}$ puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)$ est $\iota$-pur de poids 0 [D80b, Thm. (3.2.1)] ;

— Par dualité de Poincaré, $H_c^2(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_a^i|_{X_{\overline{k}}}, \mathcal{S}_b^j|_{X_{\overline{k}}})^\vee(-1)$.

D'où : $\langle t_{(a,i)}, t_{(b,j)} \rangle = \delta_{(a,i),(b,j)} |k|^n + C_{(a,i),(b,j)} |k|^{\frac{n}{2}}$ avec, en utilisant 5.2.1,

$$|C_{(a,i),(b,j)}| \leq \dim H_c^1(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_b^j, \mathcal{S}_a^i)) \leq r_a r_b b(\mathcal{S}_a^i \oplus \mathcal{S}_b^j).$$

Supposons maintenant qu'il existe une relation de dépendance linéaire $\sum_{(b,j)} \lambda_{(b,j)} t_{(b,j)} = 0$ et soit $a, i$ tels que $|\lambda_{(a,i)}|$ est maximal parmi les $|\lambda_{(b,j)}|$. Quitte à diviser par $\lambda_{(a,i)}$, on peut supposer que $\lambda_{(a,i)} = 1$ et $|\lambda_{(b,j)}| \leq 1$. On a alors

$$0 = \sum_{(b,j)} \lambda_{(b,j)} \langle t_{(a,i)}, t_{(b,j)} \rangle = |k|^n + R$$

avec

$$\begin{aligned} |R| \leq |k|^{\frac{n}{2}} \textstyle\sum_{(b,j)} |\lambda_{(b,j)}| |C_{(a,i),(b,j)}| & \leq |k|^{\frac{n}{2}} (\textstyle\sum_{(b,j)} |\lambda_{(b,j)}| r_a r_b b(\mathcal{S}_a^i \oplus \mathcal{S}_b^j)) \\ & \leq |k|^{\frac{n}{2}} 2r^2 b(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}). \end{aligned}$$

En particulier, $|R| < |k|^n$ dès que $n > N_0$. □

Donc, si pour $n > N_0$

$$\sum_{(a,i)} tr(\varphi^n | \mathcal{L}_a) t_{(a,i)}(x) = tr_x(\mathcal{F}) = tr_x(\mathcal{G}) = \sum_{(a,i)} tr(\varphi^n | \mathcal{L}'_a) t_{(a,i)}(x), \quad x \in X(k_n),$$

on a nécessairement $tr(\varphi^n | \mathcal{L}_a) = tr(\varphi^n | \mathcal{L}'_a)$, $a \in A(n)$. Fixons $a \in A$. Comme $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}'_a$ sont de rangs $\leq \lfloor r/n(a) \rfloor$, il y a au moins $\lfloor 2r/n(a) \rfloor$ entiers $n$ tels que $\lfloor N_0 \rfloor + 1 \leq n \leq N = \lfloor N_0 \rfloor + 2r$ et $n(a)|n$. Notons $\Lambda_a$ l'ensemble des valeurs propres de $\varphi^{n(a)}$ agissant sur $\mathcal{L}_a \oplus \mathcal{L}'_a$ et, pour $\lambda \in \Lambda_a$, notons $m_\lambda$, $m'_\lambda$ sa multiplicité dans $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}'_a$. On a donc, en posant $M := \lfloor N_0/n(a) \rfloor + 1$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_a} (m_\lambda - m'_\lambda) \lambda^M \lambda^{n-M} = \sum_{\lambda \in \Lambda_a} (m_\lambda - m'_\lambda) \lambda^n = 0, \ n = M, \dots, M + \lfloor 2r/n(a) \rfloor$$

alors que $|\Lambda_a| \leq \lfloor 2r/n(a) \rfloor$. Donc, par Vandermonde, $m_\lambda = m'_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_a$. $\square$

**5.2.3.** *Fin de la démonstration.* — Soit $E$ une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant $Q_{\mathcal{C}}$. Pour $\sigma \in Gal(E/Q_{\mathcal{C}}^{\leq N})$, notons encore $\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/Q_{\mathcal{C}}^{\leq N})$ un prolongement de $\sigma$. D'après le Corollaire 2.11 b) ii), $\det(1-\varphi T|H^1_c(X,\mathcal{C})) = \det(1-\varphi T|H^1_c(X,\sigma\mathcal{C}))$. Donc $N_0 := N_0(\mathcal{C}) := N_0(\mathcal{C},\sigma\mathcal{C})$, $N := N(\mathcal{C}) := N(\mathcal{C},\sigma\mathcal{C})$ ne dépendent que de $\mathcal{C}$ et pas de $\sigma$. Par définition, $\sigma tr_x(\mathcal{C}) = tr_x(\sigma\mathcal{C})$, $x \in |X|$ donc en particulier, $tr_x(\mathcal{C}) = \sigma tr_x(\mathcal{C}) = tr_x(\sigma\mathcal{C})$, $x \in X(k_n)$, $n \leq N$. D'après la Proposition 5.2.2 on en déduit $\mathcal{C} \simeq \sigma\mathcal{C}$ donc $\sigma tr_x(\mathcal{C}) = tr_x(\sigma\mathcal{C}) = tr_x(\mathcal{C})$, $\ x \in |X|$.

### 5.3. Preuve du Théorème 5.1

En raisonnant par induction sur la dimension de $X$, on se ramène à prouver le Théorème 5.1 pour un ouvert non vide $U \subset X$. On peut donc supposer que $X$ est irréductible, affine, lisse sur $k$ et munie d'un morphisme étale $p : X \to \mathbb{A}^d_k$ génériquement de degré $\delta$, et qu'il existe un revêtement étale connexe $f : X' \to X$ qui modère $\mathcal{C}$ ; en particulier, avec les notations de 5.2.2, $b(\mathcal{C}_{C'}) \leq rb(C')$, $C' \in Cu(X')$. On va montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ ne dépendant que de $r$, $p$ et $f$ tel que pour tout $n > N$ et $x \in X(k_n)$, $tr_x(\mathcal{C}) \in Q_{\mathcal{C}}^{\leq n-1}$. Pour ce faire, pour tout $x \in X(k_n)$ Deligne construit une courbe $C^x \to X \in Cu(X)$ et un point $c \in C^x(k_n)$ au dessus de $x$ tels que $b(\mathcal{C}_{C^x}) = O(n^D)$, où les constantes dans $O$ et l'entier $D$ ne dépendent que de $p$ et $f$. Il existe donc un $N$ explicite ne dépendant que de $r$, $p$ et $f$ tel que $n > N(\mathcal{C}_{C^x})$ si $n \geq N$, et ceci pour tout $x \in X(k_n)$. D'après le Théorème 5.2, $tr_x(\mathcal{C})$ est donc dans $Q_{\mathcal{C}|_{C^x}}^{\leq N(\mathcal{C}^x)} \subset Q_{\mathcal{C}}^{\leq n-1}$ et une récurrence immédiate donne $Q = Q_{\mathcal{C}}^{\leq N}$. Pour construire les courbes $C^x$ en controlant la complexité des $\mathcal{C}_{C^x}$, Deligne utilise un cas particulier d'un théorème de Bombieri-Katz qui donne une majoration effective de $b(C)$ lorsque $C$ est une courbe affine, lisse (mais non nécessairement connexe) sur $\overline{k}$ en fonction du degré et du nombre d'équations définissant un plongement affine $C \hookrightarrow \mathbb{A}^N_{\overline{k}}$. Le théorème de Bombieri-Katz repose entre autres sur des arguments $p$-adiques de Dwork (et [D80b]).

Fixons $x \in X(k_n)$.

**5.3.1.** *Construction.* —

*Lemme 5.5.* — Il existe un $k$-morphisme $\psi : \mathbb{A}^1_k \to A^d_k$ défini par des polynômes $\psi_1, \ldots, \psi_d$ de degré $\leq n-1$ et un point $y \in \mathbb{A}^1_k(k_n)$ tels que $\psi(y) = p(x)$.

*Démonstration.* Fixons un générateur de l'extension $k_n/k$, que l'on voit comme un $k_n$-point $y$ de $\mathbb{A}^1_k$. Notons $p(x)_1, \ldots, p(x)_d$ les coordonnées de $p(x)$. On peut prendre

$$\psi := \sum_{\sigma \in Gal(k_n/k)} \sigma(p(x)_i) \prod_{\tau \neq \sigma} \frac{(T-\tau(y))}{(\sigma(y)-\tau(y))},\ i = 1, \ldots, d.\ \square$$

Considérons le diagramme suivant, où ${}^c\square$ signifie que l'on choisit une composante connexe du produit cartésien

$$\begin{tikzcd} C^x \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "{}^c\square"] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "p"'] & \mathbb{A}^d_k, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} C^{x\circ} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "{}^c\square"] & \mathbb{A}^1_{k_{d_x}} \arrow[d, "\psi"] \\ X^\circ \arrow[r, "p"'] & \mathbb{A}^d_{k_{d_x}}, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} C^{x\prime}_{\bar{k}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "{}^c\square"] & C^{x\circ}_{\bar{k}} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "{}^c\square"] & \mathbb{A}^1_{\bar{k}} \arrow[d, "\psi"] \\ X'_{\bar{k}} \arrow[r, "f"'] & X_{\bar{k}} \arrow[r, "p"'] & \mathbb{A}^d_{\bar{k}} \end{tikzcd}$$

et

— $C^x$ est la composante connexe de $X \times_{\mathbb{A}^d_k} \mathbb{A}^1_k$ contenant $(x, y)$.

— $k_{d_x}$ est le corps des constantes de $C^x$. Comme $C^x$ possède un $k_n$-point et $\phi : C^x \to \mathbb{A}^1_k$ est étale génériquement de degré $\leq \delta$, $d_x$ est $\leq d$ et divise $n$.

— $C^{x\circ}$ (resp. $X^\circ$) est la composante connexe de $C^x_{k_{d_x}}$ (resp. $X_{k_{d_x}}$) contenant $(x, y)$ (resp. $x$).

La courbe $C^{x\circ}$ ainsi construite est lisse, géométriquement irréductible sur $k_{d_x}$ et on va pouvoir appliquer les résultats de 5.2.2 à $\mathcal{C}_{C^{x\circ}}$ en utilisant le revêtement $\psi : C^{x\prime}_{\bar{k}} \to C^{x\circ}_{\bar{k}}$ qui modère $\mathcal{C}_{C^{x\circ}}$.

**5.3.2.** *Estimation de $b(C^{x\prime}_{\bar{k}})$.* —

*Théorème 5.6.* — (Bombieri, Katz [Bo78], [K01, Cor. of Thm. 1]) Soit $K$ un corps algébriquement clos et $V \hookrightarrow \mathbb{A}^t_K$ un sous-schéma fermé défini par $A$ équations polynomiales $F_1, \ldots, F_A$ de degré $\leq D$. On a

$$\sigma_c(V) = \sum_{u \geq 0} \dim H^u_c(V, \mathbb{Q}_\ell) = O(2^A (AD)^{t+1}).$$

*Démonstration.* — *(Esquisse)* Bombieri, en utilisant des méthodes $p$-adiques de Dwork [Dw60] et la théorie des poids de Deligne *via* [D80b, (3.3.4)] montre que $|\chi_c(V)| = O((4D)^{t+A})$. Katz en déduit par dévissage l'estimation de l'énoncé. Plus précisement, notons $\sigma(V) := \sum_{u\geq 0} \dim H^u(V, \mathbb{Q}_\ell)$. En utilisant la suite exacte d'excision pour la cohomologie à support compact et $\sigma_c(\mathbb{A}^N_K) = 1$, on obtient

$$\sigma_c(V) \leq \sigma_c(A^t_K \setminus V) = \sigma(A^t_K \setminus V),$$

où l'égalité de droite résulte de la dualité de Poincaré puisque $A^t_K \setminus V$ est lisse. Puis par la suite spectrale de Mayer-Vietoris pour le recouvrement de $A^t_K \setminus V$ par les ouverts $U_i := \mathbb{A}^t_K[F_i^{-1}]$, $i = 1, \ldots, A$,

$$\sigma(A^t_K \setminus V) \leq \sum_{1 \leq j \leq A} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq A} \sigma(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_j})$$

avec

$$U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_j} = V(1 - ZF_{i_1} \cdots F_{i_j}) \subset A^{t+1}_K$$

une hypersurface lisse irréductible définie par une équation de degré $\leq 1 + Dj$. Par le théorème de Lefschetz affine faible de Katz [K93, 3.4], pour toute sous-variété $X \subset \mathbb{A}^t_K$

lisse, connexe de dimension $d$ il existe un hyperplan $H \subset \mathbb{A}_K^N$ tel que $V \cap H$ est encore lisse, connexe et de dimension $d-1$ et

$$H^i(V, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(V \cap H, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un isomorphisme pour $i \leq d-1$ et injective pour $i = d$ donc, en particulier $\sigma(V) \leq \sigma(V \cap H) + (-1)^d(\chi(V) - \chi(V \cap H))$. On conclut par induction en observant que si $V$ est définie par $A$ équations de degré $\leq D$ dans $\mathbb{A}_K^t$, $V \cap H$ est encore définie par $A$ équations de degré $\leq D$ dans $H \simeq \mathbb{A}_K^{t-1}$. □

*Remarque 5.7.* — Lorsque $V$ est lisse, $\sigma_c(V) = \sigma(V)$ donc le théorème de Bombieri-Katz donne en particulier une majoration du nombre de composantes connexes de $V$. Dans le cas où $V$ est une courbe lisse (qui est celui qui nous intéresse), on a $\chi_c(V) = |\pi_0(V)|(1 - b(V))$ mais même dans ce cas, il ne semble pas qu'on sache estimer $|\pi_0(V)|$ autrement que par le dévissage de Katz.

— Comme $X'_{\bar{k}} \xrightarrow{f} X_{\bar{k}} \xrightarrow{\phi} A^d_{\bar{k}}$ est affine, il se factorise *via* une immersion fermée

$$\begin{tikzcd} X'_{\bar{k}} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi\circ f"'] & A^{d+d'}_{\bar{k}} \arrow[d] \\ & A^d_{\bar{k}} \end{tikzcd}$$

définie par une famille de $A'$ equations de degré $\leq D'$ ;

— Le graphe $Graph(\psi) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\bar{k}}^{d+1}$ de $\psi$ est défini par $d$ équations de degré $\leq n-1$ ;

— Le produit fibré $X'_{\bar{k}} \times_{A^d_{\bar{k}}} \mathbb{A}^1_{\bar{k}}$, qui est aussi l'intersection des images inverses de $X'_{\bar{k}} \subset \mathbb{A}_{\bar{k}}^{d+d'}$ et $Graph(\psi) \subset \mathbb{A}_{\bar{k}}^{d+1}$ dans $\mathbb{A}_{\bar{k}}^{d+d'+1}$ est donc défini par $A = A' + d$ équations de degré $\leq \max\{D', n-1\}$.

Pour $n > D'$, on a donc

$$b(C^{x\prime}_{\bar{k}}) \leq b(X'_{\bar{k}} \times_{A^N_{\bar{k}}} \mathbb{A}^1_{\bar{k}}) \leq 2^A 6(3 + An)^{d+d'+2}.$$

On en déduit, avec les notations de 5.2.2,

$$N(\mathcal{C}_{C^{x\prime}_{\bar{k}}}) \leq \lfloor 2 \log^+_{|k_{d_x}|}(2r^2 b(C^{x\prime}_{\bar{k}})) \rfloor + 2r = O(\log(n)),$$

où les constantes dans $O$ ne dépendent que de $r$, $d$ et $p$. Il existe donc un entier $N$ ne dépendant que de $r$, $p$ et $f$ tel que, pour $n \geq N$ et pour tout $x \in X(k_n)$, $n/d_x > N(\mathcal{C}_{C^{x\prime}_{\bar{k}}})$. D'après 5.2.2, $tr_x(\mathcal{C}_{C^{x\circ}}) = tr_x(\mathcal{C})$ est dans l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $tr_y(\mathcal{C}_{C^{x\circ}})$, pour $y \in C^{x\circ}(k_{d_x m})$, $m \leq N(\mathcal{C}_{C^{x\prime}_{\bar{k}}}) < n/d_x$, laquelle est contenue dans celle engendrée par les $tr_y(\mathcal{C})$, $y \in X(k_m)$, $m \leq d_x N(\mathcal{C}_{C^{x\prime}_{\bar{k}}}) < n$.

### 5.4. Espaces de modules et finitude

L'argument ci-dessus est la preuve originale de [D12]. Dans [EKer11], Esnault-Kerz mesurent la complexité d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-coefficient $\mathcal{C}$ sur une courbe $X$ par l'invariant

$$b^+(\mathcal{C}) := 2(g + degSw(\mathcal{C})) + 1$$

et donnent une variante de l'argument de Deligne qui évite Bombieri-Katz. Ces observations ont conduit Deligne à introduire la notion de 'système exhaustif de courbes' dont la construction est élémentaire - [EKer12, Lem. 6.5] et à amplifier le Théorème 5.1 (pour $* \neq p$ ; le cas $* = p$ s'en déduisant par le Théorème 7.2 - *cf.* 7.1) comme suit. Soit $X$ une variété lisse, géométriquement connexe sur $k$, $X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification normale et $D \hookrightarrow \overline{X}$ un diviseur de Cartier effectif de support dans $\overline{X} \setminus X$. On note $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D) \subset \mathcal{S}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X)$ le sous-ensemble des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-squelettes $\mathcal{C}$ de rang $r$ à ramification bornée par $D$ *i.e.* tels que

$$Sw(\mathcal{C}_C) \leq \overline{\phi}^* D,\ (C, \phi) \in Cu(X).$$

Ici $\overline{\phi} : \overline{C} \to \overline{X}$ est l'extension de $\phi : C \to X$ à la compactification lisse $C \hookrightarrow \overline{C}$ de $C$.

*Théorème 5.8.* — (Deligne - [EKer12, Thm. §7]) Il existe une variété (donc de type fini) $S_{\mathbb{Q},r}(X, \leq D)$ affine sur $\mathbb{Q}$ telle que pour tout premier $\ell \neq p$, $S_{\mathbb{Q},r}(X, \leq D)(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathcal{S}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D)$ et l'ensemble des composantes irréductibles de $S_{\mathbb{Q},r}(X, \leq D)$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D)/_\approx$. En particulier, $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D)/_\approx$ est fini, indépendant de $\ell$.

Ce résultat est détaillé dans [EKer12]. Décrivons-en brièvement les idées.

Notons $\mathbb{P}_{r,X,\leq N} := \prod_{n \leq N} \prod_{x \in X(k_n)} \mathbb{P}_r$ et $\mathbb{P}_{r,X} = \prod_{n \geq 1} \prod_{x \in X(k_n)} \mathbb{P}_r$. Construisons d'abord $S_{\mathbb{Q},r}(X, \leq D)$ lorsque $X$ est une courbe lisse, géométriquement connexe sur $k$ et en prenant pour $X \hookrightarrow \overline{X}$ sa compactification lisse. En ajustant l'argument de 5.2.2, on obtient essentiellement le même énoncé en remplaçant $b(-)$ par $b^+(-)$. Notamment, en posant $N_D := \lceil 4r^2 \log^+_{|k|}(2r^2 b^+(D)) \rceil$ l'application produit des $\chi_x : \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X) \to \mathbb{P}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, $x \in X(k_n)$, $n \leq N_D$ induit une application injective

$$\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D) \hookrightarrow \mathbb{P}_{r,X,\leq N_D}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Par ailleurs, d'après le Corollaire 3.5, $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r}(X, \leq D)/\approx$ est fini. Fixons un système de représentants de la forme $\mathcal{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_s$ avec $\mathcal{C}_i \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,r_i}(X)$. Un tel représentant définit un morphisme fini $\mathbb{G}^s_{m,\overline{\mathbb{Q}}} \to \mathbb{P}_{r,\leq N_D,\overline{\mathbb{Q}}}$, qui envoie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ sur le uplet $\chi_x(\mathcal{C}_1^{(\alpha_1)}, T) \cdots \chi_x(\mathcal{C}_s^{(\alpha_s)}, T)$, $x \in X(k_n)$, $n \leq N_D$. Notons $S_{\overline{\mathbb{Q}},r}(X, \leq D) \subset \mathbb{P}_{r,\leq N_D,\overline{\mathbb{Q}}}$ la réunion des images de ces morphismes. D'après le Corollaire 3.6 et un petit argument de descente, $S_{\overline{\mathbb{Q}},r}(X, \leq D)$ est en fait défini sur $\mathbb{Q}$ et vérifie par construction les propriétés souhaitées. Pour $X$ de dimension supérieure, on définit $S_{\mathbb{Q},r}(X, \leq D)$ comme le produit cartésien

$$\begin{tikzcd} S_{\mathbb{Q},r}(X,\leq D) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\square"] & & \mathbb{P}_{r,X} \arrow[d] \\ \prod_{(C,\phi)\in Cu(X)} S_{\mathbb{Q},r}(C,\leq \phi^* D) \arrow[rr] & & \prod_{(C,\phi)\in Cu(X)} \mathbb{P}_{r,C} \end{tikzcd} ,$$

où les morphismes sont les morphismes naturels. Le point délicat est de montrer que $S_{\mathbb{Q},r}(X,\leq D)$ est de type fini. Pour cela, l'idée est de construire $(C,\phi)\in Cu(X)$ tel que le morphisme naturel $S_{\mathbb{Q},r}(X,\leq D)\to S_{\mathbb{Q},r}(C,\leq \phi^*D)$ soit une immersion fermée. En fait, Deligne construit un système projectif (le système exhaustif de courbes évoqué plus haut) $(C_{n+1},\phi_{n+1})\to(C_n,\phi_n)$ dans $Cu(X)$ tel que $C_n(k_n)\twoheadrightarrow X(k_n)$ et $b^+(\overline{\phi}_n^*D)=O(n)$, $n\geq 1$. Pour $n$ suffisamment grand, $(C_n,\phi_n)$ convient.

*Remarque 5.9.* — Esnault a étendu le Théorème 5.8 au cas où $X$ est normale [E17, Thm. 3.1].

## 6. UN THÉORÈME DE BERTINI (GALOISIEN)

Lorsque $X$ est lisse, pour réduire l'existence de compagnons $\ell$-adiques 1.1 c) au cas des courbes, Drinfeld utilise une variante 'quasi-pro-$\ell$' du théorème de Bertini [Dr12, Thm. 1.15, Prop. 1.17] qui, modulo l'astuce de Frattini, est une conséquence du théorème d'irréductibilité de Hilbert. Drinfeld démontre aussi une variante modérée [Dr12, App. C] en utilisant le théorème de Bertini-Poonen sur les corps finis mais celle-ci ne suffit pas à démontrer 1.1 c) car elle ne contrôle pas la 'petite' partie sauvage de l'inertie. Le Théorème 6.1 ci-dessous qui en est un raffinement 'quasi-modérée' due à Tamagawa, remédie à ce problème.

Soit $X$ une $k$-variété normale connexe et $X\hookrightarrow\overline{X}$ une compactification normale. On dit qu'un revêtement étale connexe $X'\to X$ est modérément ramifié le long de $\overline{X}\setminus X$ si chaque point $x\in\overline{X}\setminus X$ de codimension 1 est modérément ramifié dans l'extension correspondante de corps de fonctions $k(X')/k(X)$ et qu'un revêtement étale $X'\to X$ est modérément ramifié le long de $\overline{X}\setminus X$ si chacune de ses composantes connexes l'est. Les revêtements étales modérément ramifiés le long de $\overline{X}\setminus X$ sont classifiés par un quotient $\pi_1(X)\twoheadrightarrow\pi_1^t(X,\overline{X}\setminus X)$ ; notons $K(X,\overline{X}\setminus X):=\ker(\pi_1(X)\twoheadrightarrow\pi_1^t(X,\overline{X}\setminus X))$. Là encore, si $X$ est lisse sur $k$ et si $X'\to X$ est un revêtement étale, les conditions suivantes :

— (C(courbe)-modération) Pour toute courbe $C$ lisse sur $k$ et tout morphisme $C\to X$, le revêtement $X'\times_X C\to C$ est modéré ;
— (D(iviseur)-modération) Pour toute compactification normale $X\hookrightarrow\overline{X}$ le revêtement $X'\to X$ est modérément ramifié le long de $\overline{X}\setminus X$

sont équivalentes et on dira simplement que $X'\to X$ est modéré. Lorsque $X$ admet une compactification lisse $X\hookrightarrow\overline{X}$ telle que $\overline{X}\setminus X$ est un diviseur à croisements normaux, $X'\to X$ est modéré si et seulement si il est modéré le long de $\overline{X}\setminus X$ [KerS10, Thm. 1.1].

Les revêtements D-modérés sont classifiés par le quotient $\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X)$ de noyau $K(X) := \ker(\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X))$ le sous-groupe fermé (normal) de $\pi_1(X)$ engendré par les $K(X, \overline{X} \setminus X)$, $X \hookrightarrow \overline{X}$ décrivant l'ensemble des compactifications normales de $X$.

Soit $X' \to X$ un revêtement galoisien (donc étale connexe). Supposons que $X$ est géométriquement connexe. Fixons une compactification normale $X \hookrightarrow \overline{X}$. Soit $\overline{X}' \to \overline{X}$ la normalisation de $\overline{X}$ dans $k(X')/k(X)$. Par construction, le sous-groupe fermé normal $K(X', \overline{X}' \setminus X') \subset \pi_1(X')$ est encore normal dans $\pi_1(X)$.

*Théorème 6.1.* — (Bertini galoisien quasi-modéré - Drinfeld, Tamagawa ; [C18, App.]) Il existe une courbe $C$ lisse, géométriquement connexe sur $k$ et un morphisme $f : C \to X$ tel que le morphisme de groupes profinis induit $\pi_1(C) \to \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/K(X', \overline{X}' \setminus X')$ est surjectif et se factorise via $\pi_1(C) \twoheadrightarrow \pi_1^t(C)$. De plus, pour tout ouvert quasi-projectif $U$ contenu dans l'ouvert de lissité de $X$ et tout sous-schéma fini réduit $S \subset U$, on peut supposer que $C \to X$ est muni d'une section $S \to C$.

*Démonstration. — (Esquisse)* Supposons d'abord $X = X'$ ; soit $d$ la dimension de $X$. On se ramène facilement au cas où $X$ est lisse, quasi-projectif sur $k$. Ecrivons $\overline{D} := \overline{X} \setminus X$ comme réunion $\overline{D} = \overline{W} \cup \overline{D}_1 \cup \cdots \overline{D}_r$ avec $\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r \hookrightarrow \overline{X}$ des diviseurs irréductibles et $\overline{W} \hookrightarrow \overline{X}$ la réunion des composantes irréductibles de codimension $\geq 2$ et des lieux singuliers de $\overline{X}$ et $\overline{D}_1 \cup \cdots \overline{D}_r$. Plongeons $\overline{X}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. En utilisant le théorème de Bertini-Poonen sur les corps finis [Po04, Thm. 1.2] (*cf.* [Dr12, C.3]), on peut construire des polynômes homogènes $h_1, \ldots, h_{d-1} \in k[T_0, \ldots, T_n]$ de sorte que $\overline{C} := V(h_1) \cap \cdots \cap V(h_{d-1})$ soit une courbe projective lisse contenue dans $\overline{X} \setminus \overline{W}$, intersecte $\overline{D}$ transversalement et contienne $S$. Il reste à montrer que si $Y \to X$ est un revêtement étale connexe modérément ramifié le long de $\overline{X} \setminus X$, $Y \times_X C \to C$ est encore un revêtement étale connexe modérément ramifié le long de $\overline{C} \setminus C$, où $C := \overline{C} \cap X$. Notons $f : \overline{Y} \to \overline{X}$ la normalisation de $\overline{X}$ dans $k(Y)/k(X)$. Les hypothèses de transversalité et de modération assurent que $\overline{Y} \times_{\overline{X}} \overline{C}$ est lisse sur $k$ et que $Y \times_X C \to C$ est modérément ramifié le long de $\overline{C} \setminus C$. Il reste à montrer que $Y \times_X C$ est connexe. Pour cela, quitte à remplacer $k$ par sa clôture algébrique $k_Y$ dans $k(Y)$ (et regarder $Y$ comme un revêtement de $X_{k_Y}$, on peut supposer $Y$ géométriquement connexe sur $k$. Il suffit de montrer que $\overline{Y} \times_{\overline{X}} \overline{C}$ est géométriquement connexe sur $k$. Puisque $\overline{Y} \times_{\overline{X}} \overline{C}$ est lisse sur $k$, cela impliquera que $\overline{Y} \times_{\overline{X}} \overline{C}$ est géométriquement irréductible sur $k$ et donc que $Y \times_X C$ l'est aussi. Comme la connexité géométrique ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent, on peut remplacer les $h_1, \ldots, h_{d-1}$ par des puissances donc supposer qu'ils sont tous de même degré. En composant $\overline{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ avec un plongement de Veronese, on peut supposer que les $h_1, \ldots, h_{d-1}$ sont linéaires et se ramener ainsi au théorème de Bertini générique [Jou83, 6.10, 1), 2), 3)]. Notons $Gr_{d,k}$ la Grassmanienne des sous-espaces linéaires de codimension $d$ dans $\mathbb{P}^n_k$ et $Z_{\overline{Y}} := \{(y, L) \in \overline{Y} \times Gr_{d,k} \mid f(y) \in L\} \subset \overline{Y} \times Gr_{d,k}$ la variété d'incidence. Il suffit de montrer que la projection $p : Z_{\overline{Y}} \to Gr_{d,k}$ est géométriquement connexe. Le théorème de Bertini générique assure que $p : Z_{\overline{Y}} \to Gr_{d,k}$

est génériquement géométriquement intègre et dominant, ce qui implique que la partie finie de sa factorisation de Stein est triviale.
Pour le cas général, l'idée est d'utiliser $X' \to X$ pour construire une variété intègre $\widetilde{X}$ et un morphisme fini $\widetilde{X} \to X$ tels que $\pi_1(\widetilde{X}) \to \pi_1(X)$ est surjectif, se factorise *via* $\pi_1(\widetilde{X}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(\widetilde{X}, \overline{\overline{\widetilde{X}}} \setminus \widetilde{X})$ (où $\overline{\overline{\widetilde{X}}} \to \overline{X}$ est la normalisation de $\overline{X}$ dans $k(\widetilde{X})/k(X)$) et que Zariski-localement au voisinage de $S$, $\widetilde{X} \to X$ est étale avec une section. On conclut ensuite en appliquant le cas $X = X'$ à $\widetilde{X}$. La construction de $\widetilde{X} \to X$ utilise le lemme de Krasner et une variante du lemme d'approximation faible. Nous renvoyons à [C18, App] pour les détails. □

*Remarque 6.2.* — On ne peut espérer construire $C \to X$ de sorte que le morphisme $\pi_1(C) \to \pi_1(X)$ soit surjectif. Comme l'a observé Tamagawa [T02, 1.17 (ii)] (*cf.* aussi [C18, App., 1.5]), si $f : Y \to X$ est un morphisme de $k$-variétés normales connexes avec $X$ quasi-affine sur $k$, le morphisme induit $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est d'image ouverte si et seulement si $f : Y \to X$ est dominant.

## 7. THÉORÈME DE RECONSTRUCTION DE DRINFELD ET EXISTENCE DE COMPAGNONS $\ell$-ADIQUES

### 7.1. Énoncés

Soit $X$ une variété *lisse*, géométriquement connexe sur $k$.

*Théorème 7.1.* — (Drinfeld ; [Dr12, Thm. 2.5]) Soit $Q$ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. La flèche de restriction canonique $Sq : \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \to \widetilde{\mathcal{S}}_{Q,r}^{1-geom}(X)$ est bijective.

L'hypothèse de régularité sur $X$ est nécessaire. On renvoie à [Dr12, §6] pour des contre-exemples où $X$ est supposée normale, avec un unique point singulier.

*Corollaire 7.2.* — Soit $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un isomorphisme. Le $\sigma$-compagnon d'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-squelette 1-géométrique algébrique $\sigma$-unitaire est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse. En particulier, tout $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient admet un $\sigma$-compagnon, qui est encore un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-coefficient.

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-squelette 1-géométrique algébrique $\sigma$-unitaire. On sait déjà qu'il admet un $\sigma$-compagnon $\sigma\mathcal{C}$ 1-géométrique lisse. D'après le Théorème 5.1, $Q_{\sigma\mathcal{C}}(= \sigma Q_{\mathcal{C}})$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$. Soit $Q$ une extension de degré divisible par $r!$ de l'adhérence de $Q_{\sigma\mathcal{C}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'après le Lemme 4.2.1, $\sigma\mathcal{C}$ provient par extension des scalaires d'un $Q$-squelette. On peut donc appliquer le Théorème 7.1 à $\sigma\mathcal{C}$. □

Le Corollaire 7.2 implique en particulier l'existence de compagnons $\ell$-adiques *i.e.* les énoncés 1.1 c) et 2.11 b) pour $*' \neq p$. En effet, d'après le (la preuve du) Corollaire , il suffit de montrer 1.1 c) *i.e.* pour un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ irréductible de déterminant fini. D'après le Corollaire 3.8, $\mathcal{C}$ est alors automatiquement algébrique, $\sigma$-unitaire et, d'après le théorème 2.13 1-géométrique.

Pour $* = p$, il résulte alors immédiatement de 5.4 et de l'unicité des compagnons, que, sous les hypothèses de 5.4, $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,r}(X, \leq D)/\approx$ est fini. On peut également amplifier le théorème de réduction semistable de Kedlaya (Théorème 4.2.2) en remplaçant 'altération' par 'revêtement étale' *etc.*

### 7.2. Preuve du Théorème 7.1

On note $Z$ l'anneau des entiers de $Q$ et $\lambda$ une uniformisante. La preuve se fait en trois étapes. On démontre d'abord que tout $Q$-squelette géométrique provient d'un $Q$-coefficient (Lemme 7.3) puis que tout $Q$-squelette 1-géométrique est géométrique sur un ouvert dense $U \subset X$ (Lemme 7.4). Enfin, on démontre que si un $Q$-squelette 1-géométrique coïncide avec un $Q$-coefficient sur un ouvert dense alors c'est en fait un $Q$-coefficient (Lemme 7.5). Les preuves de ces lemmes reposent sur la description galoisienne de la catégorie des $Q$-coefficients.

*Lemme 7.3.* — (d'après Kerz) La flèche de restriction canonique $\widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \to \widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(X)$ est bijective.

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{C}$ un $Q$-squelette lisse géométrique de rang $r$ sur $X$ ; on reprend les notations de 4.2.2 pour les $X_n \to X$ et pour $\Pi$. Il faut construire un morphisme continu $\rho : \pi_1(X) \to GL_r(Q)$ tel que $det(1 - \rho(\varphi_x)T) = \chi_x(\mathcal{C}, T)$, $x \in |X|$. Comme $\pi_1(X)/\Pi$ est un groupe de Lie $\ell$-adique, il est topologiquement de type fini donc l'ensemble

$$H := \mathrm{Hom}(\pi_1(X)/\Pi, GL_r(Z)) = \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\pi_1(X)/\Pi, GL_r(Z/\lambda^n))$$

muni de la topologie induite par le produit des topologies discrètes est compact. Pour $x \in |X|$, notons $H_x \subset H$ le sous-ensemble fermé des représentations $\rho : \pi_1(X)/\Pi \to GL_r(Z)$ telles que $det(1-\rho(\varphi_x)T) = \chi_x(\mathcal{C}, T)$. On veut montrer que $\cap_{x\in|X|} H_x \neq \emptyset$. Par compacité, il suffit de montrer que pour tout sous-ensemble fini $S \subset |X|$, $\cap_{x\in S} H_x \neq \emptyset$. D'après le Théorème 6.1, il existe $\phi : C \to X \in Cu(X)$ et une section $S \to C$ tels que le morphisme induit $\pi_1(C) \to \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/\Pi$ est surjectif. Soit $c \in |C|$ et $\rho_C : \pi_1(C) \to GL(\mathcal{C}_{Cc})$ la représentation associée à $\mathcal{C}_C$ ; montrons que son noyau contient le noyau $K_\Pi$ de $\pi_1(C) \to \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/\Pi$ donc qu'elle se factorise *via* $\rho_X : \pi_1(X)/\Pi \to GL(\mathcal{C}_{Cc})$. On aura alors par construction $\rho_X \in \cap_{x\in S} H_x$. Comme $K_\Pi$ est normal dans $\pi_1(C)$ et que l'action de $\pi_1(C)$ sur $\mathcal{C}_{Cc}$ est semisimple, l'action de $K_\Pi$ sur $\mathcal{C}_{Cc}$ est également semisimple. Pour montrer qu'elle est triviale, il suffit de montrer qu'elle est unipotente ou, encore, que

$$det(1 - \rho_C(g)T|\mathcal{C}_{Cc}) = (1 - T)^r,\ g \in K_\Pi.$$

Si $C_n \to C$ est le revêtement galoisien correspondant à l'image inverse de $\pi_1(X_n)$ dans $\pi_1(C)$, on a par (4.2.2.1) $\chi_c(\mathcal{C}, T) \equiv (1 - T)^r[\lambda^n]$, $c \in |C_n|$ donc, par Cebotarev,

$$det(1 - \rho_C(g)T|\mathcal{C}_{Cc}) \equiv (1 - T)^r[\lambda^n],\ \ g \in \pi_1(C_n).$$

Or, d'après la définition de $\Pi$ dans (4.2.2.2), $K_\Pi = \cap_{n\geq 1}\pi_1(C_n)$. □

*Lemme 7.4.* — (d'après Wiesend, Kerz-Schmidt — *cf.* notamment [KerS09, §3, §4]) Pour tout $\mathcal{C} \in \widetilde{\mathcal{S}}^{1-geom}_{Q,r}(X)$ il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\mathcal{C}|_U \in \widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(U)$.

*Démonstration.* — Quitte à remplacer $X$ par un ouvert dense, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est modéré par un revêtement étale connexe. Si $X' \to X$ est un revêtement étale et $\mathcal{C}$ est un $Q$-squelette sur $X$, $\mathcal{C}$ est 1-géométrique (resp. géométrique) si et seulement si $\mathcal{C}|_{X'}$ l'est. On peut donc également supposer que $\mathcal{C}$ est modéré. Enfin, quitte à remplacer encore $X$ par un ouvert dense et $k$ par une extension finie, on peut supposer [SGA4, XI, Prop. 3.3] que $X$ est une fibration élémentaire *i.e.* se factorise comme suit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

avec $\overline{f} : \overline{X} \to S$ projectif, lisse, géométriquement irréductible de dimension relative 1, $X \hookrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte d'image dense dans chaque fibre, $\overline{X} \setminus X \to S$ fini, étale et $S$ lisse, géométriquement irréductible sur $k$. Notons $\eta$ le point générique de $S$. Quitte à faire une changement de base par un ouvert étale $S' \to S$, on peut de plus supposer que $f : X \to S$ admet une section $g : S \to X$. On veut construire une suite de revêtements étales $X_n \to X$, $n \geq 1$ vérifiant 4.2.2. On va procéder par induction sur la dimension de $X$. Le cas où $X$ est une courbe est tautologique. Supposons donc que $X$ est de dimension $d \geq 2$. Pour chaque $s \in S$, choisissons un point géométrique $\bar{s}$ au dessus de $g(s)$. Le groupe fondamental modéré $\pi_1^t(X_{\bar{s}})$ étant topologiquement de type fini, il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes (ouverts) d'indice borné. En particulier, l'intersection $N^t_{n,\bar{s}} \subset \pi_1^t(X_{\bar{s}})$ de tous les sous-groupes ouverts d'indice $\leq |\mathrm{GL}_r(Z/\lambda^n)|$ est encore un sous-groupe ouvert. Notons $N_{n,\bar{\eta}} \subset \pi_1(X_{\bar{\eta}})$ l'image inverse de $N^t_{n,\bar{\eta}} \subset \pi_1^t(X_{\bar{\eta}})$ par la projection canonique $\pi_1(X_{\bar{\eta}}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\bar{\eta}})$. Puisque $\ker(\pi_1(X_{\bar{\eta}}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\bar{\eta}}))$ est normalisé par l'action de $\pi_1(\eta)$ sur $\pi_1(X_\eta) \supset \pi_1(X_{\bar{\eta}})$ *via* la section $\pi_1(\eta) \to \pi_1(X_\eta)$ induite par $g : S \to X$ et que $N^t_{n,\bar{\eta}} \subset \pi_1^t(X_{\bar{\eta}})$ est caractéristique, $N_{n,\bar{\eta}} \subset \pi_1(X_\eta)$ est un sous-groupe normal. Notons $N_{n,\eta} := N_{n,\bar{\eta}} \rtimes_g \pi_1(\eta) \subset \pi_1(X_\eta) = \pi_1(X_{\bar{\eta}}) \rtimes_g \pi_1(\eta)$ ; c'est un sous-groupe ouvert, normal. Puisque $S$ est normal, $\pi_1(X_\eta) = \varprojlim_{V \subset S} \pi_1(X \times_S V)$, où la limite est sur tous les ouverts Zariski non vides $V \subset S$. Quitte à remplacer $S$ par un ouvert non vide, on peut donc supposer que $N_{n,\eta}$ contient le noyau de $p : \pi_1(X_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ donc, en posant $N_n := p(N_{n,\eta})$, que $N_{n,\eta} = p^{-1}(N_n)$. Notons $\widetilde{X}_n \to X$ le revêtement galoisien correspondant à $N_n \subset \pi_1(X)$. Pour un point fermé $s \in |S|$, notons $S_{(\bar{s})} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,\bar{s}})$ l'hensélisation stricte de $S$ en $\bar{s}$ et $X_{(\bar{s})} := X \times_S S_{(\bar{s})}$. La théorie de la spécialisation du groupe fondametal modéré [SGA1, XIII] fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1^t(X_{\bar\eta}) \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "sp_{\bar s}"] \arrow[dddl, "\phi_\eta"'] & \pi_1^t(X_{(\bar s)}) & \pi_1^t(X_{\bar s}) \arrow[l, "\simeq"] \arrow[ddd, bend left] \\
 & & \pi_1(X_{(\bar s)}) \arrow[u, two heads] \arrow[d] & \\
 & \pi_1(X_{\bar\eta}) \arrow[uu, two heads] \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X) \arrow[d] & \pi_1(X_{\bar s}) \arrow[uu, two heads] \arrow[l] \arrow[d, "\phi_s"'] \\
 \pi_1^t(X_{\bar\eta})/N^t_{n,\bar\eta} \arrow[r, equal] & \pi_1(X_{\bar\eta})/N_{n,\bar\eta} \arrow[r, equal] & \pi_1(X)/N_n & \pi_1^t(X_{\bar s})/N^t_{n,\bar s}
\end{tikzcd}$$

Par définition de $N^t_{n,\bar\eta}$, $N^t_{n,\bar s}$, $sp_{\bar s}(N^t_{n,\bar\eta}) \subset N^t_{n,\bar s}$. La commutativité du diagramme montre que $\pi_1(\widetilde{X}_{n,\bar s}) \subset \ker(\phi_s)$. En particulier, $\mathcal{C}_{X_s}|_{\widetilde{X}_{n,\bar s}}$ est trivial modulo $\lambda^n$ *i.e.* la representation de $\pi_1(\widetilde{X}_{n,s})$ sur $\mathcal{C}_{X_s,\bar s}\mathrm{mod}\lambda^n$ se factorise *via* $\pi_1(\widetilde{X}_{n,s}) \twoheadrightarrow \pi_1(s)$. Mais par hypothèse de récurrence, il existe un revêtement galoisien $S_n \to S$ pour $g^*\mathcal{C}$ comme en (4.2.2.1). Toute composante connexe $X_n$ de $\widetilde{X}_n \times_S S_n$ fournit alors un revêtement galoisien pour $\mathcal{C}$ comme en (4.2.2.1).

Tel quel, l'argument ne marche pas car l'ouvert par lequel on doit remplacer $S$ pour s'assurer que $N_{n,\eta}$ contient le noyau de $p : \pi_1(X_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ dépend de $n$. Il faut donc le modifier un peu :

— On l'applique tel que pour $n = 1$.

— Cela permet de se ramener au cas où les $\mathcal{C}_C\mathrm{mod}\lambda$, $C \in Cu(X)$ sont triviaux et donc, dans l'argument ci-dessus, le groupe fondamental modéré peut être partout remplacé par sa complétion pro-$\ell$ $\pi_1^t(X_{\bar s}) \to \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar s})$ pour laquelle les flèches de spécialisation $\pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta}) \to \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar s})$ sont des isomorphismes et on a [SGA1, XIII]

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1^{[\ell]}(X_\eta) \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \pi_1(\eta) \arrow[r] \arrow[d] & 1\ , \\
1 \arrow[r] & \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta}) \arrow[r] & \pi_1^{[\ell]}(X) \arrow[r] & \pi_1(S) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

(où $\pi_1^{[\ell]}(-)$ est la notation pour le quotient par le sous-groupe caractéristique $\ker(\pi_1(X_{\bar\eta}) \twoheadrightarrow \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta}))$).

— Dans cette configuration, le groupe $N^{(\ell)}_{n,\eta} = N^{(\ell)}_{n,\bar\eta} \rtimes \pi_1(\eta) \subset \pi_1^{[\ell]}(X_\eta) = \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta}) \rtimes \pi_1(\eta)$ contient le noyau de $p : \pi_1^{[\ell]}(X_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1^{[\ell]}(X)$ et donc on peut poser $N_n^{[\ell]} := p(N^{(\ell)}_{n,\eta}) \subset \pi_1^{[\ell]}(X)$ et prendre pour $N_n$ l'image inverse de $N_n^{[\ell]}$ *via* $\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1^{[\ell]}(X)$ *sans avoir à modifier* $S$. De plus, les sous-groupes ouverts $\pi_1(X_n) = \pi_1(\widetilde{X}_n) \cap p^{-1}(\pi_1(S_n))$ vérifient

$$\pi_1(X)/\pi_1(X_n) \hookrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(\widetilde{X}_n) \times \pi_1(S)/\pi_1(S_n) \simeq \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar\eta})/N^{(\ell)}_{n,\bar\eta} \times \pi_1(S)/\pi_1(S_n).$$

Donc les $X_n \to X$ vérifient également (4.2.2.2) puisque $\pi_1^{(\ell)}(X_{\bar{\eta}})$ —donc *a fortiori* $\pi_1^{(\ell)}(X_{\bar{\eta}})/\cap_{n\geq 1} N_{n,\bar{\eta}}^{(\ell)}$— est pro-$\ell$ topologiquement de type fini et $\pi_1(S)/\cap_{n\geq 1}\pi_1(S_n)$ est virtuellement pro-$\ell$ topologiquement de type fini par hypothèse de récurrence.

□

*Lemme 7.5.* — Pour tout ouvert non vide $U \subset X$, le diagramme suivant (où les flèches sont les flèches de restriction canoniques) est cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{S}}^{1-geom}_{Q,r}(X) \arrow[d] \\ \widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(U) \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{S}}^{1-geom}_{Q,r}(U) \end{tikzcd}$$

*Démonstration.* — Soit donc $\mathcal{C} \in \widetilde{\mathcal{S}}^{geom}_{Q,r}(U)$, $\mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}}^{1-geom}_{Q,r}(X)$ tels que $\mathcal{S}|_U \simeq \mathcal{C}$. D'après le Lemme 7.3, on sait que $\mathcal{C} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{Q,r}(U)$. Il faut donc montrer que $\mathcal{C}$ s'étend en un $Q$-faisceau lisse —que l'on notera encore $\mathcal{C}$— sur $X$ et que pour tout $x \in X \setminus U$, $\chi_x(\mathcal{C}, T) = \chi_x(\mathcal{S}, T)$. Cette dernière condition est automatique dès lors que $\mathcal{C}$ s'étend. En effet, fixons $x \in X \setminus U$. D'après le Théorème 6.1, il existe une courbe $C$ lisse, géométriquement connexe sur $k$ munie d'un morphisme $\phi : C \to X$ et d'un $k(x)$-point $c$ au-dessus de $x$, telle que $\phi^{-1}(U) \neq \emptyset$. En particulier, $\mathcal{C}|_C$ et $\mathcal{S}|_C$ sont deux $Q$-faisceaux lisses dont les semisimplifiés coïncident sur l'ouvert non vide $\phi^{-1}(U) \subset C$. Par Cebotarev, leurs semisimplifiés coïncident donc sur $C$ tout entière et, en particulier, en $c$. Il reste à voir que $\mathcal{C}$ s'étend en un $Q$-faisceau lisse sur $X$. Supposons le contraire. Puisque $X$ est lisse sur $k$, le théorème de pureté de Zariski-Nagata [SGA2, X, Thm. 3.4] implique que $\mathcal{C}$ est nécessairement ramifié le long d'un diviseur irréductible $D \subset X \setminus U$. Quitte à remplacer $X$ par un ouvert, on peut supposer que $D = X \setminus U$.

**Sous-lemme.** (d'après Wiesend, Kerz-Schmidt — *cf.* notamment [KerS10, Lem. 2.4], [KerS09, Prop. 2.3]) *Il existe $x \in D$ et une droite $\mathfrak{l}_x \subset T_xX$ (dépendant de $\mathcal{C}$) vérifiant la propriété suivante. Pour tout $(C, \phi) \in Cu(X)$ tel que $\phi^{-1}(U) \neq \emptyset$ et $C$ est munie d'un point $c$ au dessus de $x$ tel que $im(T_c\phi) = \mathfrak{l}_x$ le faisceau $\mathcal{C}|_{\phi^{-1}(U)}$ est ramifié en $c$.*

Le théorème de Bertini-Poonen [Po04] assure l'existence de $(C, \phi)$ avec cette propriété. Admettons le sous-lemme. Comme $\mathcal{C}$ est lisse, semisimple, il est somme directe de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux purs (C'est la combinaison du Théorème 2.1 et de l'énoncé de pureté 1.1.a) dans la conjecture des compagnons). C'est encore le cas pour $\mathcal{C}|_{\phi^{-1}(U)}$, ce qui assure que $\mathcal{C}|_{\phi^{-1}(U)_{\overline{k}}}$ est semisimple (Corollaire 2.8) et donc que $\mathcal{C}|_{\phi^{-1}(U)}$ et son semisimplifié $C_{\phi^{-1}(U)}$ ont même ramification. Cela contredit le fait que $\mathcal{C}_{\phi^{-1}(U)} = S_{\phi^{-1}(U)}(= S_{\mathcal{C}}|_{\phi^{-1}(U)})$ s'étend à $C$ tout entière.

Pour prouver le sous-lemme, fixons un $Z$-modèle $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ et $n \geq 1$ tel que $\mathcal{H}/\lambda^n$ est ramifié le long de $D$. Si $f : U' \to U$ est le revêtement étale trivialisant $\mathcal{H}/\lambda^n$ et

$f : X' \to X$ la normalisation de $X$ dans $f : U' \to U$, il suffit de construire $x \in D$ et $\mathfrak{l}_x \subset T_x X$ tels que pour toute $(C, \phi) \in Cu(X)$ comme dans le sous-lemme le revêtement $f : C' := X' \times_X C \to C$ est encore ramifié en $c$. Notons $G$ le groupe de Galois de $f : U' \to U$ et $I \subset G$ le groupe d'inertie le long de $D$. Quitte à remplacer $X$ par $X'/I$ on peut supposer que $G = I$. En particulier $G$ est résoluble donc quitte à remplacer $X' \to X$ par $X'/J \to X$ pour un sous-groupe $J \subset G$, on peut supposer $G$ d'ordre premier. Quitte à remplacer $X$ par un ouvert (dont le complémentaire est de codimension supérieure à 2), on peut supposer que $X'$ est lisse sur $k$. Notons $D'$ le support de l'image inverse de $D$ dans $X'$. L'hypothèse $G = I$ implique que le revêtement $f : D' \to D$ est purement inséparable de degré $\mathfrak{f} | |G| (= p)$ ; il suffit donc de construire $\phi : C \to X$ de sorte que $C'$ soit lisse en $f^{-1}(c)$ (le revêtement $C' \to C$ aura alors un seul point au-dessus de $c$ donc sera ramifié) et pour cela, il suffit que $\mathfrak{l}_x$ soit transverse à $H_x := im(T_{f^{-1}(x)} f)$. Si $\mathfrak{f} = 1$, $f : D' \to D$ est un isomorphisme. Il suffit alors de prendre $x \in D$ quelconque et $\mathfrak{l}_x \not\subset T_x D$. Si $\mathfrak{f} = p$, quitte à remplacer encore $X$ par un ouvert (dont le complémentaire est de codimension supérieure à 3), on peut supposer $D$, $D'$ lisses et $H_x \subset T_x D$ de codimension 1 pour tout $x \in D$. Il suffit alors de prendre $x \in D$ et $\mathfrak{l}_x \subset T_x D$, $\mathfrak{l}_x \not\subset H_x$. □

## 8. SEMI-ANNEAUX

Soit $E$ un corps de caractéristique 0 et $G$ un $E$-groupe algébrique. On note $E^+[G]$ le semi-anneau des $E$-représentations de $G$ *i.e.* l'ensemble des classes d'isomorphismes $[V]$ des $E$-représentations semisimples $V$ de $G$ muni des lois $[V_1] + [V_2] := [V_1 \oplus V_2]$, d'élément neutre $[0]$ et $[V_1] \cdot [V_2] := [V_1 \otimes V_2]$, d'élément neutre $[E]$. Un élément $[V] \in E^+[G]$ est dit irréductible si $V$ est une représentation irreductible.

*Corollaire 8.1.* — Soit $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un isomorphisme et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple $\sigma$-unitaire. Il existe un unique isomorphisme de semi-anneaux $\phi : \overline{\mathbb{Q}}_*^+[G(\mathcal{C})] \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^+[G(\sigma\mathcal{C})]$ compatible aux polynômes caractéristiques des Frobenii.

*Démonstration.* — Notons $\mathcal{C}_1 := \sigma\mathcal{C}$, $Q_1 := \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ , $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}$, $Q_2 := \overline{\mathbb{Q}}_*$ et , pour $i = 1, 2$,$V_i$ la $Q_i$-représentation de $G(\mathcal{C}_i)$ correspondant à $\mathcal{C}_i$. Par [D82, Prop. 3.1 (a)] toute représentation de $G(\mathcal{C}_i)$ est une sous-représentation d'une somme directe de représentations de la forme $T^{m,n}(V_i)$ donc correspond à un $Q_i$-coefficient pur de poids 0 et $\sigma$-unitaire si $i = 2$. L'unicité et l'injectivité de $\phi : Q_2^+[G(\mathcal{C}_2)] \to Q_1^+[G(\mathcal{C}_1)]$ résultent alors du Théorème 2.10. Comme toute représentation de $G(\mathcal{C}_2)$ correspond à un $Q_2$-coefficient $\sigma$-unitaire, le Corollaire 7.2 définit un morphisme de semi-anneaux $\phi : Q_2^+[G(\mathcal{C}_2)] \to Q_1^+[G(\mathcal{C}_1)]$, compatible aux polynômes caractéristiques des Frobenii et qui, de plus, préserve l'irréductibilité (2.5.4.3). Cela implique automatiquement la surjectivité. En effet, si $[V] = \sum_{1 \leq i \leq s} n_i [V_i]$ est la décomposition en composantes isotypiques de $[V]$, $\phi([V]) = \sum_{1 \leq i \leq s} n_i \phi([V_i])$ est la décomposition en composantes isotypiques de $\phi([V])$. En particulier, l'image de $\phi$ est stable par sous-objets. On conclut en observant que l'image de $\phi$ contient les $[T^{m,n}(V_1)]$, $m, n \geq 0$ et par le [D82, Prop. 3.1 (a)]. □

En particulier, $G(\mathcal{C})$ et $G(\sigma\mathcal{C})$ ont même groupes de caractère donc même rang et même groupe de composantes connexes. Quitte à remplacer $X$ par un revêtement étale connexe, on peut toujours supposer que $G(\sigma\mathcal{C})$ - donc $G(\mathcal{C})$ - est connexe. On déduit alors du théorème de reconstruction [KaLarV14, Thm. 1.2] :

*Corollaire 8.2.* — Soit $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un isomorphisme et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient semisimple $\sigma$-unitaire. Les groupes $G(\mathcal{C})$ et $G(\sigma\mathcal{C})$ ont mêmes données de racines.

### 8.1. Bertini Tannakien

*Corollaire 8.3.* — (Bertini tannakien — *cf.* aussi [AE16, Thm. 3.10]) Soit $X$ une variété lisse, géométriquement connexe sur $k$ et $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_p \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un isomorphisme. Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_p$-F-isocristal surconvergent semisimple $\sigma$-unitaire $\mathcal{C}$ sur $X$ et sous-schéma fermé fini réduit $S \subset X$ contenu dans un ouvert quasi-projectif, il existe une courbe $C$ lisse, géométriquement connexe sur $k$ et un morphisme $C \to X$ muni d'une section $S \to C$ tels que $G(\mathcal{C}|_C) \tilde{\to} G(\mathcal{C})$. En particulier, si $\mathcal{C}$ est irréductible, $\mathcal{C}|_C$ l'est aussi.

*Démonstration.* — Comme $G(\mathcal{C}|_C) \to G(\mathcal{C})$ est une immersion fermée et $G(\mathcal{C}|_C) \to G(\mathcal{C}|_C^{ss})$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que $G(\mathcal{C}|_C^{ss})$ et $G(\mathcal{C})$ ont même dimension, ce qui impliquera que $G(\mathcal{C}|_C^{ss})$, $G(\mathcal{C})$ et $G(\mathcal{C}|_C)$ ont même composante neutre donc, en particulier, que $\mathcal{C}|_C = \mathcal{C}|_C^{ss}$ est semisimple. La conclusion résultera alors du fait que $G(\mathcal{C}|_C^{ss})$ et $G((\sigma\mathcal{C})|_C)$ d'une part et $G(\mathcal{C}$ et $G(\sigma\mathcal{C})$ d'autre part ont même groupe de composantes connexes. D'après le Théorème de Bertini 6.1, on sait construire $C \to X$ comme dans l'énoncé pour $\sigma\mathcal{C}$. Puisque $\sigma(\mathcal{C}|_C^{ss}) = (\sigma\mathcal{C})|_C$, le Corollaire 8.2 montre que $G(\mathcal{C}|_C^{ss})$ et $G((\sigma\mathcal{C})|_C)$ d'une part et $G(\mathcal{C})$ et $G(\sigma\mathcal{C})$ d'autre part ont même dimension. L'assertion résulte donc du fait que $G((\sigma\mathcal{C})|_C) \simeq G(\sigma\mathcal{C})$ par construction de $C$. □

### 8.2. Descente du corps des coefficients, $*$-indépendance

Si $E$ est un corps de nombres et $\lambda$ une place de $E$, on note $E_\lambda$ le complété de $E$ en $\lambda$. Le résultat suivant est prédits par la philosophie motivique.

*Théorème 8.4.* — (Chin ; [Ch03, Main Thm., p.3], [Ch04, Thm. 1.4], [D'A18]) Soit $X$ une $k$-variété lisse, géométriquement connexe sur $k$ et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient irréductible de déterminant fini sur $X$. Il existe une extension galoisienne finie $E$ de $\mathbb{Q}$ contenant $Q_{\mathcal{C}}$, un $E$-groupe réductif connexe $G$ et une $E$-représentation fidèle $V$ de $G$ tels que pour toute place $\lambda$ de $E$ de caractéristique résiduelle $\mathfrak{l}$ définissant un plongement $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\mathfrak{l}$ et tout $E$-isomorphisme $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\mathfrak{l}$

a) $\sigma\mathcal{C}$ est défini sur $E_\lambda$ ;

b) La $E_\lambda$-représentation de $G(\sigma\mathcal{C})^\circ$ associée à $\sigma\mathcal{C}$ s'identifie à $(G \hookrightarrow GL(V)) \times_E E_\lambda$.

Rappelons que le groupe des composantes connexes $\pi_0(G(\sigma\mathcal{C}))$ est indépendant de $\sigma$.

L'énoncé 8.4.a) faisait en fait partie de la Conjecture des compagnons telle qu'énoncée par Deligne [D80b, (1.2.10) (v)]. L'énoncé 8.4.b), qui est une amplification 'arithmétique' du Corollaire 8.2, est à rapprocher des conjectures de type Mumford-Tate en caractéristique 0 ; le groupe $G$ et sa représentation $V$ étant les hypothétiques candidats pour le groupe de Galois motivique et le motif dont $\mathcal{C}$ serait l'incarnation. L'hypothèse que $\mathcal{C}$ soit irréductible de déterminant fini n'est pas nécessaire - semisimple suffit - mais les arguments tannakiens sont alors un peu plus techniques.

### 8.3. Preuve du Théorème 8.4.a)

Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par un compagnon $\ell$-adique, on peut supposer $* = \ell$.

*Lemme 8.5.* — Il existe $x \in |X|$ tel que $\chi_x(\mathcal{C}, T)$ possède une racine $\alpha$ de multiplicité 1.

*Démonstration.* — Puisque $\mathcal{C}$ est irréductible de déterminant fini, $G(\mathcal{C})$ est semisimple ; supposons pour simplifier qu'il est connexe. On sait que $\mathcal{C}$ est défini sur une extension finie $Q$ de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Notons $V$ la $Q$-représentation de $\pi_1(X)$ associée à $\mathcal{C}$ et $\Pi \subset GL(V)$ son image. Quitte à agrandir $Q$, on peut supposer $G$ scindé sur $Q$. Puisque $G$ est semisimple, $\Pi$ est ouvert dans $G(\mathcal{C})(Q)$. Notons $U \subset G(\mathcal{C})$ le sous-schéma des $g \in G(\mathcal{C})$ tels que $\chi(g, T) := \det(1 - gT|V)$ possède une racine de multiplicité 1. En observant que $G(\mathcal{C}) \setminus U$ est l'ensemble des $g \in G(\mathcal{C})$ tels que $\chi(g, T)$ divise $\chi(g, T)'^2$, on vérifie facilement que $U$ est ouvert dans $G(\mathcal{C})$. Par ailleurs, on sait que les représentations irréductibles d'un groupe semisimple connexe scindé sont classifiées par leur plus haut poids, qui apparait avec multiplicité 1. Le sous-schéma $U$ est donc un sous-schéma ouvert non vide de $G(\mathcal{C})$. Par conséquent, $U(Q) \subset G(Q)$ est un ouvert non vide. On conclut par le théorème de densité de Cebotarev. □

Soit $E$ une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant $Q_\mathcal{C}(\alpha)$ et $\lambda$ une place de $E$ au-dessus de $\ell$ définissant un plongement $E_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On veut montrer que $\mathcal{C}$ est défini sur $E_\lambda$. Notons $V$ la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de $\pi_1(X)$ associée à $\mathcal{C}$ et $\Pi \subset GL(V)$ son image. On sait qu'il existe une extension galoisienne $\hat{E}_\lambda$ de $E_\lambda$ telle que $V$ est définie sur $\hat{E}_\lambda$. Soit $0 \neq e \in V$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha$ de $\varphi_x$. Complétons $e$ en une $\hat{E}_\lambda$-base de $V$ définissant un isomorphisme $GL(V) \simeq GL_r(\hat{E}_\lambda)$ et notons $\rho : \pi_1(X) \to GL_r(\hat{E}_\lambda)$ la représentation correspondante. Notons également $\Gamma := Gal(\hat{E}_\lambda/E_\lambda)$. Comme $Q_\mathcal{C} \subset E$ et que $\rho$ est semisimple, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $c : \Gamma \to GL_r(\hat{E}_\lambda)$ tel que $c(\gamma)\gamma\rho = \rho(-)c(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Comme $\rho$ est géométriquement irréductible, il existe $\mu : \Gamma \times \Gamma \to \hat{E}_\lambda^\times$ tel que $c(\gamma\gamma') = \mu(\gamma, \gamma')c(\gamma)\gamma c(\gamma')$. Enfin, comme $\alpha \in \hat{E}_\lambda$ et $\alpha$ est de multiplicité 1, il existe $\nu : \Gamma \to \hat{E}_\lambda^\times$ tel que $c(\gamma)\gamma e_1 = \nu(\gamma)e_1$, $\gamma \in \Gamma$. Quitte à remplacer $c(-)$ par $\nu(-)^{-1}c(-)$, on peut donc supposer que $c : \Gamma \to GL_r(\hat{E}_\lambda)$ est un 1-cocycle. Par Hilbert 90, il existe $b \in GL(V)$ tel que $c(\gamma) = b\gamma b^{-1}$. Par construction, $b^{-1}\rho(-)b \subset \mathrm{GL}_r(\hat{E}_\lambda)$ se factorise *via* $GL_r(E_\lambda) \subset GL_r(\hat{E}_\lambda)$. L'argument qui précède demeure inchangé si on remplace $E$ par une extension finie ; par le lemme de Krasner cette observation permet de traiter formellement la descente du corps des coefficients pour le nombre *fini* de places de $E$ divisant $p$.

### 8.4. Esquisse de la preuve du Théorème 8.4. b)

L'argument repose sur le Théorème de reconstruction 8.7, que l'on va pouvoir appliquer grâce à la conjecture des compagnons et l'existence de tores de Frobenii maximaux - un résultat du à Serre. Après avoir remplacé $X$ par un revêtement étale, on peut supposer que les $G(\sigma\mathcal{C})$ sont tous connexes.

**8.4.1.** —Le Corollaire 8.1 admet la variant suivante, qui se démontre exactement de la même façon (en observant qu'on peut toujours supposer que la caractéristique résiduelle de $\lambda_1$ est $\neq p$ et en utilisant qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient irréductible de déterminant fini est automatiquement $p'$-unitaire).

*Variante 8.6.* — Avec les notations du Théorème 8.4, Pour , $i = 1, 2$, fixons une place $\lambda_i$ de $E$ de caractéristique résiduelle $\mathfrak{l}_i$ définissant un plongement $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{l}_i}$ et un $E$-isomorphisme $\sigma_i : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{l}_i}$ ; notons $\mathcal{C}_i := \sigma_i\mathcal{C}$ et supposons que tout objet irréductible de $\langle\mathcal{C}_i\rangle^{\otimes}$ est absolument irréductible [(3)], $i = 1, 2$. Il existe alors un unique isomorphisme de semi-anneaux $\phi : E^+_{\lambda_2}[G(\mathcal{C}_2)] \tilde{\to} E^+_{\lambda_1}[G(\mathcal{C}_1)]$ compatible aux polynômes caractéristiques des Frobenii *i.e.* tel que

$$\det(1 - \varphi_x T|V) = \det(1 - \varphi_x T|\phi V),\ x \in |X|,\ [V] \in E^+_{\lambda_2}[G(\mathcal{C}_2)].$$

*Théorème 8.7.* — ( [Ch08, Thm. 1.4]) Pour $i = 1, 2$ fixons un $E$-groupe réductif connexe scindé $G_i$ et un tore maximal $\iota_i : T_i \hookrightarrow G_i$. Tout couple $(f, \phi)$ formé d'un isomorphisme de $E$-groupes $f : T_1 \tilde{\to} T_2$ et d'un isomorphisme de semi-anneaux $\phi : E^+[G_2] \tilde{\to} E^+[G_1]$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} E^+[T_2] \arrow[r, "f^*"] & E^+[T_1] \\ E^+[G_2] \arrow[u, "\iota_2^*"] \arrow[r, "\phi"'] & E^+[G_1] \arrow[u, "\iota_1^*"'] \end{tikzcd}$$

est induit par un isomorphisme de $E$-groupes algébriques $f : G_1 \to G_2$, unique à conjugaison près par un $E$-point de $T_1$.

**8.4.2.** *Fin de la preuve.* — Pour tout $x \in |X|$, le tore de Frobenius $T_x(\mathcal{C}) \subset G(\mathcal{C})$ attaché à $x$ est la composante connexe du sous-groupe multiplicatif maximal de $G(\mathcal{C}_x) \subset G(\mathcal{C})$ ; il ne dépend que de $\chi_x(\mathcal{C}, T)$. Puisque par (2.5.4.6) $G(\mathcal{C})$ et $G(\sigma\mathcal{C})$ ont même rang, $T_x(\mathcal{C}) \subset G(\mathcal{C})$ est un tore maximal si et seulement si $T_x(\sigma\mathcal{C}) \subset G(\sigma\mathcal{C})$ est un tore maximal. Or, pour les places $\lambda$ de caractéristique résiduelle $\neq p$, il résulte de [S81] ou [LarP92, Prop. 7.2] que $T_x(\sigma\mathcal{C}) \subset G(\sigma\mathcal{C})$ est un tore maximal pour une infinité de $x \in |X|$. Fixons un tel $x$. Quitte à remplacer le corps $E$ du Théorème 8.4.a) par un corps de décomposition de $\chi_x(\mathcal{C}, T)$, on peut de plus supposer que $T_x(\sigma\mathcal{C}) \subset G(\sigma\mathcal{C})$ est scindé sur $E_\lambda$ pour tout $\sigma$. Reprenons les notations de 8.4.1. Il existe un $E$-groupe réductif $G$ muni d'un tore maximal scindé $T \subset G$ et une $E$-représentation fidèle $V$ de $G$ tels

3. Cest par exemple le cas si $G(\mathcal{C}_i)$ est scindé.

que l'inclusion $T_x(\mathcal{C}_1) \subset G(\mathcal{C}_1)$ et la représentation de $G(\mathcal{C}_1)$ associée à $\mathcal{C}_1$ s'identifient à $(T \subset G \to GL(V)) \otimes_E E_{\lambda_1}$. Combiné au Corollaire 8.6 on en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
E^+_{\lambda_2}[T \otimes_E E_{\lambda_2}] \arrow[r, "\simeq"] & E^+_{\lambda_1}[T \otimes_E E_{\lambda_1}] \arrow[r, "\simeq"] & E^+_{\lambda_1}[T_x(\mathcal{C}_1)] \arrow[r, "\simeq"] & E^+_{\lambda_2}[T_x(\mathcal{C}_2)] \\
E^+_{\lambda_2}[G \otimes_E E_{\lambda_2}] \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"'] & E^+_{\lambda_1}[G \otimes_E E_{\lambda_1}] \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"'] & E^+_{\lambda_1}[G(\mathcal{C}_1)] \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"'] & E^+_{\lambda_2}[G(\mathcal{C}_2)], \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ce qui permet d'appliquer le Théorème 8.7.

*Remarque 8.8.* — Pour passer de (8.4.1) à (8.4.2), l'argument de Chin requiert de remplacer $Q$ par un corps scindant un tore de Frobenius maximal. Hui a montré qu'on pouvait en fait se passer de cette extension [Hu18, Thm. 1.1].

## 9. SYSTÈMES LOCAUX COHOMOLOGIQUEMENT RIGIDES ET INTÉGRALITÉ (D'APRÈS ESNAULT-GROECHENIG)

Nous terminons l'exposé par une application de la conjecture des compagnons à une forme faible de la conjecture de Simpson évoquée dans l'introduction.

Soit $X$ une variété connexe, projective (pour simplifier [4]), lisse sur $\mathbb{C}$.

Un système local complexe irréductible $\mathcal{V}$ sur $X$ est dit cohomologiquement rigide si $H^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathcal{V})) = 0$, où $\mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}) \subset \mathcal{E}nd(\mathcal{V})$ est le sous-système des endomorphismes de trace nulle. Le champs de Betti $\mathcal{M}(X, r, d)$ des système locaux complexes irréductibles de rang $r$ et de déterminant fini d'ordre divisant $d$ est un champ algébrique de dimension finie sur un corps de nombres [EGr18, Prop. 2.1]. Il n'a donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Les systèmes locaux correspondant à celles de dimension 0 sont appelés rigides ; ils sont définis sur un corps de nombres $Q$. Puisque $H^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}))$ est l'espace tangent en $\mathcal{V}$ de $\mathcal{M}(X, r, d)$, les systèmes locaux cohomologiquement rigides sont rigides et les points correspondant de $\mathcal{M}(X, r, d)$ sont lisses. La conjecture de Simpson prédit que les systèmes locaux rigides sont d'origine géométrique donc en particulier entiers [LaS18, Conj. 1.2] *i.e.* proviennent par extension des scalaires de systèmes locaux de modules projectifs sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $Q$.

*Théorème 9.1.* — (Cas projectif de [EGr18, Thm. 1.1]) Tout système local complexe sur $X$ irréductible de déterminant fini et cohomologiquement rigide est entier.

4. Le résultat de Esnault-Groechenig vaut plus généralement pour les variétés quasi-projectives à condition d'imposer que la monodromie à l'infini des systèmes locaux considérés soit quasi-unipotente.

*Démonstration.* — Notons $\rho_i^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(Q)$, $i := 1, \ldots, N$ les représentations correspondant aux systèmes locaux cohomologiquement rigides de $\mathcal{M}(X, r, d)$. Comme $\pi_1^{top}(X(\mathbb{C}))$ est de type fini, il existe un ensemble fini $\Sigma$ de places finies de $Q$ tel que les représentations $\rho_i^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(Q)$ se factorisent *via* $\rho_i^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(Z_\Sigma)$, où $Z_\Sigma$ est l'anneau des $\Sigma$-entiers de $Q$. Pour chaque $\lambda \in \Sigma$, notons $Z_\lambda$ le complété de $Z$ en $\lambda$, $Q_\lambda$ son corps des fractions, $\overline{Q}_\lambda$ une clôture algébrique de $Q_\lambda$ et $\overline{Z}_\lambda$ son anneau des entiers. Il suffit de montrer que pour chaque place $\lambda \in \Sigma$, les représentations $\rho_{i,\lambda}^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(Z_\Sigma) \subset GL_r(\overline{Q}_\lambda)$ se factorisent *via* $\rho_{i,\lambda}^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(\overline{Z}_\lambda)$.
Fixons une place finie $\mu \notin \Sigma$ de $Q$ ; les $N$ représentations $\rho_i^{top} : \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to GL_r(Z_\Sigma) \subset GL_r(Z_\mu)$ se factorisent *via* la complétion profinie de $\pi_1^{top}(X(\mathbb{C}))$ - que l'on identifie à $\pi_1(X)$ - en $N$ représentations $\rho_i : \pi_1(X) \to GL_r(Z_\mu)$. Par comparaison des sites étale et analytique les $N$ $Z_\mu$-faisceaux lisses $\mathcal{V}_{i,X}$ correspondants vérifient encore $H^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}_{i,X})) = 0$. Fixons aussi un modèle $\mathcal{X}/S$ de $X/\mathbb{C}$ *i.e.* un schéma connexe $S$, séparé, lisse, de type fini, dominant sur $\mathbb{Z}$, de point générique $\xi$, un $S$-schéma $\mathcal{X} \to S$ projectif, lisse, géométriquement connexe sur $S$ et un $\mathbb{C}$-point $\xi_\mathbb{C}$ au dessus de $\xi$ tel que $\mathcal{X}_{\xi_\mathbb{C}} \simeq X$. Choisissons un point fermé $s \in S$ de caractéristique résiduelle $p$ première à $d!|GL_r(Z_\mu/\mu)|$ et distincte des caractéristiques résiduelles des places de $\Sigma$. Les représentations $\rho_i : \pi_1(X) \to GL_r(Z_\mu)$ se factorisent *via* la complétion première à $p$ en $N$ représentations $\rho_i : \pi_1(X)^{(p)'} \to GL_r(Z_\mu)$. La théorie de la spécialisation du groupe fondamental fournit un isomorphisme $\pi_1(X)^{(p)'} = \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{\xi}})^{(p)'} \tilde{\to} \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{s}})^{(p)'}$. Les représentations $\rho_i : \pi_1(X)^{(p)'} \to GL_r(Z_\lambda)$ induisent donc $N$ représentations $\rho_{i,\overline{s}} : \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{s}})^{(p)'} \to GL_r(Z_\mu)$, correspondant à des $Z_\mu$-faisceaux lisses $\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_{\overline{s}}}$ sur $\mathcal{X}_{\overline{s}}$ qui, par changement de base propre et lisse, vérifient toujours $H^1(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_{\overline{s}}})) = 0$. En utilisant que les systèmes locaux rigides correspondent aux points isolés de $\mathcal{M}(X, r, d)$, on montre[5] qu'il existe une extension finie $k$ de $k(s)$ tel que, en notant encore $s$ le $k$-point correspondant, les représentations $\rho_{i,\overline{s}} : \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{s}}) \to \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{s}})^{(p)'} \to GL_r(Z_\mu) \subset GL_r(\overline{Q}_\mu)$ s'étendent en $N$ représentations $\rho_{i,s} : \pi_1(\mathcal{X}_s) \to GL_r(\overline{Q}_\mu)$. Notons $\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$ les $N$ $\overline{Q}_\mu$-faisceaux lisses correspondants sur $X_s$. On peut de plus s'assurer que les $\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$ sont encore de déterminant d'ordre fini divisant $d$. On a ainsi construit $N$ $\overline{Q}_\mu$-faisceaux lisses $\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$ sur $\mathcal{X}_s$ de déterminant d'ordre fini divisant $d$, dont les restrictions à $\mathcal{X}_{\overline{s}}$ sont irréductibles deux à deux non-isomorphes et vérifiant $H^1(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s})) = 0$. D'après le Théorème 7.2, pour chaque place $\lambda \in \Sigma$ et isomorphisme $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_\mu \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_\lambda$, on dispose des $\sigma$-compagnons $\sigma\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$, qui sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\lambda$-faisceaux lisses de déterminant d'ordre fini divisant $d$ et dont les restrictions à $\mathcal{X}_{\overline{s}}$ sont encore irréductibles (2.5.4.1) et deux à deux non-isomorphes (2.5.4.2). De plus, par le Corollaire 3.8, les $\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$ donc les $\mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s})$ sont purs de poids 0. Comme $\mathcal{X}_s$ est propre et lisse sur $k(s)$ et $\sigma\mathcal{E}nd^0(\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}) = \mathcal{E}nd^0(\sigma\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s})$, le Corollaire 2.9. b) assure alors que $H^1(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathcal{E}nd^0(\sigma\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s})) = 0$. Les représentations correspondant aux $\sigma\mathcal{V}_{i,\mathcal{X}_s}$ se factorisent *via* $\rho_{i,s}^\sigma : \pi_1(\mathcal{X}_s) \to GL_r(\overline{Z}_\lambda)$. A leur tour, par les mêmes arguments, les représentations obtenues en précomposant les $\rho_{i,s}^\sigma : \pi_1(\mathcal{X}_s) \to GL_r(\overline{Z}_\lambda)$ par le morphisme

5. Cet argument est essentiellement dû à Simpson [Si92, Thm. 4].

$\pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \to \pi_1(X) = \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{\xi}}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{s}}) \subset \pi_1(\mathcal{X}_s)$ correspondent à $N$ systèmes locaux cohomologiquement rigides irréductibles de rang $r$ et de déterminant d'ordre fini divisant $d$ : ce sont donc ceux correspondant aux $N$ $\overline{Q}_\lambda$-systèmes locaux cohomologiquement rigides dont on est parti.
Le diagramme suivant résume l'architecture de la preuve :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_i"] & \pi_1^{(p)'}(\mathcal{X}_{\bar{\xi}}) \arrow[r, phantom, "\overset{\text{spécialisation}}{\simeq}"] & \pi_1^{(p)'}(\mathcal{X}_{\bar{s}}) \arrow[r, dotted, "\text{rigidité}"] \arrow[d, "\rho_{i,\bar{s}}"] & \pi_1^{[p]'}(\mathcal{X}_s) \arrow[d, "\rho_{i,s}"] & \pi_1(\mathcal{X}_s) \supset \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{s}}) \arrow[l, two heads] \arrow[d, "\rho_{i,s}^{\sigma}"] \arrow[dr, dotted] & \pi_1^{top}(X(\mathbb{C})) \arrow[l] \arrow[d] \\
GL_r(Z_\Sigma) \arrow[rr, hook] & & GL_r(Z_\mu) \arrow[r, hook] & GL_r(\overline{Q}_\mu) \arrow[r, bend right, "\sigma\text{-compagnon}"'] & GL_r(\overline{Q}_\lambda) & GL_r(\overline{Z}_\lambda) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

□

On notera qu'il n'est pas clair que si on part d'un système local rigide mais non cohomologiquement rigide les systèmes locaux qu'on récupère le sont encore.

## RÉFÉRENCES


[A18a] T. Abe, *Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture*, J. Reine Angew. Math. **734**, p. 59–69, 2018.

[A18b] T. Abe, *Langlands correspondence for iso crystals and the existence of crystalline companions for curves*, J. Amer. Math. Soc. **31**, p. 921–1057, 2018.

[ACa13] T. Abe et D. Caro, *Theory of weights in p-adic cohomology*, Preprint 2013. ArXiv : 1303.0662

[AE16] T. Abe et H. Esnault, *A Lefschetz theorem for overconvergent iso crystals with Frobenius structure*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., à paraître.

[AM15] T. Abe et A. Marmora, *Product formula for p-adic epsilon factors*, Journal of the Inst. Math. Jussieu **14**, p. 275–377, 2015.

[B91] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre, première partie*, Prépublication IRMAR, disponible sur https ://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot

[Bo78] E. Bombieri, *On exponential sums in Finite Fields, II.* Inventiones math. **47**, p. 29–39, 1978.

[C18] A. Cadoret, *Ultraproduct Weil II for curves and integral models in compatible families of l-adic local systems*, Preprint 2018, version disponible sur https ://webusers.imj-prg.fr/ anna.cadoret/Travaux.html

[Ch03] C.W. Chin, *Independence of ℓ in Lafforgue's theorem*, Adv. Math. **180**, p. 64–86, 2003.

[Ch04] C.W. Chin, *Independence of monodromy groups*, J.A.M.S. **17**, p. 723–747, 2004.

[Ch08] C.W. Chin, *Determining a split connected reductive group from its irreducible representations*, Journal of Group Theory **11**, p. 799–812, 2008.

[Cr92] R. Crew, *F-iso crystals and their monodromy groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **25**, p. 429–464, 1992.

[D'A18] M. D'Addezio, *The monodromy groups of lisse sheaves and overconvergent F-iso crystals*, Preprint 2018. ArXiv : 1711.06669

[D73] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L*. In Proc. Antwerpen Conference, vol. 2 ; L.N.M. **349**, Springer-Verlag, p 501–597, 1973.

[D80a] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L*, Séminaire à l'I.H.E.S., 1980.

[D80b] P. Deligne, *La conjecture de Weil : II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52**, p. 137–252, 1980.

[D82] P. Deligne, *Hodge Cycles on Abelian varieties*, in Hoge cycles, motives and Shimura varieties, P. Deligne, J.S. Milne, A. Ogus and K-Y Shih eds, L.N.M. **900**, 1982.

[D90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*. In The Grothendieck Festschrift Vol. 2, Birkhauser, p. 111–195, 1990.

[D12] P. Deligne, *Finitude de l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par des traces de Frobenius en caractéristique finie*, Mosc. Math. J. **12**, 2012.

[DH81] P. Deligne et G. Henniart, *Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L*. Inventiones math. **64**, p. 89–118, 1981.

[Dr78] V. Drinfeld, *Langlands conjecture for GL(2) over function field*, Proc. of Int. Congress of Math. (Helsinki, 1978), p. 565–574, 1978.

[Dr83] V. Drinfeld, *Two-dimensional $\ell$-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2)*, Amer. J. Math. **105**, p. 85–114, 1983.

[Dr87] V. Drinfeld, *Moduli varieties of F-sheaves*, Funct. Anal. Appl. **21**, p.107–122, 1987.

[Dr88] V. Drinfeld, *The proof of Petersson's conjecture for GL(2) over a global field of characteristic p*, Funct. Anal. Appl. **22**, p. 28–43, 1988.

[Dr12] V. Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, Mosc. Math. J. **12**, p. 515–542, 2012.

[Dw60] B. Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82**, p. 631–648, 1960.

[E17] H. Esnault, *A remark on Deligne's finiteness theorem*. Int. Math. Res. Not. **16**, p. 4962–4970, 2017.

[EGr18] H. Esnault et M. Groechenig, *Cohomologically rigid local systems and integrality*, Selecta Mathematica **24**, p. 4279–4292, 2018.

[EKer11] H. Esnault et M. Kerz, *Notes on Deligne's letter to Drinfeld dated March 5, 2007*, Preprint 2011, version disponible : http ://userpage.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/103-110617.pdf

[EKer12] H. Esnault et M. Kerz, *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*, Acta Mathematica Vietnamica **37**, p. 531–562, 2012.

[EtLS97] J.Y. Étesse et B. Le Stum, *Fonctions L associées aux F isocristaux surconvergents, I : interprétation cohomologique*, Math. Annalen **296**, p. 557-576, 1997.

[F18] J. Fresàn, *Équirépartition de sommes exponentielles*, Sém. N. Bourbaki 2017-2018, exp. **1141**.

[GJ72] R. Godement et H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, L.N.M. **260**, Springer-Verlag, 1972.

[Gro68] A. Grothendieck *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas vol. 3, North Holland, Amsterdam, p. 31–45, 1968.

[SGA1] A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Lecture Notes in Math., **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[SGA2] A. Grothendieck et al., *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Advanced Studies in Pure Mathematics **2**, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968. Nouvelle version disponible - ArXiv : 0511279

[SGA4] M. Artin, A/ Grothendieck et J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*. Lecture Notes in Math., **269**, **270** et **305**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972/3.

[Hu18] C.Y. Hui, *On the rationality of algebraic monodromy groups of compatible systems*, Preprint 2018. arXiv : 1805.08383v2.

[JP81] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, *Conducteurs des représentations du groupe linéaire*, Math. Ann. **256**, p. 199-214, 1981.

[Jou83] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics **42**, Birkhäuser Boston, Inc., 1983.

[K88] N. Katz, *Travaux de Laumon*, Sém. N. Bourbaki 1987-1988, exp. **691**, p. 105-132, 1988.

[K93] N.M. Katz, *Affine cohomological transforms, perversity and monodromy*, J.A.M.S. **6**, p. 149–222, 1993.

[K01] N.M. Katz, *Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic*, Finite Fields Appl. **7**, p. 29–44, 2001.

[KSa99] N.M. Katz et P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, A.M.S. Colloquium Publications **45**, 1999.

[KaLarV14] D. Kazhdan, M. Larsen et Y. Varshavsky, *The Tannakian formalism and the Langlands conjectures*, Algebra and Number Theory **8**, p. 243–256, 2014.

[Ked06] K.S. Kedlaya, *Fourier transform and p-adic "Weil II"*, Compos. Math. **142**, p. 1426–1450, 2006.

[Ked11a] K.S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-iso crystals, IV : local semistable reduction at monomial valuations*, Compos. Math. **147**, p. 467–523, 2011.

[Ked11b] K.S. Kedlaya, *Swan conductors for p-adic differential modules. II : global variation*, J. Inst. Math. Jussieu **10**, p. 191–224, 2011.

[Ked18a] K.S. Kedlaya, *Notes on iso crystals*, Preprint, 2018. arXiv :1606.01321

[Ked18b] K.S. Kedlaya, *Etale and crystalline compagnons , I*, Preprint 2018.

[KerS09] M. Kerz and A. Schmidt, *Covering data and higher dimensional global class field theory*, J. of Number Theory **129**, p. 2569–2599, 2009.

[KerS10] M. Kerz et A. Schmidt, *On different notions of tameness in arithmetic geometry*, Math. Annalen **346**, p. 641–668, 2010.

[L02] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147**, p.1–241, 2002.

[VL18] V. Lafforgue, *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*, Journal of the A.M.S. **31**, p. 719–891, 2018.

[LaS18] A. Langer et C. Simpson, *Rank* 3 *rigid representations of projective fundamental groups*, Compositio Math. **154**, p. 1534–1570, 2018.

[Lan67] R. Langlands, *Letter to A. Weil, January 1967*, disponible sur http ://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/functoriality.html

[LanS70] R. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, in Lect. Notes in Math. **170**, Springer Verlag, p. 18–61,1970.

[LarP92] M. Larsen and R. Pink, *On $\ell$-independence of algebraic monodromy groups in compatible systems of representations*, Inventiones Math. **107**, p. 603–636, 1992.

[Lau871] G. Laumon, *Semi-continuité du conducteur de Swan*, Astérisque **82-83**, p. 173–219, 1981.

[Lau87] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publ. Math. I.H.E.S **65**, p. 561–579, 1987.

[Lau00] G. Laumon, *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions, d'après Laurent Lafforgue*. Séminaire Bourbaki **873**, Mars 2000, 52 ème année, 1999-2000, p. 207–265, 2000.

[Laz00] C. Lazda, *Local acyclicity in p-adic cohomology*. Preprint, 2018. arXiv :1808.00280. 52 ème année, 1999-2000, p. 207–265, 2000.

[Mi] J.S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[M08] A. Marmora, *Facteur Epsilon p-adiques*, Compositio Mathematica **144**, p. 439–483, 2008.

[P79] I. Piatetski-Shapiro, *Multiplicity One Theorems*, in *Automorphic Forms, Representations and L-functions*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., p. 209–212, 1979. Compositio Mathematica **144**, p. 439–483, 2008.

[Po04] B. Poonen, *Bertini theorems over finite fields*, Annals of Math. **160**, p. 1099–1127, 2004.

[R65] M. Raynaud, *Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes (d'après Ogg-Shafarevich et Grothendieck).* Séminaire Bourbaki **286**, Février 1965, 17ème année, 1964-1965, 1965.

[S65] J.-P. Serre, *Zeta and L-functions*, in Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper and Row, New York, p. 82–92, 1965.

[S68] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1968.

[S81] J.-P. Serre, *Lettres à Ken Ribet, 1/1/1981 et 29/1/1981.*

[Si91] C. Simpson, *Nonabelian Hodge theory*, Proceedings of the I.C.M. (Kyoto, 1990), Math. Soc. Japan, Tokyo, p. 747-756, 1991.

[Si92] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publ. Math. I.H.E.S. **75**, p. 5–95, 1992.

[St16] B. Stroh, *La paramétrisation de Langlands globale sur les corps de fonctions, d'après Vincent Lafforgue.* Séminaire Bourbaki **1110**, Janvier 2016, 68ème année, 2015-2016, 2016.

[T02] A. Tamagawa, *Fundamental groups and geometry of curves in positive characteristic*, dans Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math. **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 297–333, 2002.

[Ta67] J. Tate, *Fourier's analysis in number field and Hecke's Zeta function*, in Algebraic number theory, J.W. Cassels and A. Fröhlich eds, London Academic Press, p. 304–347, 1967.

[Ts98] N. Tsuzuki, *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-iso crystals on a curve*, Amer. J. Math. **120**, p. 1165–1190, 1998.

[Ts02] N. Tsuzuki, *Morphisms of F-iso crystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-iso crystals*, Duke. Math. **111**, p.385–419, 2002.

[Ts12] N. Tsuzuki, *A note on the first cohomology group for geometrically unibranch varieties*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **128**, p. 17–53, 2012.

Anna Cadoret