Examen 2019/2020
4M002 - Algèbre et théorie de Galois
Anna Cadoret

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours et des travaux dirigés, les dictionnaires de langues papier.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Elles doivent être *soigneusement justifiées*. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions (certaines sont plus difficiles que d'autres). Le sujet est très long. Si vous en traitez (correctement!!) la moitié, vous êtes assurés d'obtenir la note maximale.

Notation: Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n$ le groupe alterné, dont on rappelle que c'est le noyau du morphisme signature $\epsilon_n : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$ et que c'est aussi l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 1.

(1) Donner les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/18 \oplus \mathbb{Z}/21$.

(2) On note $p : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ la fonction partition, qui à un entier $n \geq 1$ associe le nombre $p(n)$ de façons distinctes d'écrire n comme somme d'entiers. Soit k un corps et $P \in k[T]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$. Comme $k[T]$ est factoriel, P se décompose de façon unique sous la forme $P = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ avec les $P_i \in k[T]$ irréductibles, unitaires et deux à deux distincts.

(a) Soit V un k-espace vectoriel de k-dimension d. Déterminer en fonction de p et de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ le nombre de classes de similitude de k-endomorphismes de V ayant pour polynôme caractéristique P.

(b) On suppose $k = \mathbb{Q}$ et $P = T^2(T-1)^3(T+1)$ (donc $d = 6$). Calculer le nombre de classes de similitude de k-endomorphismes de V ayant pour polynôme caractéristique P.

Exercice 2. Soit k un corps de caractéristique 0 et V un k-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 2$ sur k. On note $T^0(V) := k$, $T^1(V) := V$ et $T^{n+1}(V) := V \otimes_k T^n(V)$, $n \geq 1$.

(1) Calculer la k-dimension de $T^n(V)$.

(2) On fait agir $\mathcal{S}_n$ sur V^n par $\sigma \cdot (v_1, \cdots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$. Montrer que cette action induit une action de $\mathcal{S}_n$ sur $T^n(V)$ par automorphismes k-linéaires.

Soit W un k-espace vectoriel. Une application n-k-multilinéaire $f : V^n \to W$ est dite symmétrique (resp. antisymmétrique ou alternée) si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a $f(\sigma \cdot (v_1, \ldots, v_n)) = f(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $f(\sigma \cdot (v_1, \ldots, v_n)) = \epsilon_n(\sigma) f(v_1, \ldots, v_n)$).

(3) On note $R^n(V) \subset T^n(V)$ le sous-k-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $t - \sigma \cdot t$, $t \in T^n(V)$, $S^n(V) := T^n(V)/R^n(V)$ et $\pi_n : T^n(V) \twoheadrightarrow S^n(V)$ la projection canonique. Montrer que l'application canonique $p_n : V^n \to T^n(V) \stackrel{\pi_n}{\twoheadrightarrow} S^n(V)$ vérifie la propriété universelle suivante: pour tout k-espace vectoriel W et pour toute application n-k-multilinéaire symétrique $f : V^n \to W$ il existe un unique morphisme de k-espaces vectoriels $S^n(f) : S^n(V) \to W$ tel que $S^n(f) \circ p_n = f$.

On note $v_1 \cdot \cdots \cdot v_n := \pi_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$.

(4) Expliquer comment modifier l'argument de la question précédente pour montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe un k-espace vectoriel $\bigwedge^n(V)$ et une morphisme surjectif de k-espaces vectoriels $\pi_n : T^n(V) \twoheadrightarrow \bigwedge^n(V)$ tels que l'application canonique $p_n : V^n \to T^n(V) \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} \bigwedge^n(V)$ vérifie la propriété universelle suivante: pour tout k-espace vectoriel W et pour toute application n-k-multilinéaire antisymmétrique $f : V^n \to W$ il existe un unique morphisme de k-espaces vectoriels $\bigwedge^n(f) : \bigwedge^n(V) \to W$ tel que $\bigwedge^n(f) \circ p_n = f$.

On note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := \pi_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$.

(5) En considérant l'application $f : V^n \to T^n(V)$, $(v_1, \ldots, v_n) \to \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, construire un morphisme de k-espaces vectoriels $s_n : S^n(V) \to T^n(V)$ tel que $\pi_n \circ s_n = Id$.

(6) En considérant l'application $f : V^n \to T^n(V)$, $(v_1, \ldots, v_n) \to \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon_n(\sigma)\sigma \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, construire un morphisme de k-espaces vectoriels $\wedge_n : \bigwedge^n(V) \to T^n(V)$ tel que $\pi_n \circ \wedge_n = Id$.

(7) L'objectif de cette question est de calculer la k-dimension de $S^n(V)$.

  (a) Montrer que $\dfrac{1}{(1-X)^d} = \displaystyle\sum_{n \geq 0} dim_k S^n(V) X^n$.

  (b) Calculer le développement de Taylor de $\frac{1}{(1-X)^d}$ et en déduire que $S^n(V)$ est de k-dimension $\dbinom{d+n-1}{n}$.

(8) L'objectif de cette question est de calculer la k-dimension de $\bigwedge^n(V)$.

  (a) Montrer que $\bigwedge^n(V) = 0$ si $n > d$.

  (b) Donner un exemple d'application d-k-multilinéaire $f : V^d \to k$ non-nulle. En déduire que $\bigwedge^d V$ est de k-dimension 1.

  (c) Déduire de la question précédente que, si $n \leq d$, $\bigwedge^n V$ est de k-dimension $\dbinom{d}{n}$.

(9) Montrer que $s_n : S^n(V) \to T^n(V)$, $\wedge_n : \bigwedge^n(V) \to T^n(V)$ induisent un morphisme de k-espaces vectoriels $s_n \oplus \wedge_n : S^n(V) \oplus \bigwedge^n(V) \hookrightarrow T^n(V)$, qui est injectif dès que $n \geq 2$. Montrer que c'est un isomorphisme si $n = 2$.

Problème. Soit k un corps de caractéristique 0 et $P \in k[T]$ un polynôme unitaire séparable de degré 4. On note K/k un corps de décomposition de P sur k et $Z_K(P) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} \subset K$ l'ensemble des racines de P dans K. *Via* la bijection $i \to \alpha_i$, on identifie $\mathcal{S}_4 \tilde{\to} \mathcal{S}(Z_K(P))$. On note

$$\delta_1 := (1,2)(3,4), \delta_2 := (1,3)(2,4), \delta_3 := (1,4)(2,3)$$

$$\tau_1 := (1,2),\ \tau_2 := (1,3),\ \tau_3 := (1,4),\ c_1 = (1,4,2,3),\ c_2 := (1,4,3,2),\ c_3 = (1,2,4,3),$$

On considère le sous-ensemble $V_4 := \{Id, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset \mathcal{S}_4$ et les sous-groupes $D_i := \langle \tau_i,\ c_i \rangle \subset \mathcal{S}_4$, $i = 1, 2, 3$.

On rappelle qu'un groupe G agit transitivement sur un ensemble X si X a une unique orbite sous G *i.e.* pour tout $x \in X$, $X = G \cdot x$.

(1) Rappeler pourquoi l'extension K/k est galoisienne. On note $G := Gal(K|k)$ son groupe de Galois. Justifier que l'action naturelle de G sur K stabilise $Z_k(P)$ et induit un morphisme injectif de groupes $G \hookrightarrow \mathcal{S}(Z_K(P)) \simeq \mathcal{S}_4$, $\sigma \to \sigma|_{Z_K(P)} : Z_K(P) \tilde{\to} Z_K(P)$.

(2) On note

$$a_1 := \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$$
$$a_2 := \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4$$
$$a_3 := \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3.$$

Montrer que a_1, a_2, a_3 sont distincts.

(3) Montrer que $\mathcal{S}_4$ agit naturellement sur $\{a_1, a_2, a_3\}$ et que cette action est transitive. En déduire que le stabilisateur S_i de a_i dans $\mathcal{S}_4$ est de cardinal 8 et qu'il contient D_i. Montrer que $D_i = S_i$.

(4) Déduire de la question précédente que $V_4 = D_1 \cap D_2 \cap D_3$ et que V_4 est un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$, normal dans $\mathcal{S}_4$.

(5) Montrer que $K' := k(a_1, a_2, a_3) = K^{G \cap V_4}$. En déduire que K'/k est une extension galoisienne de groupe $G/G \cap V_4$.

On admettra la classification des sous-groupes de $\mathcal{S}_4$ donnée dans le tableau ci-dessous.

(∗)

Type	Nombre	Cardinal	Description
$\mathcal{S}_4$	1	24	
$\mathcal{A}_4$	1	12	
$\mathcal{S}_3$	4	6	Stabilisateur de i, $i = 1, 2, 3$
$\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$	3	8	D_i, $i = 1, 2, 3$
$\mathbb{Z}/4$	3	4	$\langle c_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$
$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	1	4	V_4
$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	3	4	engendré par 2 transpositions à support disjoints.
$\mathbb{Z}/3$	4	3	engendré par les 3-cycles
$\mathbb{Z}/2$	2	2	engendré par les transpositions
$\mathbb{Z}/2$	3	2	engendré par les double-transpositions

(7) On suppose de plus que $P \in k[T]$ est irréductible sur k. Montrer que G agit transitivement sur $\{1, 2, 3, 4\} (\tilde{\to} Z_K(P))$.

(8) Montrer que $G \cap V_4 \neq \{1\}$.

(9) Montrer qu'il n'y a que 5 possibilités pour le couple $|G \cap V_4|$, $[G : G \cap V_4]$, à savoir

$\lvert G \cap V_4 \rvert$	4	4	4	4	2
$[G : G \cap V_4]$	6	3	2	1	2

Dans chacun de ces 5 cas, déterminer les types possibles pour la structure de G.

(10) On note $R := (T - a_1)(T - a_2)(T - a_3) \in K[T]$. Montrer que R est à coefficients dans k. Quel est le lien entre R et K'?

(11) Montrer que si $P(T) = T^4 + aT^3 + bT^2 + cT + d$ alors

$$R(T) = T^3 - bT^2 + (ac - 4d)T - (a^2 d - 4bd + c^2).$$

(12) Dans chacun des cas suivants, justifier que P est irréductible sur $k := \mathbb{Q}$, calculer R, en déduire $[G : V_4 \cap G]$ puis déterminer G.

(a) $P(T) = T^4 - 4T + 2$;
(b) $P(T) = T^4 + 4T^2 + 2$;
(c) $P(T) = T^4 - 10T^2 + 4$;
(d) $P(T) = T^4 - 2$.

(13) Donner la liste des sous-groupes de D_1 en précisant lesquels sont normaux.

(14) Pour $P(T) = T^4 - 2$, donner la liste complètes des sous-k-extensions L/k de K/k en spécifiant à chaque fois le degré de L/k, le groupe $Gal(K|L)$ et dans les cas où L/k est galoisienne, déterminer $Gal(L|k)$. Donner pour chaque sous-extension un élément primitif.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.